



FREDERIC PERKINS,

Park Street,

Southwark.

TRAITÉ DE PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE ET MATHÉMATIQUE,

PAR J. B. BIOT,

Membre de l'Académie des Sciences, Adjoint du Bureau des Longitudes, Professeur au Collége de France et à la Faculté des Sciences de Paris; de la Société philomatique de Paris; des Sociétés royales de Londres, d'Edimbourg, des Antiquaires d'Ecosse; des Académies royales de Turin, de Munich, et de l'Université de Wilna.

Omnis enim Philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut, à phænomenis motuum investigemus vires naturæ, deindè, ab his viribus, demonstremus phænomena reliqua.

NEWTON, *Princip. prefat.*

TOME TROISIÈME.

A PARIS,

CHEZ DETERVILLE, LIBRAIRE, RUE HAUTEFEUILLE, N° 8.

1816.


WELLCOME
HISTORICAL
MEDICAL
LIBRARY

TRAITÉ DE PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE ET MATHÉMATIQUE.

LIVRE QUATRIÈME.

DU MAGNÉTISME.

CHAPITRE PREMIER.

Phénomènes généraux des attractions et répulsions magnétiques.

PRESQUE tous les morceaux de mines de fer dans lesquels ce métal est peu oxidé, possèdent, lorsqu'on les retire de la terre, la singulière propriété d'attirer le fer par une force invisible. Souvent cette attraction est si faible, qu'il faut employer des procédés très-délicats pour la découvrir; mais quelquefois elle est tellement énergique, qu'elle soulève des poids considérables. Alors le minéral prend le nom d'*aimant*, en grec μαγνης; d'où est venu le mot de *magnétisme*, pour désigner les phénomènes d'attraction que l'aimant produit.

Si l'on roule un morceau d'aimant dans de la limaille de fer, et qu'ensuite on l'en retire, on remarque qu'elle ne s'attache pas également à tous les points de sa surface. Elle s'accumule principalement en deux parties opposées N S, fig. 1, où elle se tient hérissée. Ces parties se nomment les *pôles* de l'aimant. Pour en observer plus aisément les propriétés, je supposerai que l'on y taille deux faces planes et parallèles A B, fig. 2, dans un sens à peu près perpendiculaire à celui de la plus grande attraction. Alors on observe les phénomènes suivans.

Chaque pôle présenté de loin à la limaille de fer, l'attire *à distance*, comme ferait un bâton de cire d'Espagne frotté que l'on présenterait à des corps légers. Si l'on suspend horizontalement une petite aiguille de fer ou d'acier à un fil de lin, de soie ou de toute autre matière flexible quelconque, de manière qu'elle ait une pleine liberté dans ses mouvemens, chaque pôle de l'aimant l'attirera de même, et pourra la faire pirouetter autour de son centre. Cette faculté s'exerce indifféremment à travers les substances qui conduisent ou ne conduisent pas l'électricité. L'eau, le verre, le papier, la flamme n'interceptent pas son action. L'isolement ne lui est pas non plus nécessaire, et l'aimant ne perd rien pour être touché.

Si l'on met la surface polaire A d'un aimant successivement en contact avec les surfaces A′ et B′ d'un autre aimant, on trouve qu'elle attire l'une d'elles, B′ par exemple, et repousse A′. Réciproquement la surface polaire B du premier aimant attire A′ et repousse B′. La tendance mutuelle des faces qui s'attirent, se manifeste, non-seulement par l'adhérence qu'elles contractent quand elles se touchent, mais encore par l'effort qu'elles font sentir lorsqu'elles sont prêtes à se toucher. La répulsion serait moins aisée à reconnaître de cette manière; mais on la rend sensible, en posant l'un des deux aimans sur une petite planche que l'on fait flotter sur l'eau; car alors étant libre de se mouvoir, si on lui présente l'autre aimant, il s'approche ou s'éloigne, selon qu'il est attiré ou repoussé. Ces phénomènes nous apprennent qu'il y a deux sortes de magnétisme, comme deux sortes d'électricité, et chacun d'eux domine dans un des

pôles de l'aimant, de même que les deux espèces d'électricité dans chacun des pôles d'une pile électrique.

En examinant les aigrettes de limaille qui s'attachent aux pôles des aimans, on remarque que leurs rayons sont composés de plusieurs parcelles de limaille adhérentes bout-à-bout les unes aux autres. Ce phénomène est très-digne d'attention, car il nous apprend que le fer mis en contact avec l'aimant devient lui-même magnétique, comme un corps isolé devient électrique quand il est tenu en présence d'un corps électrisé.

Pour mettre cette propriété en évidence, il faut prendre plusieurs barreaux de fer *doux*, c'est-à-dire ductile et malléable, tel, par exemple, que celui dont les serruriers se servent pour fabriquer des clefs. Après s'être assuré qu'aucun de ces barreaux ne possède un magnétisme sensible, on suspend l'un d'eux *a b* à l'un des pôles B d'un aimant ; aussitôt le bout inférieur *b* de ce barreau acquiert toutes les propriétés magnétiques. Si on le plonge dans la limaille de fer, elle s'y attache. On peut même y suspendre un second barreau, à celui-ci un troisième, et ainsi de suite, comme le représente la fig. 3 ; ils adhéreront tous les uns aux autres jusqu'à ce que leur poids total excède celui que l'aimant peut supporter. Alors le premier barreau *a b* se détachant, ils tomberont tous en se séparant les uns des autres, et si on essaie de les réunir, ils ne seront plus capables de se soutenir mutuellement. Cependant ils conserveront encore pour l'ordinaire quelques faibles restes de magnétisme qui deviendront sensibles, si on les plonge dans de la limaille de fer, ou si on les présente à des aiguilles de fer librement suspendues. Cette communication passagère du magnétisme s'opère encore, si le premier barreau, sans toucher l'aimant, en est approché de fort près. Mais alors le poids total est moindre que dans le contact ; ce qui montre que l'attraction magnétique décroît avec la distance.

Si, au lieu de fer doux, on emploie des barreaux d'acier ou de fer écroui au marteau, l'adhérence de ces barreaux les uns aux autres s'établit moins aisément et moins promptement, mais elle est plus durable ; et les barreaux séparés de l'aimant

gardent le magnétisme qu'ils avaient acquis dans le contact, soit entre eux, soit avec l'aimant.

Le fer doux d'une part, et l'acier de l'autre, se comportent dans ces expériences comme le feraient une tige de métal et un bâton de cire d'Espagne, soumis l'un et l'autre à l'influence d'un corps électrisé. Dans le métal, la décomposition des électricités naturelles est subite, mais leur recomposition l'est également, et elle s'opère dès que le métal est soustrait à l'influence du corps électrisé. Dans la résine, au contraire, les électricités naturelles sont difficilement séparées; mais une fois qu'elles le sont, elles éprouvent la même difficulté à se réunir, et l'état électrique persiste après que le corps électrisé n'agit plus.

On peut encore communiquer le magnétisme à un barreau d'acier d'une manière plus prompte et plus énergique, avec deux aimans qu'avec un seul, en mettant à la fois ses deux extrémités en contact avec les pôles par lesquels les aimans l'attirent. Les mêmes aimans peuvent ainsi successivement rendre magnétiques un nombre de barreaux quelconques, sans rien perdre de leur vertu première; ce qui prouve qu'ils ne transmettent rien aux barreaux, mais qu'ils y développent seulement, par leur influence, quelque principe qui s'y trouvait dissimulé. C'est ainsi qu'un bâton de cire d'Espagne frotté ne perd rien de son électricité par les décompositions que son influence opère à distance dans les électricités naturelles des autres corps.

Si, après avoir aimanté de cette manière un barreau ou un fil d'acier, on le suspend horizontalement à un appareil dont la torsion soit insensible, ou si on le fait flotter sur l'eau, en le posant sur une petite planchette de bois ou de liége, il ne se tourne pas indifféremment vers tous les points de l'espace; mais il prend une direction déterminée, laquelle est à-peu-près nord et sud. Je dis à-peu-près, car dans certains lieux de la terre, l'extrémité nord du barreau s'écarte du méridien à l'ouest, dans d'autres à l'est, et dans d'autres enfin elle coïncide avec le méridien même. Cet écart se nomme *la déclinaison de l'aiguille aimantée*. Il est constant au même instant en chaque endroit, et tous les barreaux aimantés suspendus ainsi librement, y prennent

des directions exactement parallèles. Mais cette direction commune varie avec le temps, selon des lois que nous exposerons plus tard d'après l'observation. Le plan vertical suivant lequel l'aiguille aimantée se dirige dans chaque lieu, s'appelle *le méridien magnétique*, parce qu'en général il s'écarte peu du méridien astronomique.

Lorsque plusieurs fils aimantés sont ainsi librement suspendus dans une situation horisontale, celles de leurs extrémités qui se tournent vers un même pôle terrestre, sont celles qui, dans l'aimantation, ont été en contact avec un même pôle magnétique, et qui ont par conséquent reçu un magnétisme de même nature. Si l'on approche ces extrémités les unes des autres, on voit qu'elles se repoussent mutuellement. Au contraire, en approchant les extrémités qui ont reçu des magnétismes de différente nature, on voit qu'elles s'attirent. En cela, les deux magnétismes se comportent encore comme les deux électricités.

Lorsqu'on présente de loin l'un des pôles d'un aimant à une aiguille aimantée, suspendue par son centre et équilibrée de manière à rester horisontale, les deux pôles de l'aimant agissent à la fois sur l'aiguille; mais l'action du pôle le plus voisin est toujours la plus forte. L'aiguille tourne donc vers l'aimant celui de ses pôles qui est attiré, et en éloigne celui qui est repoussé. Après qu'elle a pris ainsi une position d'équilibre, si on l'en détourne tant soit peu, elle y revient par une suite d'oscillations, de même qu'un pendule écarté de sa verticale y revient par l'effort de sa pesanteur. On observe des mouvemens absolument pareils dans les aiguilles aimantées, librement suspendues, lorsqu'on les écarte tant soit peu de leur méridien magnétique. Ainsi, en cela comme par la direction constante qu'il leur donne, le globe terrestre agit sur elles comme ferait un véritable aimant; soit qu'il doive cette faculté à la multitude des mines de fer qu'il renferme, soit qu'il la tienne de quelque autre cause encore plus générale. Ceci nous fournit une excellente dénomination pour distinguer l'une de l'autre les deux sortes de magnétisme, en appelant *boréal* celui qui domine dans la partie boréale du globe, et *austral*

celui qui domine dans l'hémisphère austral : alors, pour conserver l'analogie des attractions et des répulsions, il faudra regarder l'extrémité des barreaux, qui se dirige vers le nord, comme leur pôle austral, et l'extrémité qui se dirige vers le sud comme leur pôle boréal.

Les expériences précédentes ne nous indiquent que la direction du plan vertical suivant lequel s'exerce en chaque lieu la résultante de toutes les forces magnétiques du globe terrestre; mais quelle est la direction absolue de cette résultante dans ce plan ? Pour le savoir, fabriquons une aiguille d'acier bien cylindrique *ab*, fig. 4, et plaçons au milieu de sa longueur un axe qui lui soit perpendiculaire; puis suspendons-la ainsi par son centre sur des plans bien polis, et équilibrons-la avant de l'aimanter, de manière qu'elle soit parfaitement horizontale. Si ensuite nous venons à lui communiquer le magnétisme, et que nous la replacions sur ses supports, en la dirigeant dans le méridien magnétique, elle ne se tiendra plus horizontalement. Celle de ses deux extrémités qui possède le magnétisme austral, s'inclinera vers l'horizon, du moins dans nos climats, et après quelques oscillations, elle s'arrêtera en formant avec la verticale un certain angle fixe. Cet angle se nomme l'*inclinaison magnétique;* il est différent selon les lieux. Il y a une zône près de l'équateur, où l'aiguille aimantée est horizontale. Au sud de cette zône, l'aiguille incline vers la surface terrestre celle de ses extrémités qui possède le magnétisme boréal, ce qui indique deux sortes de forces, les unes australes, les autres boréales, dirigées de part et d'autre de l'équateur terrestre. Nous étudierons plus tard avec détail les lois particulières de ce phénomène. Je me borne ici à l'indiquer comme un fait que l'on a découvert par l'observation.

Pour mesurer exactement l'inclinaison magnétique, on place l'axe de suspension de l'aiguille au centre d'un cercle vertical de cuivre MM, fig. 5, dont le limbe, divisé en degrés, tourne autour d'un axe pareillement vertical VV, de manière à pouvoir être placé dans tous les azimuths. L'axe VV lui-même est placé au centre d'un autre cercle horizontal, également divisé, qui sert à déterminer la direction dans laquelle on a tourné le

premier cercle MM. Cet appareil s'appelle une *boussole d'inclinaison*. Il y a plusieurs précautions importantes à observer dans la manière d'aimanter l'aiguille, de la suspendre, et même de mesurer l'inclinaison; mais nous ne pouvons en parler qu'après avoir établi les lois du magnétisme.

La propriété directrice de l'aimant est une des plus belles découvertes que les hommes aient jamais faites; elle a donné aux navigateurs un moyen sûr de reconnaître la direction de leur route à travers l'immensité des mers, au milieu des nuits les plus obscures, et lorsque les brumes ou les tempêtes leur dérobent entièrement la vue des cieux. Une aiguille aimantée suspendue en équilibre sur un pivot, leur montre le nord et le sud aussi bien que l'observation des astres. Cette invention si utile et si simple ne remonte guère qu'au 12e siècle. Jusqu'alors les navigateurs ne pouvaient se hasarder à s'éloigner des côtes. La découverte de la *boussole* leur a donné le moyen de s'élancer dans la haute mer, et d'aller chercher des terres nouvelles, ignorées des plus puissantes nations de l'antiquité.

Tels sont les principaux phénomènes des attractions et des répulsions magnétiques. Avant de les réduire en théorie, je vais faire connaître quelques autres faits de détail dont je n'ai pas parlé plutôt, afin de ne pas interrompre la série des raisonnemens.

On a cru long-temps que le fer et l'acier étaient les seules substances qui pussent prendre le magnétisme; on a reconnu dans ces derniers temps que le nickel et le cobalt jouissent de la même propriété.

Pour que ces métaux deviennent magnétiques, il n'est pas indispensablement nécessaire qu'ils aient été soumis à l'influence d'un aimant. Les barres de fer qui ont été long-temps élevées dans l'atmosphère finissent par acquérir la vertu magnétique. C'est ce que Gassendi a observé le premier sur la croix du clocher de Saint-Jean d'Aix en Provence, et on a retrouvé depuis la même propriété dans la croix du clocher de Chartres. A la vérité, on peut supposer qu'elle est développée par l'action prolongée de l'aimant terrestre; mais divers moyens mécaniques, tels que le choc, la pression, la torsion, une décharge

électrique produisent aussi le même effet instantanément.

On prend un fil de fer commun de deux ou trois lignes de diamètre, et de douze à quinze pouces de longueur ; on l'écrase par un de ses bouts sur un plan de fer, ou bien on le fait passer dans une ouverture faite dans une plaque de fer un peu épaisse ; puis on le plie et on le tord en divers sens, jusqu'à ce qu'il se brise. A la suite de ces mouvemens, il se trouve avoir acquis la vertu magnétique ; car il attire la limaille de fer ; et si son bout tordu est présenté à une aiguille aimantée suspendue librement, il attire un des pôles de cette aiguille, et repousse l'autre.

On produit le même phénomène sur une verge de fer dur, en la tenant verticale, et frappant légèrement son extrémité supérieure à coups de marteau. Pour que le phénomène soit bien sensible, il faut qu'elle ait deux ou trois pieds de longueur. Si ensuite on la renverse, et qu'on recommence à la frapper sur son autre bout, on détruit peu à peu le magnétisme qu'on lui avait imprimé, et on finit par lui en donner un autre contraire ; de sorte que ses pôles sont renversés. On produit encore le même effet en la laissant tomber verticalement sur un corps dur. Les outils dont se servent les serruriers sont ainsi presque toujours aimantés par les chocs réitérés qu'ils éprouvent. Les ciseaux, les couteaux et tous les corps tranchans le sont plus ou moins, surtout s'ils ont coupé du fer. Les décharges électriques agissant comme un choc, développent aussi le magnétisme dans les fils de fer qu'on leur fait traverser, et la foudre produit le même effet sur les boussoles des navires dont elle change quelquefois les pôles.

D'après cela, on pourrait se demander si l'aimantation ne consiste pas dans un certain mode de déplacement opéré parmi les molécules qui composent un barreau de fer ou d'acier. Pour le savoir, M. Gay-Lussac a cherché si ces métaux éprouvaient quelque changement de dimension en devenant magnétiques. Il a pris un tube de fer creux AB, fig. 6, fermé par les deux bouts ; et à l'un de ces bouts, il a adapté un tube de verre extrêmement fin, divisé en parties égales. Il a fait entrer de l'eau dans cet appareil jusqu'à ce que le tube de verre fût rempli en partie ; ensuite ayant attendu un certain temps pour que la température

du liquide fût devenue bien stable, il a aimanté le tube de fer. Le niveau de l'eau, dans le petit tube, n'a éprouvé aucun déplacement; ainsi ce changement d'état n'avait produit dans le fer aucun changement appréciable de volume.

La contiguïté plus ou moins parfaite qu'ont entre elles les particules d'un morceau de fer ou de nickel, influe extrêmement sur la facilité que l'on éprouve à les aimanter. Ces métaux, lorsqu'ils sont purs et parfaitement ductiles, ne gardent point le magnétisme; ils le prennent et le perdent instantanément. Mais on les rend capables de le conserver, soit par des moyens mécaniques, tels que la pression, la torsion, le laminage, soit, comme l'a observé M. Gay-Lussac, en les combinant chimiquement avec des substances non magnétiques, comme le charbon, le phosphore, l'arsénic, l'étain. A mesure que la proportion de ces substances augmente, le magnétisme devient plus difficile à imprimer, et il dure aussi davantage; mais enfin il arrive un terme où l'on ne peut plus le développer en aucune manière, et la combinaison cesse d'être attirable à l'aimant. D'après cela, il est naturel de penser que les phénomènes magnétiques doivent être modifiés par la chaleur qui influe sur la cohésion d'une manière si puissante et si immédiate. Aussi a-t-on depuis long-temps observé que les barreaux aimantés perdent tout leur magnétisme, quand ils sont chauffés jusqu'à rougir. M. Gay-Lussac a trouvé la même chose pour le nickel, et il a de plus remarqué que ces métaux cessent aussi alors d'être attirables à l'aimant.

C'est encore ici le lieu d'indiquer l'influence de la trempe sur le magnétisme. Pour cela, il faut rappeler en quoi consiste cette opération. Lorsqu'un barreau de fer ou d'acier a été chauffé jusqu'à rougir, si on le laisse refroidir avec lenteur dans l'air, ses particules, en se rapprochant peu à peu les unes des autres, prennent les distances et les positions d'équilibre stable où elles se trouvent graduellement amenées par l'effet lent et progressif de leurs attractions réciproques. Mais si l'on plonge brusquement le barreau rouge dans un liquide qui refroidisse subitement sa surface, les particules de cette surface prennent d'abord les arrangemens précipités auxquels ce changement

imprévu les oblige; et devenues dès-lors immobiles, elles forment une sorte de vase où les molécules de l'intérieur de la masse sont aussi contraintes de s'arranger avec rapidité à mesure que le refroidissement les gagne. De là résulte donc une espèce de cristallisation différente de l'équilibre stable, comme on l'observe dans les larmes bataviques, qui ne sont autre chose que du verre trempé. Quand on fait subir cette opération au fer, à l'acier, au nickel, au cobalt, on trouve, comme nous l'avons déjà remarqué ailleurs, que ces métaux en deviennent plus durs, moins flexibles, plus fragiles, et tout cela à un degré d'autant plus marqué, que le refroidissement a été plus subit; on doit bien s'attendre qu'un changement pareil influera sur les propriétés magnétiques; c'est aussi ce qui a lieu. Les métaux magnétiques s'aimantent plus difficilement quand ils sont trempés que lorsqu'ils ne le sont pas; le développement du magnétisme y est aussi beaucoup plus durable. La difficulté de l'aimantation augmente avec la dureté de la trempe, et cette dureté influe encore sur l'intensité de l'état magnétique que les barreaux peuvent acquérir.

L'effet de la trempe dépendant de la différence des températures dans lesquelles on transporte subitement le métal, il faut chercher des moyens pour les évaluer: la chose est facile pour le liquide dans lequel la trempe s'opère; elle l'est beaucoup moins pour le métal, dont le degré de chaleur s'élève alors fort au-dessus de tous nos procédés thermométriques. Dans la pratique ordinaire, on emploie, comme une indication constante, la couleur qu'acquiert le métal; et l'on dit qu'il est trempé rouge-blanc, rouge, rouge-cerise, cerise clair, selon celle de ces teintes qu'il possède à l'instant où on le plonge dans le liquide destiné à le refroidir. Quoique cette indication soit nécessairement assez imparfaite, elle suffit cependant pour les expériences magnétiques où les divers degrés de trempe n'ont d'influence sensible que jusqu'à un certain degré de température. Les degrés plus élevés ne changent absolument rien à l'intensité du magnétisme que les barreaux peuvent acquérir.

CHAPITRE II.

Considérations générales sur le développement du Magnétisme dans les barreaux aimantés; leur analogie avec les piles électriques.

Les phénomènes que nous venons de décrire ont un rapport si frappant avec ceux de la tourmaline et des piles électriques isolées, qu'ils semblent devoir se ramener à une théorie tout-à-fait semblable. C'est aussi ce dont nous allons nous convaincre par leur rapprochement.

Nous reconnaissons d'abord deux principes magnétiques distincts dont chacun se repousse lui-même et attire l'autre. Ces deux principes existent primitivement dans chaque morceau de fer avant qu'il soit aimanté, puisqu'il n'y a rien de transmis dans l'aimantation, et que rien n'entre dans le fer, ni n'en sort par le contact. Ils sont donc alors combinés ensemble et dissimulés l'un par l'autre, comme le sont les électricités naturelles des corps, et c'est pour cela que leur action à distance est nulle. Mais elle devient sensible, lorsqu'ils sont séparés par une influence extérieure qui agit inégalement sur chacun d'eux, de même que les électricités naturelles des corps montrent leurs propriétés attractives et répulsives quand elles ont été décomposées par l'influence d'un corps électrisé. Je dis de plus, qu'ils existent ainsi et sont ainsi développés séparément dans chaque particule de fer, sans qu'il se fasse aucune transmission de magnétisme d'une particule à l'autre. Car lorsqu'un barreau a été aimanté, si on le rompt en deux ou en trois, ou en un nombre quelconque de parties, chacune de ces parties montre spontanément deux pôles, comme les fragmens de tourmaline ou les divisions des piles électriques; et les pôles de noms contraires se forment dans les extrémités des particules qui étaient précédemment contiguës, de même que cela a lieu

aussi dans les tourmalines et les piles. Or la séparation en plusieurs fragmens ne peut avoir aucune influence pour produire ces pôles ; elle ne peut que les mettre en évidence, en les soustrayant à l'attraction des particules contiguës, par laquelle ils étaient dissimulés dans la colonne magnétique entière, comme les pôles électriques contigus le sont dans les élémens d'une tourmaline. Si l'on veut confirmer ceci synthétiquement, il n'y a qu'à réunir bout à bout plusieurs petits barreaux, et les aimanter tous à la fois comme un barreau unique, soit en mettant les deux extrémités de la chaîne en contact avec les pôles opposés de deux aimans, soit en promenant sur toute sa longueur un des pôles d'un seul aimant. Quel que soit le procédé que l'on emploie, la série des barreaux s'aimantera comme ferait un barreau continu des mêmes dimensions, sur lequel on agirait de la même manière. Si l'on a employé, par exemple, de petits bouts de fil d'acier recuit, ayant un ou deux millimètres de diamètre, et dont l'ensemble forme une longueur de deux ou trois décimètres seulement, on trouvera pour l'ordinaire qu'une moitié de la chaîne exerce le magnétisme austral, et l'autre moitié le magnétisme boréal; mais si l'on défait la chaîne, chaque bout de fil, dégagé de l'influence des autres, montrera aussitôt deux pôles, et exercera de même le magnétisme boréal dans une moitié de sa longueur, le magnétisme austral dans l'autre moitié. Diminuez les dimensions de ces fils jusqu'à les réduire à une simple particule, vous aurez une représentation exacte de l'état des particules ferrugineuses dans les barreaux aimantés; et vous concevrez ainsi comment le système de toutes ces petites forces peut, selon les proportions de celles qui se suivent, donner des résultats opposés aux deux extrémités du barreau, ou même quelquefois plusieurs résultats alternativement contraires sur divers points de sa longueur.

Maintenant, lorsque les deux magnétismes ont été séparés dans les particules d'un morceau de fer dur ou d'acier, l'expérience prouve qu'ils ne se recomposent qu'avec une extrême lenteur. Il faut donc qu'une cause quelconque s'oppose à leur attrac-

tion mutuelle. Quelle que soit cette cause, on peut l'assimiler à la résistance que l'électricité éprouve pour se mouvoir à la surface et dans l'intérieur des corps résineux. Plus elle sera forte, plus l'état magnétique sera difficile à imprimer et lent à se perdre. C'est le cas de l'acier très-dur. Si au contraire cette résistance était nulle, les deux magnétismes se sépareraient dans chaque particule par la plus faible influence, et se rejoindraient aussitôt que cette influence cesserait d'agir. C'est le cas du fer, du cobalt et du nickel, quand ils ont une ductilité parfaite. Mais dans ce cas même, il ne doit s'opérer aucune transmission de magnétisme d'une particule à une autre. Tout le jeu des compositions et des décompositions se passe dans l'intérieur de chaque particule, et il y a de l'une à l'autre une imperméabilité absolue. C'est précisément ainsi que dans les piles électriques formées par des plaques de verre armées de métal, les décompositions et les recompositions d'électricités naturelles s'opèrent avec une facilité parfaite entre les surfaces métalliques qui se regardent et qui communiquent ensemble, sans qu'il se transmette rien à travers les plaques isolantes qui les séparent du reste de la chaîne.

Les rapprochemens que nous venons de faire me semblent de nature à mettre dans la plus parfaite évidence la constitution intime des aimans et des barreaux aimantés. Il nous reste à déterminer par l'expérience quelle est la nature et la quantité de magnétisme libre dans chaque point de ces corps, et quelle loi chaque espèce de magnétisme suit dans ses attractions et répulsions. Cette seconde question que nous avions d'abord attaquée dans les expériences électriques, ne peut être ici traitée qu'après l'autre, parce que ne pouvant pas isoler l'un des deux magnétismes, nous sommes forcés d'étudier les phénomènes composés qui résultent de leur coexistence dans des corps où leur distribution nous est connue.

Quand nous avons étudié la distribution de l'électricité en équilibre dans les corps conducteurs, nous avons vu qu'elle était assujettie à une condition unique, savoir que l'électricité libre n'exerçât aucune action, soit attractive, soit répulsive,

sur les points de l'intérieur de ces corps. Dans le magnétisme, il n'est pas nécessaire, pour l'équilibre, que l'action intérieure soit nulle; il suffit qu'elle soit inférieure à la résistance que la force coërcitive du métal oppose à la séparation des magnétismes naturels, ou à leur réunion. Or, cela peut avoir lieu d'une infinité de manières, et même avec des discontinuités dans le développement du magnétisme sur les divers points de la longueur d'une barre; en sorte que sous ce point de vue général la question est absolument indéterminée.

Cependant il existe un cas qui mérite d'être considéré en particulier, parce qu'il offre la limite de tous les cas possibles, et qu'il est aussi le plus utile de tous. C'est celui où la quantité de magnétisme libre est telle que la somme de toutes les forces attractives et répulsives qui en résultent pour chaque point de la lame égale précisément la résistance que la force coërcitive oppose à la réunion des magnétismes naturels. Lorsqu'une lame est dans cet état, il est évident qu'elle a en chacun de ses points la plus grande quantité de magnétisme libre qu'elle puisse admettre; aussi dit-on qu'elle est *aimantée à saturation.*

Le moyen le plus simple et le plus sûr pour y parvenir, c'est de soumettre la lame qu'on veut aimanter à des influences tellement énergiques, qu'il s'opère momentanément dans ses particules une décomposition des magnétismes naturels plus grande que celle qui peut y subsister, d'après la seule résistance de la force coërcitive; car alors en la soustrayant à ces influences, la première limite qui s'offrira à la recomposition des magnétismes décomposés sera celle qui constitue l'aimantation à saturation.

Nous chercherons bientôt à réaliser cette idée par l'expérience; mais auparavant il nous faut démontrer les lois précises suivant lesquelles l'aimant terrestre agit sur les barreaux aimantés, librement suspendus; car cette action pouvant s'exercer à la fois sans diminution sensible sur tous ceux qu'on lui présente, elle nous offrira un excellent moyen pour apprécier l'intensité du magnétisme que nous y aurons développé.

CHAPITRE III.

Détermination et mesure des forces directrices exercées par le globe terrestre sur les aiguilles aimantées.

Lorsqu'une aiguille aimantée, librement suspendue par son centre, est successivement transportée en différens lieux peu éloignés les uns des autres, comparativement aux dimensions du globe terrestre, les directions qu'elle prend en vertu de l'action magnétique de ce globe, sont sensiblement parallèles, et ce n'est qu'en s'éloignant à de grandes distances, à plusieurs lieues, par exemple, qu'on commence à pouvoir y découvrir quelque légère déviation. Il en est de même lorsqu'on s'élève au-dessus de la surface de la terre, ou lorsqu'on descend dans des cavités profondes, pourvu toutefois que l'on écarte les corps ferrugineux qui pourraient agir immédiatement sur l'aiguille et la détourner. Ce phénoméne, qui a lieu également pour les plus petites aiguilles et pour les plus grandes, prouve que la force magnétique du globe terrestre peut, comme celle de la pesanteur, être censée agir suivant des directions parallèles, quand on la compare à elle-même dans des lieux peu éloignés. Ainsi toutes les considérations de mécanique par lesquelles on calcule l'équilibre des corps pesans, peuvent s'appliquer également aux corps magnétiques ; il faut seulement faire attention qu'ils sont pesans et magnétiques à la fois. Examinons les conséquences qui résultent de ce principe.

Soit ab, fig. 7, une aiguille aimantée de figure quelconque suspendue librement par son centre de gravité c, et dirigée arbitrairement dans l'espace. Désignons par μ la quantité de magnétisme austral qui se trouve libre en un quelconque M de ses points ; μ sera attiré par les forces boréales de la terre, et repoussé par les forces australes. Supposons que la résultante

des premières soit dirigée suivant MB, celle des dernières suivant MA. Enfin nommons B et A les intensités de chaque résultante, lorsqu'elles agissent sur une quantité de magnétisme austral égale à l'unité. Alors le point M éprouvera l'action $B\mu$ suivant MB, l'action $A\mu$ suivant MA; et tous les autres points de l'aiguille seront de même sollicités suivant des directions parallèles aux précédentes, par les forces B, A, appliquées aux quantités de magnétisme libre australes ou boréales qui s'y trouveront développées.

Pour calculer les efforts simultanés de ces forces, commençons par les composer à chaque point M en une résultante unique. A cet effet, prenons sur leurs directions respectives les droites MA, MB, proportionnelles à A et à B; puis, dans le plan AMB, achevons le parallélogramme construit sur ces droites, et la diagonale MR sera précisément la résultante cherchée, que nous désignerons par g'. La même construction, appliquée à tous les autres points de l'aiguille, donnera autant de forces g' parallèles et égales à la précédente; lesquelles produiront sur chaque point l'action $\mu g'$, dépendante, quant à son intensité et à son signe, de la quantité de magnétisme austral qui s'y trouvera développée.

Si, par le centre de suspension de l'aiguille, on mène un plan vertical parallèle à la direction des forces g', et qu'on place l'aiguille immobile dans ce plan, il est évident que les forces g' ne tendront nullement à l'en faire sortir, puisqu'elles s'y trouvent comprises elles-mêmes. Ce plan vertical sera donc celui que nous avons nommé le *méridien magnétique.*

En général, dans quelque situation que l'aiguille se trouve placée, puisque toutes les forces $g'\mu$ sont parallèles; elles devront avoir une résultante unique égale à leur somme, et qui exprimera par conséquent leur action totale pour mettre l'aiguille en mouvement dans l'espace. Il faut donc, pour l'obtenir, multiplier chaque force particulière $g'\mu$ par l'élément de masse dm, dans l'étendue duquel μ peut être censé constant, et faire ensuite la somme de tous les produits $g'\mu dm$ dans toute la longueur de l'aiguille. Il est clair que dans cette

sommation, g' doit être traitée comme constante, puisque sa valeur est la même pour tous les points de l'aiguille. On pourra donc la mettre en facteur commun, et ne regarder comme variables que les produits $\mu\, dm$, qui doivent en effet changer d'un point à un autre, suivant la quantité et la nature du magnétisme μ. On aura ainsi, en désignant la sommation par le signe S,

$$S g' \mu\, dm = g' S \mu\, dm.$$

Le facteur $S\mu\, dm$ exprime la somme totale des quantités australes et boréales de magnétisme libre qui existent dans toute l'étendue de l'aiguille, en regardant les premières comme positives, et les dernières comme négatives. Or, nous avons reconnu que l'aimantation consiste simplement dans une séparation des magnétismes naturels, sans aucune transmission quelconque; les quantités des deux magnétismes qui entrent dans le facteur $S\mu\, dm$, doivent donc y être exactement égales, ce qui rend ce facteur nul, ainsi que la résultante $g' S\mu\, dm$. De là nous tirerons cette conséquence importante : *De quelque manière qu'une aiguille soit aimantée, de quelque façon que le magnétisme libre s'y trouve réparti, les forces boréales et australes du magnétisme terrestre ne peuvent donner à cette aiguille aucun mouvement de translation dans l'espace.*

On peut aisément vérifier ces résultats par l'expérience. Si l'on pèse une aiguille avant et après l'aimantation, on lui trouve toujours le même poids. Ainsi la somme des forces verticales produites par le magnétisme terrestre est nulle. Pour prouver de même la destruction des forces horizontales, suspendez horizontalement à un assemblage de fils de cocon C S, fig. 8, une bande de carton E O. A l'extrémité de cette bande, perpendiculairement à sa longueur, placez une aiguille aimantée $a\, b$, que vous équilibrerez de l'autre côté avec un petit poids. Cette aiguille abandonnée ainsi à elle-même se dirigera et se fixera encore dans le méridien magnétique aussi exactement que si elle était suspendue immédiatement par son centre. Par conséquent aucune force ne la tire dans le sens de sa longueur, quand elle est ainsi dirigée; car une pareille force ferait tourner le bras de levier E C autour du centre C.

Ayant ainsi reconnu que les forces australes et boréales du globe terrestre ne peuvent imprimer aucun mouvement de translation à l'aiguille, examinons l'influence qu'elles peuvent avoir pour la faire tourner autour de son centre de gravité; mais afin de ne pas tomber dans des calculs trop compliqués, bornons-nous à considérer le cas où l'aiguille est assez longue et assez mince pour qu'on puisse dans le calcul la traiter comme une simple ligne droite, et plaçons-là d'abord dans le plan vertical du méridien magnétique, où l'action des forces, tant australes que boréales, suffit ensuite pour la fixer.

Soit donc, fig. 9, ZCM ce plan, et ab l'aiguille formant un angle quelconque aCZ avec la verticale CZ. Nous avons vu que sur chacun de ses points, tel que M, les forces magnétiques du globe se composent en une seule résultante MR ou g', dont la direction, toujours comprise dans le plan du méridien magnétique, forme avec la verticale MZ′ un angle constant RMZ′, que nous désignerons par i. Pour avoir la portion de cette résultante qui tend à faire tourner l'aiguille, il faut la décomposer perpendiculairement à la direction du bras de levier CM. Menons donc MP perpendiculaire à CM, et g' cos PMR sera la composante cherchée. Or, si nous nommons z l'angle variable ZCM formé par la verticale, avec la branche nord de l'aiguille, il est clair que l'angle PMZ′ sera $90 - z$; par conséquent, l'angle total PMR sera $90 - z + i$; et son cosinus sera égal à $\sin(z - i)$; de sorte que l'expression de la force perpendiculaire deviendra $g' \sin(z - i)$; et si le point M possède la quantité μ de magnétisme austral, son action sur lui sera $\mu g' \sin(z - i)$. Comme cette action s'exerce à l'extrémité du bras de levier CM que nous nommerons r, il faudra la multiplier par r pour avoir son moment statique autour du centre de suspension C, et ainsi l'expression de ce moment sera

$$\mu r g' \sin(z - i).$$

Il est facile de voir que $z - i$ n'est autre chose que l'angle RMa formé par la résultante g' avec la direction de l'aiguille. La force qui tend à faire tourner le point M est donc égale au produit de g' par le sinus de cet angle. C'est ainsi que, lors-

qu'un pendule rectiligne est écarté de la verticale d'un angle α, chacun de ses points y est ramené par la gravité g avec une force $g \sin \alpha$, dont le moment statique est $gr \sin \alpha$.

Cette expression n'est encore relative qu'à un seul point M. Pour l'étendre à toute l'aiguille, il faut d'abord la multiplier par l'élément de masse dm, dans l'étendue duquel μ peut être censé constant, et faire ensuite la somme de tous ces produits relativement à chaque bras Ca ou Cb; la somme des momens qui sollicite chacun de ces bras sera donc représentée par

$S \mu r g' \sin(z-i) dm$, ou simplement $g' \sin(z-i) S \mu r dm$;

car les quantités g', i et z étant communes à tous les points de l'aiguille, le produit $g' \sin(z-i)$ devient un facteur commun. Cette somme devra être effectuée séparément pour chaque moitié de l'aiguille; il faudra ensuite les réunir, en regardant comme conspirantes les forces qui tendront à faire tourner les deux moitiés dans le même sens, et comme contraires celles qui tendent à les faire tourner dans des sens opposés.

Supposons, par exemple, que le magnétisme libre soit de même nature sur toute la longueur de chaque branche, austral sur Ca, boréal sur Cb. Alors pour toute la portion Ca, μ sera positif, ainsi que la somme totale $S \mu r dm$; ce sera le contraire sur l'autre partie Cb; μ et $S \mu r dm$ y seront négatifs, c'est-à-dire que la première moitié de l'aiguille sera attirée en bas, tandis que la seconde sera repoussée en haut; ainsi les forces qui les sollicitent s'ajouteront pour la rotation. Nommant donc s' s'' les deux sommes qui leur sont relatives, l'une et l'autre étant prises positivement, le moment total qui sollicite l'aiguille sera

$$g'(s'+s'') \sin(z-i).$$

Cette expression ne devient nulle que dans le cas où $z=i$, c'est-à-dire lorsque la direction de l'aiguille coïncide avec la résultante des forces magnétiques de la terre. Ainsi, tant que l'aiguille ne sera pas arrivée à cette position, elle sera sollicitée à s'en rapprocher, comme on voit un pendule écarté de la verticale faire effort pour y revenir, en vertu de son poids; et de même que le pendule écarté de cette position d'équilibre n'y revient que par une suite d'oscillations, de même aussi l'aiguille,

abandonnée librement dans le méridien magnétique, oscillera de part et d'autre de son inclinaison fixe i, jusqu'à ce que son mouvement soit détruit par la résistance de l'air et l'inertie de la suspension.

Ces résultats ne sont pas particuliers à la distribution régulière de magnétisme que nous venons de considérer. Quelle que soit cette distribution, pourvu que les deux sommes s' s'' ne soient pas l'une et l'autre séparément et identiquement nulles, il existera une force de rotation qui tendra à ramener l'aiguille à l'inclinaison fixe i. Mais cette force dépendant des valeurs du produit $S\mu r dm$ évalué séparément pour chaque moitié de l'aiguille, elle sera plus ou moins énergique, selon la distribution du magnétisme libre, et conséquemment elle sera plus ou moins capable de vaincre les frottemens de la suspension. Aussi observe-t-on qu'abstraction faite de cet obstacle, toutes les aiguilles, de quelque manière qu'elles soient aimantées, étant suspendues exactement par leur centre de gravité, prennent toujours la même inclinaison dans le méridien magnétique, quoiqu'elles tendent à y revenir avec des forces inégales, quand elles en sont écartées. C'est ainsi que des verges pesantes reviennent toutes également à la verticale, quand elles sont suspendues par un de leurs points, quelles que soient les différences et les irrégularités de leur densité.

En général, le parallélisme de direction des forces magnétiques terrestres qui sollicitent les divers points d'une aiguille aimantée permet d'appliquer à tous ces phénomènes les considérations usitées dans la théorie de la pesanteur. Les divers produits $g'\mu$, relatifs à chaque point de l'aiguille, représentent des pesanteurs d'intensité différentes, mais dont les directions sont parallèles; la différente nature du magnétisme répond à des pesanteurs de direction contraire, et la somme $g' S\mu dm$, étendue à toute la longueur de l'aiguille, est analogue au poids total de la verge. Par conséquent, sur chaque partie de l'aiguille où règne une même espèce de magnétisme, il existe un centre de forces magnétiques où l'on peut supposer appliquée toute la force magnétique de la terre; de même que dans

les corps pesans il y a un centre de gravité où l'on peut supposer réunis tous les efforts de la pesanteur ; car cette propriété ne suppose nullement la constance de la force, mais seulement le parallélisme de sa direction ; et le lieu de ces centres pourra se calculer de la même manière que dans les corps pesans ; c'est-à-dire que, pour chacune de ces parties de l'aiguille, leur distance au centre de suspension est égale à la somme des momens divisée par la somme des poids ; en sorte qu'en la nommant L, on a

$$L = \frac{S \mu r dm}{S \mu dm}.$$

Ici la somme $S \mu dm$ n'est pas nulle, parce qu'elle ne s'étend qu'à une partie de l'aiguille, où règne un magnétisme de même nature, et la somme des momens $S \mu r dm$ ne doit non plus être étendue qu'à cette partie. Si on étend ces sommes à toute une moitié de l'aiguille, en changeant le signe de μ quand la nature du magnétisme change, alors L sera la longueur du bras de levier de la force magnétique qui tend à faire tourner cette moitié. Enfin l'effort total avec lequel chaque moitié de l'aiguille tend à tourner autour de la suspension est encore exprimé, comme dans les verges pesantes, par le poids magnétique total de cette moitié $g' S \mu dm$, décomposé perpendiculairement au bras de levier L, et multiplié par la longueur de ce bras de levier. Son expression pour chaque moitié est donc

$g' L \sin(z-i) S \mu dm$, ou simplement $g' \sin(z-i) S \mu r dm$, en mettant pour L sa valeur. Aussi est-ce là ce que nous avons trouvé plus haut pour la somme des momens des forces magnétiques dans chaque moitié de l'aiguille.

D'après cela, les intensités des forces magnétiques, exercées par le globe terrestre sur une aiguille donnée, pourront se mesurer comme celles de la pesanteur sur un pendule composé, d'après la durée des oscillations très-petites faites autour de la direction de la résultante MR ; et si cette durée n'est pas la même dans tous les lieux du globe, on devra en conclure que les intensités varient proportionnellement au carré du nombre d'oscillations faites par l'aiguille dans un temps donné. C'est

précisément ainsi que l'on détermine les variations de la pesanteur, en transportant un même pendule composé dans les différentes régions de la terre.

On peut également appliquer aux durées de ces oscillations les formules que l'on emploierait pour une verge droite dont les divers élémens matériels dm seraient sollicités par des pesanteurs d'intensités inégales, et qui serait suspendue par un de ses points. Soit $g'\mu$ l'intensité variable de la résultante magnétique qui agit sur tous les points de chaque élément dm, et désignons toujours par s' s'' les sommes des momens $S\mu r dm$, prises positivement pour chaque moitié de la verge; en sorte que $g'(s'+s'')$ soit le moment total des forces qui la sollicitent dans un même sens. Cela posé, si on la fait osciller librement dans le méridien magnétique autour de la direction de la force g', le temps d'une de ses oscillations infiniment petites sera exprimé par la formule

$$T^2 = \frac{\pi^2 S r^2 dm}{g'(s'+s'')}.$$

La sommation des quantités $r^2 dm$ doit être effectuée dans toute l'étendue de l'aiguille. Nous avons supposé celle-ci assez mince pour que le bras de levier r pût être censé commun à tous les points d'une de ses sections transversales. Désignant donc par h la superficie d'une de ces sections, l'élément dm de la masse pourra être exprimé par hdr, et la quantité Sr^2dm deviendra Shr^2dr. Supposons maintenant h constante dans toute l'étendue de l'aiguille, ce qui est le cas le plus ordinaire, Shr^2dr se changera en hSr^2dr, et toute sommation faite se réduira à $\frac{2hl^3}{3}$, l étant la demi-longueur de l'aiguille, on aura donc

$$T^2 = \frac{2\pi^2 h l^3}{3g'(s'+s'')}.$$

La surface h serait difficile à mesurer directement avec exactitude, mais on peut l'éliminer du résultat. Car en nommant P le poids de l'aiguille, et g la pesanteur terrestre, on a

$$P = 2ghl, \qquad \text{d'où} \qquad h = \frac{P}{2gl}.$$

Substituant donc pour h cette valeur, il reste

$$T^2 = \frac{\pi^2 P l^2}{3gg'(s' + s'')}.$$

Si l'on avait observé T, et que l'on voulût en déduire le moment total des forces qui sollicitent l'aiguille, rien ne serait plus facile, car ce moment est égal à $g'(s' + s'')$; on aura donc, en dégageant cette quantité,

$$g'(s' + s'') = \frac{\pi^2 P l^2}{3g T^2}.$$

Ces formules nous seront fréquemment utiles.

Déjà nous pouvons en tirer parti pour comparer les intensités des forces magnétiques en différens lieux de la terre, d'après les durées des oscillations qu'y fait une même aiguille aimantée. Car si cette aiguille ne perd rien de son magnétisme, ou si elle est toujours aimantée de la même manière, comme on peut y parvenir par des procédés que nous ferons bientôt connaître, les quantités s' s'' seront toujours les mêmes, ainsi que le rapport $\frac{P}{g}$, puisque les poids des corps varient proportionnellement à la pesanteur. La seule quantité g' changera, parce qu'elle dépend de l'intensité des forces magnétiques terrestres. Mais on pourra conclure ses variations de celle de T; car en nommant g_1, g_2 ses valeurs pour deux points de la terre, où les temps des oscillations sont T_1 et T_2, on aura, d'après l'équation précédente,

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{T_2^2}{T_1^2}.$$

c'est-à-dire que les intensités sont réciproques aux carrés des temps des oscillations. Nous appliquerons plus loin ce résultat à des observations d'intensité faites en différens lieux de la terre.

Dans tous les calculs qui précèdent, nous avons supposé l'aiguille exactement suspendue par son centre de gravité. Cela nous dispensait d'avoir égard à l'action de la pesanteur terrestre, qui, en effet, n'a alors aucune influence pour la faire tourner. Mais, dans la pratique expérimentale, il est bien diffi-

cile, pour ne pas dire presque impossible, que cette condition soit remplie à la rigueur; et si elle ne l'est pas, il en résulte un inconvénient considérable. Car une des moitiés de l'aiguille, ayant alors plus de tendance que l'autre à tomber vers la terre, s'abaisse plus qu'elle ne le ferait par la seule action du magnétisme terrestre, ce qui, selon l'espèce de magnétisme que cette moitié possède, augmente ou diminue l'inclinaison véritable, et altère aussi les observations d'intensité, parce que les oscillations ne s'exécutent plus autour de la résultante MR des seules forces magnétiques. Mais cette alternative même nous indique un moyen de corriger le défaut de centrage qui en est la cause, du moins lorsqu'on sait qu'il est fort petit. Il suffit pour cela d'aimanter successivement l'aiguille en deux sens opposés, et d'observer à chaque fois l'inclinaison et l'intensité qu'elle indique. Après chacune de ces opérations, s'il y a quelque petit défaut de centrage, l'un des résultats sera trop fort, l'autre trop faible, et la moyenne donnera, à fort peu de chose près, les véritables valeurs, du moins si les deux branches de l'aiguille sont bien symétriques, et que la distribution du magnétisme y soit la même dans les deux opérations.

Ces observations exigent que l'on détermine préalablement la direction du méridien magnétique dans lequel l'aiguille doit être placée; c'est à quoi l'on peut parvenir, soit d'après l'observation d'une aiguille horizontale, soit par d'autres procédés que nous découvrirons bientôt.

Jusqu'ici nous avons supposé l'aiguille dans le méridien magnétique; concevons maintenant qu'elle en ait été écartée, et calculons les forces qui tendent à l'y ramener.

Soit donc, fig. 10, SCZ le plan vertical dans lequel on la place, et ab sa direction dans ce plan; désignons toujours par MR la grandeur et la direction de la résultante des forces terrestres qui sollicitent chaque point M parallèlement au plan vertical ZCN du méridien magnétique. C'est cette résultante que nous avons nommée g'. Nous commencerons par la décomposer en deux autres forces, l'une verticale MZ' ou RH que nous nommerons Z; l'autre horizontale MH, parallèle à la trace horizon-

tale CN du méridien magnétique, et que nous nommerons H. Alors, en appelant, comme tout-à-l'heure, i l'angle RMZ′ ou HRM formé par la résultante MR avec la verticale, nous aurons $Z = g' \cos i \qquad H = g' \sin i.$

La force Z, étant verticale, est contenue toute entière dans le plan vertical SCZ où l'aiguille se trouve placée. Mais la force H ou HM est hors de ce plan. Décomposons-la en deux autres, l'une HP ou Y, dirigée perpendiculairement au plan vertical SCZ; l'autre MP ou X, dirigée horizontalement dans ce plan. Pour cela, il faudra connaître l'angle HMP ou NCS, formé par le méridien magnétique avec le vertical de l'aiguille; nous nommerons cet angle a; on aura alors

$$Y = H \sin a \qquad X = H \cos a,$$

ou, en mettant pour H sa valeur, et réunissant à ces résultats la valeur précédente de Z,

$$Z = g' \cos i \qquad Y = g' \sin i \sin a \qquad X = g' \sin i \cos a.$$

Lorsque l'aiguille est retenue fixement dans son azimuth, comme cela a lieu dans les boussoles d'inclinaison dont on fait ordinairement usage, la force Y est détruite par la résistance de la suspension. Alors les forces Z et X sont les seules dont l'effort s'exerce. Soit R la grandeur de leur résultante, i' l'angle qu'elle forme avec la verticale, on aura

$$R^2 = X^2 + Z^2 \qquad \tang i' = \frac{X}{Z},$$

ou, en mettant pour X et Z leurs valeurs,

$$R = g' \cos i \sqrt{1 + \tang^2 i \cos^2 a} \qquad \tang i' = \tang i \cos a.$$

De là résultent plusieurs conséquences importantes.

La première, c'est que l'intensité de la force R qui sollicite chaque point de l'aiguille diminue à mesure que l'angle a augmente, c'est-à-dire à mesure qu'on l'écarte du méridien magnétique; car, a augmentant, $\cos a$ diminue. Sa plus grande valeur a lieu dans le méridien magnétique même; alors a est nul; ce qui donne $\cos a = 1$, et par suite

$$R = g' \cos i \sqrt{1 + \tang^2 i}; \quad \text{et en réduisant,} \quad R = g',$$

R est alors égal à la résultante totale g'. Au contraire, la plus petite valeur de R a lieu lorsque $a = 90°$; ce qui donne $\cos a = 0$, et par suite $R = g' \cos i$.

La direction de la résultante R, et par conséquent l'inclinaison de l'aiguille qu'elle détermine, varie en même temps que ces valeurs de la force. Car d'abord, dans le méridien magnétique où a est nul, on a $\tang i' = \tang i$; par conséquent $i' = i$, ce qui devait être ; mais à mesure que a augmente, $\cos a$ devenant moindre, $\tang i'$ diminue. Ainsi à mesure que l'on éloigne l'aiguille du méridien magnétique, sa direction se rapproche de la verticale. Enfin, lorsqu'on la place dans un plan perpendiculaire au méridien magnétique, $\cos a$ devenant tout-à-fait nul, $\tang i$ devient aussi nul, et l'aiguille coïncide avec la verticale même. Tous ces résultats sont exactement confirmés par l'expérience, et le dernier donne un moyen très-exact pour déterminer la direction du méridien magnétique ; car lorsqu'on a trouvé la direction d'azimuth, où l'aiguille devient exactement verticale, il n'y a qu'à s'en éloigner de 90° pour retrouver le méridien.

L'expression de $\tang i'$ permet même de déterminer l'inclinaison méridienne i, indépendamment de cette observation préalable. Il suffit pour cela d'observer i' dans deux azimuths quelconques, différens entre eux d'un angle droit ; car en désignant les inclinaisons observées par i' i'', leurs azimuths seront a et $a \pm 90°$. On aura donc

$$\tang i' = \tang i \cos a \qquad \tang i'' = \tang i \sin a \,;$$

élevant ces équations au carré et les ajoutant, il vient

$$\tang^2 i = \tang^2 i' + \tang^2 i'' \,;$$

c'est-à-dire que le carré de la tangente de l'inclinaison dans le méridien magnétique est égal à la somme des carrés des tangentes des inclinaisons observées dans deux plans quelconques rectangulaires. En multipliant ces observations dans différens plans, et prenant une moyenne entre elles, on aura une grande probabilité d'affaiblir les erreurs des observations partielles.

Tout ce que nous avons dit plus haut sur les oscillations produites par la résultante totale g' dans le méridien magnétique

s'applique exactement aux oscillations produites par la résultante R dans le plan où nous supposons maintenant que l'aiguille est forcément dirigée. Les phénomènes ne différeront que par la valeur de la force qui se trouvera changée en $g' \cos i \sqrt{1 + \tang^2 i \cos^2 a}$; de sorte qu'en représentant par m le facteur $\cos i \sqrt{1 + \tang^2 i \cos^2 a}$, qui reste le même dans toutes les oscillations faites par l'aiguille dans un même azimut, on aura le temps T′ des oscillations par la formule

$$T'^2 = \frac{\pi^2 P l^2}{3 g g' m (s' + s'')},$$

s' et s'' étant les mêmes que dans le méridien magnétique. Or, nous avons eu dans ce méridien

$$T^2 = \frac{\pi^2 P l^2}{3 g g' (s' + s'')};$$

on aura donc, en divisant cette seconde équation membre à membre par la première,

$$m = \frac{T^2}{T'^2}, \quad \text{ou} \quad \cos i \sqrt{1 + \tang^2 i \cos^2 a} = \frac{T^2}{T'^2};$$

ce qui permet de déterminer le facteur m, d'après les durées des oscillations observées dans les deux plans dont les azimuts sont o et a.

Par exemple, si la seconde observation est faite dans le plan perpendiculaire au méridien magnétique, $\cos a$ sera nul, et il viendra

$$\cos i = \frac{T^2}{T'^2};$$

ce qui fournit un nouveau moyen de déterminer l'inclinaison méridienne i d'après la durée des oscillations.

Pour déterminer cette durée avec exactitude, on compte les nombres d'oscillations que l'aiguille exécute dans chaque plan pendant un temps donné; par exemple, en 10′. Soient N, N′ ces nombres; en prenant la seconde pour unité de temps, on aura

$$T = \frac{600}{N} \quad T' = \frac{600}{N'}, \quad \text{et par suite} \quad \cos i = \frac{N'^2}{N^2}.$$

J'appliquerai ces formules à diverses observations de M. de

Humboldt. Les premières que je citerai furent faites près de Quito, sous l'équateur terrestre, latitude 0° 0′ 0″, longitude 81° 2′ occid. Les oscillations de la boussole d'inclinaison, pendant dix minutes de temps, furent observées dans le plan du méridien magnétique et dans le plan rectangulaire. Elles donnèrent $N = 220 \quad N' = 109.$

Ces nombres étant substitués dans notre formule, on trouve

$$i = 75^\circ\ 47'\ 25''$$

L'observation directe de i, faite dans le plan du méridien magnétique, a donné $i = 75^\circ\ 34'\ 55''$

M. de Humboldt répéta les mêmes observations à Mexico, latitude 19° 25′ 45″ bor. longit. 101° 25′ 30″ occid. Il trouva

$N = 242 \quad N' = 205$; d'où l'on tire $i = 44^\circ\ 8'\ 40''$.

L'observation directe de i, faite dans le plan du méridien magnétique, a donné $i = 47^\circ\ 50'\ 46''$

On voit que les inclinaisons déduites des oscillations diffèrent peu de celles qui résultent de l'observation directe. La différence peut tenir à quelque petite imperfection dans l'équilibre de l'aiguille, ou à l'inertie de la suspension, ou enfin aux erreurs inévitables de ce genre d'expériences.

Considérons maintenant la force Y qui agit perpendiculairement au plan vertical où l'aiguille se trouve, et tend à la ramener au méridien magnétique. Pour le faire plus simplement, supposons que l'on rende l'aiguille horizontale par l'addition d'un petit contre-poids; ce qui détruira l'effet des forces verticales Z sur la rotation. Les forces horizontales X, étant alors dirigées suivant la longueur de l'aiguille, n'auront aucune influence pour la faire changer d'azimut, et la force directrice sera exprimée toute entière par Y. Pour avoir l'effort total qu'elle exerce sur l'aiguille, il faut d'abord la multiplier par la quantité μ de magnétisme que possède le point auquel elle s'applique, puis par l'élément de masse dm, pour l'étendue duquel μ peut être censé constant, et enfin par le bras de levier r au bout duquel elle agit perpendiculairement; ce qui donnera le moment élémentaire $rY\mu\, dm$, ou $g' \sin i \sin a \mu\, r\, dm$. Puis faisant la somme de tous ces momens, qui sera $g' \sin i \sin a\, S \mu\, r\, dm$,

on la prendra séparément pour chaque moitié de l'aiguille; après quoi ajoutant les forces qui conspirent à faire tourner l'aiguille dans un même sens, on aura $g'(s'+s'') \sin i \sin a$ pour l'expression du moment total qui agit sur elle. D'où l'on voit qu'en variant l'azimuth a, ce moment doit varier aussi proportionnellement à $\sin a$, c'est-à-dire proportionnellement au sinus de l'angle dont l'aiguille est écartée du méridien magnétique; car les quantités g', s', s'', i, restent les mêmes pendant le mouvement.

Coulomb a vérifié ce résultat au moyen de la balance de torsion. Pour le faire d'une manière commode, il adapte au bas du fil de suspension un petit étrier EE, fig. 11, formé par une lame de cuivre très-légère. Cet étrier sert pour placer l'aiguille. De plus, afin de pouvoir toujours la remettre dans la même position, la surface EE de la plaque qui la porte est revêtue en dedans d'une couche de cire d'Espagne que l'on fait ramollir, et sur laquelle on prend l'empreinte de l'aiguille. Avant d'employer cet appareil, on y place une aiguille de cuivre ou de tout autre métal non magnétique, et l'on tourne le micromètre jusqu'à ce que dans le lieu de repos du fil elle se dirige naturellement vers le zéro de la division latérale. Cette condition remplie, on tourne tout l'appareil, c'est-à-dire la suspension et sa cage, jusqu'à ce que le zéro et l'aiguille de cuivre se trouvent exactement sur la direction du méridien magnétique préalablement déterminé. Après quoi on substitue l'aiguille aimantée à la place de l'autre, et en tordant le fil de suspension de divers angles connus, on voit combien elle s'écarte de son méridien. Cela ne se fait pas sans beaucoup d'oscillations, qui durent d'autant plus long-temps que les aiguilles dont on se sert ont une masse considérable, comparativement à celle de l'air. Pour les arrêter plus vite, on attache sous l'étrier, avec une mince tige de cuivre, une plaque verticale V V, également de cuivre et très-mince, qui plonge toute entière dans un vase plein d'eau. La résistance de ce liquide amortit promptement les oscillations, sans empêcher cependant l'aiguille de parvenir au degré d'écartement que la torsion du fil exige. Mais il faut avoir bien attention que le volant VV soit entièrement plongé,

afin d'éviter les effets de la courbe aqueuse qui s'éleverait sur sa surface par la capillarité. Enfin, pour donner de l'exactitude aux résultats, il faut proportionner la grosseur et l'élasticité des fils de suspension à la force aimantaire des aiguilles, employant des fils plus gros pour des aiguilles plus fortes, et réservant les fils très-fins pour les cas où la force directrice est très-faible.

Voici maintenant les résultats observés par Coulomb sur une aiguille aimantée de 22 pouces de longueur, et de 1 ligne $\frac{1}{2}$ de diamètre. Le fil de suspension était de cuivre, de la dimension appelée n° 12 dans le commerce; les six pieds de longueur pèsent cinq grains.

TORSION donnée par le micromètre.	ANGLE de déviation où l'aiguille s'est arrêtée.	FORCE de torsion qui en résulte.
0°	0°	0°
1	10 $\frac{1}{2}$	349$\frac{1}{2}$
2	21 $\frac{1}{4}$	698$\frac{3}{4}$
3	33	1047
4	46	1394
5	63 $\frac{1}{2}$	1736$\frac{1}{2}$
5,5	85	1895

On voit que les premières forces de torsion sont proportionnelles aux écarts de l'aiguille. En effet, la force directrice totale étant proportionnelle au sinus de l'écart, il faut bien que dans les petits angles elle soit sensiblement proportionnelle à cet écart même. Pour vérifier sa valeur dans de plus grands angles, représentons-la en général par K sin a, K étant une constante commune à tous les azimuths; alors en nommant A la torsion qui fait équilibre à la force directrice dans l'azimuth a, nous aurons l'équation

$$A = K \sin a, \qquad \text{d'où} \qquad K = \frac{A}{\sin a}.$$

De sorte qu'une seule des observations précédentes suffira pour déterminer K; on voit que cette constante exprime la force de torsion nécessaire pour retenir l'aiguille à 90° du méridien magnétique. En employant successivement les observations de Coulomb, nous lui trouverons les valeurs suivantes :

Déviation observée.	Valeur de K calculée.
10°,5	1902 . 24
21,25	1940 . 37
33	1937 . 89
46	1922 . 30
63,5	1927 . 92
85	1917 . 85
Moyenne... K = 1927 . 76	

En divisant par cette constante les torsions observées, on aura les sinus des angles où l'aiguille a dû s'arrêter à chaque expérience, et on pourra les comparer à l'observation; c'est le but du tableau suivant :

Torsions observées.	Déviation		Excès du calcul.
	observée.	calculée.	
349°,5	10° 30′	10° 28′	— 0° 2′
698,75	21 15	21 17	+ 0 2
1047	33	32 57	— 0 3
1394	46	46 24	+ 0 24
1736,5	63 30	64 27	+ 0 57
1895	85	79 55	— 5° 5

La dernière différence est la seule qui mérite quelque considération ; elle tient probablement à une petite altération produite dans la réaction du fil par la grande torsion qu'il avait subie dans cette dernière expérience. L'accord parfait de toutes les autres confirme l'exactitude de la loi.

Maintenant, au lieu de retenir l'aiguille par la torsion dans un azimuth fixe, suspendons-la horizontalement à un assemblage de fils de cocon disposés parallèlement, afin que leur réaction de torsion soit insensible, et après l'avoir écartée tant soit peu du méridien magnétique, abandonnons-la aux forces horizontales qui agissent sur elle ; il est clair qu'elle se mettra à osciller de part et d'autre de ce plan. Dans ce cas, ainsi que dans le précédent, la force verticale Z étant détruite par le petit contre-poids, l'aiguille n'est plus sollicitée que par la résultante des forces horizontales X Y qui agissent sur elle. Or, en nommant cette résultante H, nous avons eu $H = g' \sin i$;
c'est-à-dire qu'elle est égale à la résultante totale g', décomposée horizontalement dans le méridien magnétique. D'ailleurs ces deux forces sollicitent l'aiguille de la même manière, quand on l'écarte de sa position d'équilibre. Les formules des oscillations qu'elles produisent seront donc aussi pareilles, en changeant seulement g' en $g' \sin i$; ainsi, en nommant T'' la durée des oscillations horizontales, on aura

$$T''^2 = \frac{\pi^2 P l^2}{3gg' \sin i (s' + s'')}.$$

Dans le méridien même nous avons trouvé

$$T^2 = \frac{\pi^2 P l^2}{3gg' (s' + s'')};$$

en divisant ces deux équations membre à membre, on trouve

$$\sin i = \frac{T^2}{T''^2},$$

ce qui fournit un nouveau moyen de déterminer l'inclinaison i.

Rien n'est plus facile que d'observer les oscillations horizontales ; il suffit, comme je l'ai dit, de placer l'aiguille dans un étrier fait d'une bande de papier suspendue à un assemblage de

fils de cocon dont la force de torsion soit insensible. L'observation des oscillations dans un plan vertical est beaucoup moins simple ; il faut un axe solide adapté au centre de l'aiguille, et autour duquel elle puisse osciller ; il faut des supports bien polis pour poser cet axe ; enfin il faut qu'il soit parfaitement horizontal. Tout cela peut faire désirer d'éviter ce genre d'observation. L'on y parvient en déterminant directement la valeur du facteur $g'(s'+s'')$, qui entre dans l'expression de T''. Il ne faut pour cela qu'observer le contre-poids p qui rend l'aiguille horizontale, étant placé à la distance ρ de son centre. En effet, le produit $p\rho$ exprime alors le moment statique de ce contre-poids, et celui des forces verticales se trouve exprimé par $SZ\mu r\,dm$; on aura donc

$$p\rho = SZ\mu r\,dm.$$

Z est égal à $g'\cos i$; ainsi $SZ\mu r\,dm$ calculé pour toute l'étendue de l'aiguille deviendra $g'\cos i\,(s'+s'')$, et par conséquent l'on aura

$$g'(s'+s'') = \frac{p\rho}{\cos i}.$$

Substituant cette valeur dans T''^2, on en tire

$$\tang i = \frac{\pi^2 P l^2}{3gp\rho T''^2}.$$

Comme ce moyen de déterminer l'inclinaison est le plus simple et le plus exact de tous, je rapporterai une expérience dans laquelle Coulomb l'a appliqué.

L'aiguille dont il se servit était une lame d'acier fondu pesant 88808 milligrammes, et ayant la forme d'un parallélipipède rectangle. Sa longueur était $426^{mm},6$; sa largeur 13^{mm} ; son épaisseur environ 2^{mm}. M. Fortin, qui l'avait exécutée, avait mis tous ses soins à rendre ces deux dernières dimensions parfaitement constantes dans toute son étendue.

Coulomb aimanta d'abord cette aiguille par un procédé que nous ferons plus loin connaître, et que l'on appelle la méthode de la double touche. Ensuite il la suspendit horizontalement à des fils de cocon dans une cage de verre, fig. 12, en la plaçant de champ, pour que son plan fût vertical. Les côtés de

la cage étaient assez élevés pour que les courans d'air de la chambre n'altérassent pas la durée des oscillations ; en observant avec soin cette aiguille, il trouva qu'elle faisait 50 oscillations en 495″ sexagésimales. Cela fait, il l'introduisit dans un anneau de cuivre, portant de chaque côté un couteau pareil aux couteaux de balance, et placé à peu près à la hauteur du centre de gravité de l'aiguille, fig. 13. Celle-ci n'entrait dans l'anneau qu'à frottement très-ferme ; il la poussa jusqu'à ce que son centre répondît à très-peu près au milieu de l'anneau, et la posant sur des supports horizontaux, il chercha à l'équilibrer. Il trouva qu'il fallait employer pour cela un poids de 200 milligrammes placé sur la branche *sud*, à $170^{mm},75$ du centre du couteau de suspension ; ce qui donne le produit 34150 pour le moment $p\varrho$ des forces verticales : peu importe dans quel azimuth l'aiguille était alors tournée, puisque la force verticale Z est la même dans tous les azimuths ; et en effet, quand une aiguille aimantée a été équilibrée dans un azimuth quelconque, elle reste horizontale dans tous les autres.

Sans sortir la lame de son anneau où elle était fixée par le frottement, Coulomb l'aimanta en sens contraire ; de sorte que son pôle nord devint son pôle sud, et réciproquement. Mais à cela près, la distribution du magnétisme libre était la même dans chaque branche ; car c'est là une des propriétés de la méthode de la double touche, comme nous le verrons bientôt. Cela fait, il l'équilibra de nouveau, et trouva cette fois qu'il fallait poser sur la branche sud un poids de 209 milligrammes, à une distance de 194 millimètres du tranchant du couteau ; ce qui donne le produit 40546, pour le moment statique des forces verticales.

La différence de ce nombre à celui que nous avions trouvé d'abord peut tenir à une distribution différente du magnétisme, ou à ce que le tranchant du couteau ne coïncidait pas exactement avec le centre de gravité de l'aiguille, ou enfin à ces deux causes à la fois. Pour le savoir, Coulomb sortit l'aiguille de l'anneau, et la fit de nouveau osciller horizontalement ; il trouva qu'elle faisait, comme la première fois, cinquante os-

cillations en 495″ sexagésimales. Toute la différence provenait donc du centrage. Ainsi, pour la faire entièrement disparaître, il suffisait de prendre une moyenne entre les nombres 34150 et 40546 ; ce qui donne 37348 pour la valeur exacte de $p\varrho$, telle qu'elle aurait été, si l'aiguille eût été suspendue exactement par son centre de gravité.

D'après cela, les données qu'il faut introduire dans notre formule sont

$$l = 213,3 \qquad T'' = \frac{495}{50} = 9'',9\,; \quad P = 88808\,; \quad p\varrho = 37348.$$

Et puisque nous employons le millimètre pour unité de longueur, il faut exprimer la pesanteur g de la même manière, c'est-à-dire prendre

$$g = 9808,8.$$

De plus, on sait que le nombre π est 3,14159. Avec ces données, on trouve

$$i = 69°\ 41'\ 18''.$$

Telle était donc l'inclinaison magnétique à Paris, dans le lieu et à l'époque où Coulomb a opéré. L'expérience ayant été faite dans une chambre, l'inclinaison peut avoir été un peu influencée par l'action des balcons et des barres de fer qui entrent toujours dans la construction des maisons; et ainsi elle peut être en erreur de quelques minutes. Mais cela n'ôte rien à la bonté de la méthode, qui est la plus exacte de toutes celles que l'on peut employer, comme on pourrait s'en assurer en discutant les diverses causes d'erreur dont elles sont susceptibles.

Nous avons vu qu'après avoir renversé les pôles de l'aiguille, la durée de ses oscillations a été la même. Cette identité ne peut s'obtenir qu'avec des aiguilles d'un acier très-pur, très-égal, et dont la forme est parfaitement symétrique. Il arrivera donc le plus souvent que l'on trouvera quelque différence entre les temps des oscillations ; mais comme, pour peu que l'aiguille ait été travaillée avec soin, cette différence doit être fort petite, on pourra la faire disparaître en prenant une moyenne arithmétique entre les deux résultats.

Dans tous les calculs qui précèdent, nous avons supposé

l'aiguille assez mince pour que l'on pût la considérer comme une simple ligne droite. Cela suffit, en effet, dans la plupart des observations. Mais il est cependant nécessaire de savoir déterminer et tracer la direction de la résultante des forces magnétiques sur la surface des lames aimantées. Car, comme c'est toujours de pareilles lames que l'on emploie, cette connaissance est indispensable pour pouvoir en conclure avec précision, soit la direction du méridien magnétique, soit celle de l'inclinaison.

Commençons par le premier cas, et supposons que ABCD, fig. 14, représente une lame aimantée, de figure quelconque, suspendue librement par un de ses points c, et équilibrée par un petit contre-poids de manière à demeurer horizontale. Les forces verticales étant ainsi détruites, tous les points de la lame sont tirés horizontalement par des forces australes et boréales parallèles à la direction du méridien magnétique ; et l'effet de toutes ces forces pour faire tourner la lame peut être représenté par l'action d'une seule force f, parallèle aux précédentes, et appliqué en un certain point G, placé à une certaine distance du centre de suspension. Or, de même qu'un pendule composé, suspendu par un de ses points, et abandonné à lui-même, se dispose de manière que son centre de gravité se trouve dans la verticale qui passe par le point de suspension, de même notre lame, abandonnée librement à l'action des forces magnétiques qui la sollicitent, se dirigera de manière que le point d'application G de leur résultante se trouve dans le plan du méridien magnétique, mené par le centre de suspension. Par conséquent, si l'on pouvait reconnaître la trace de la ligne Gc sur la surface de la lame, lorsqu'elle a pris la situation déterminée par la force directrice, ce serait aussi la véritable direction du méridien magnétique. Mais cette trace n'est qu'idéale ; tout ce qu'on sait, c'est que sa direction, relativement aux côtés de la lame, est invariable. Retournons donc celle-ci, et, après l'avoir retournée, suspendons-la de nouveau au même point c, au moyen d'un très-petit trou que nous y aurons pratiqué exprès ; alors la ligne cG reprenant de nouveau la même

direction dans le méridien magnétique, les côtés de la lame, qui ne font que tourner circulairement autour de cette ligne, s'en écarteront du côté opposé, comme le représente la figure ponctuée A′ B′ C′ D′; et, de plus, ils s'en écarteront autant que la première fois. Si donc on a remarqué et déterminé la direction d'un de ces côtés dans la première observation, et qu'on en fasse autant dans la seconde, la direction véritable du méridien magnétique sera exactement intermédiaire entre elles; on pourra ainsi l'observer et la tracer sur la lame, ou remarquer à quels points de l'espace elle répond par son prolongement.

Il faut faire une opération pareille sur les aiguilles d'inclinaison, pour déterminer la valeur véritable de l'inclinaison magnétique. Supposons qu'une pareille aiguille soit exactement suspendue par son centre de gravité, et qu'on ait observé le point du cercle vertical où elle s'arrête lorsqu'une de ses faces est tournée à l'est du méridien magnétique. La résultante des forces passera alors par le centre de suspension C, fig. 15, et par le point G de l'aiguille; mais la ligne idéale C G ne peut pas s'observer. Retournez donc l'instrument de manière que la face de l'aiguille, tout-à-l'heure tournée à l'est, le soit maintenant à l'ouest; la ligne CG se replacera invariablement dans la même position. Mais si elle n'est pas symétriquement dirigée par rapport aux côtés rectilignes de l'aiguille, ceux-ci répondront à des points différens de la division circulaire, et en prenant une moyenne entre leurs indications, on aura l'inclinaison véritable. Dans ce raisonnement, nous avons supposé que l'axe de suspension passait exactement par le centre de gravité de l'aiguille. Si cette condition n'était pas observée, l'inclinaison déterminée, comme nous venons de le dire, serait affectée de l'erreur provenante du défaut de centrage. Pour la corriger, il faudrait, comme nous l'avons expliqué plus haut, aimanter de nouveau, en sens contraire, avec une force égale; déterminer de nouveau l'inclinaison par le retournement dans ce nouvel état, et enfin prendre une moyenne entre les résultats ainsi observés.

Les artistes ont souvent coutume de construire les aiguilles

de boussole en forme de flèche, tant pour la déclinaison que pour l'inclinaison. Cela est en effet plus commode pour déterminer les points des divisions auxquels leurs extrémités répondent, et même cette forme a encore l'avantage de donner à poids égal une force directrice sensiblement plus considérable, comme on le verra plus loin. Mais cela n'empêche pas qu'il ne faille faire aussi pour ces aiguilles toutes les mêmes opérations de retournement que nous venons d'indiquer ; car il n'est jamais certain que le point d'application de la résultante magnétique se trouve sur l'axe de l'aiguille, c'est-à-dire sur la ligne qui va du centre de suspension aux extrémités de la flèche ; et il n'y a que les seules observations que nous venons de décrire qui puissent en déterminer la véritable direction.

Les considérations que nous venons d'exposer dans ce chapitre sont communes à toutes les aiguilles, et indépendantes de la manière dont le magnétisme libre y est distribué. Elles supposent seulement que l'état magnétique de chaque aiguille ne change pas dans les diverses situations où on la place. Maintenant, si nous comparons les actions qu'une même aiguille éprouve de la part de l'aimant terrestre, selon la manière dont on l'aimante, nous pourrons apprécier par-là le développement opéré dans les magnétismes naturels, et reconnaître les procédés les plus avantageux pour le déterminer. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

Sur les différentes manières d'aimanter.

De toutes les manières de communiquer le magnétisme, la plus simple est celle que nous avons exposée dans le chapitre premier. Elle consiste à approcher l'extrémité *b* d'un barreau d'acier ou de fer dur à quelque distance, ou même jusqu'au contact du pôle A austral ou boréal d'un aimant AB, fig. 16. Alors les magnétismes libres en A et B agissent l'un et l'autre sur les magnétismes naturels du barreau; mais A étant plus voisin, son action l'emporte : et la décomposition s'opère dans chaque particule métallique. Le magnétisme de nom contraire à A est attiré; celui de même nom est repoussé, et par suite de cette séparation, l'extrémité *b* du barreau acquiert un pôle de nature contraire à A.

Pour vous en assurer, formez avec un fil d'acier une petite aiguille $\alpha\beta$ qui n'ait que 5 ou 6 millimètres de longueur. Aimantez-la, en la frottant à plusieurs reprises sur le pôle A, toujours dans le même sens; puis suspendez-la par son milieu à un fil de soie d'un seul brin, et approchez-la du pôle A. Une de ses extrémités β, par exemple, sera attirée, et se dirigera vers ce pôle. Présentez maintenant cette même aiguille à l'extrémité *b* du barreau qui a été en contact avec A, vous la verrez aussitôt pirouetter sur elle-même. Son extrémité β, qui était attirée par A, sera repoussée par *b*, et, au contraire, α sera attirée.

Continuez à présenter ainsi cette aiguille aux divers points du barreau *ba*, en partant de l'extrémité *b*, vous trouverez que, sur une certaine longueur *bc*, le magnétisme est de même nature qu'en *b*; mais vous verrez ensuite succéder un magnétisme contraire; car l'aiguille tournera sur elle-même, et présentera son autre pointe au barreau. Si le barreau est court, et

si l'aimant est fort, ce nouvel état se soutiendra sans interruption jusqu'à l'extrémité *a;* alors le barreau aura, dans sa seconde partie *ac*, un magnétisme de même nature que A, et dans sa première partie *bc* un magnétisme contraire.

Lorsque le barreau est fort long, il arrive souvent que le second état ne s'étend point jusqu'à son extrémité, mais seulement jusqu'à une certaine distance *a'*, fig. 17. Alors succède un autre magnétisme qui est de nouveau contraire à A ; et à celui-ci, quelquefois, succède même un quatrième qui lui est de nouveau semblable, et ainsi de suite. Ce barreau possède alors autant de pôles différens dans sa longueur. L'aiguille d'épreuve indique ces alternatives par les inversions qu'elle éprouve chaque fois que la nature du magnétisme change ; et les points du barreau où cela arrive s'appellent des points *conséquens.*

Si l'on suspend un pareil barreau pour chercher à déterminer sa force directrice, il est clair que les parties situées du même côté du centre de suspension, qui auront des magnétismes de nature contraire, se contrarieront aussi dans leurs efforts, les unes tendant à ramener cette extrémité de barreau vers le pôle austral, les autres vers le pôle boréal. La force directrice totale du barreau sera donc beaucoup plus faible que si chacune de ces moitiés possédait dans toute sa longueur une seule espèce de magnétisme. C'est pourquoi il est de la plus grande importance d'éviter les points conséquens dans la formation des aiguilles de boussole ; et même, en général, il faut toujours chercher à s'en préserver ; car un barreau ne produit jamais tout l'effet que l'on en pourrait obtenir, si ces alternatives n'existaient pas. En effet, quel que soit le genre d'expériences auquel on l'emploie, les pôles de nom contraire agiront toujours en même temps, et leurs actions se contrarieront d'autant plus, qu'ils seront eux-mêmes plus rapprochés les uns des autres, parce que leurs distances aux points attirés ou repoussés seront alors moins différentes. L'aimantation la plus favorable sera donc celle où chaque espèce de magnétisme dominera seule dans une des moitiés du barreau ; et ainsi ce

mode de séparation, porté au plus haut degré d'énergie, doit être l'unique but de tous nos efforts.

Lorsqu'on aimante un barreau *ab*, comme nous le supposions tout-à-l'heure, en mettant une de ses extrémités *b* en contact avec l'un des pôles A d'un aimant, plus le métal de ce barreau est dur, soit par sa nature, soit par sa trempe, plus il acquiert aisément des points conséquens. La raison en est évidente : l'action de l'aimant A B décroissant avec la distance, il y a toujours un certain point du barreau où elle est seulement égale à la force coercitive. Ainsi tous les points situés au-delà de cette limite n'éprouveraient aucune décomposition dans leurs magnétismes naturels, s'ils étaient seulement soumis à l'influence de l'aimant A B. Mais la première partie du barreau *ab*, où il s'est déjà opéré un développement de magnétisme, agit aussi sur ces points; et elle tend à y produire un développement de magnétisme contraire. Comme la résultante de cette action part de plus près que celle de l'aimant AB, il doit y avoir un terme où elle l'emporte, et c'est alors que la première alternative doit se produire. Or cela doit arriver d'autant plus près du point *b*, que la force coercitive est plus considérable ; puisque, si elle était infinie, l'aimant A B ne pourrait évidemment développer de magnétisme que dans le seul point *b*, qui est en contact avec son pôle A. Le même raisonnement peut s'appliquer à la comparaison des actions exercées sur le reste du barreau par la première alternative *b a'*, et par la seconde. La prédominance de celle-ci sur les points suivans, en raison de sa proximité, deviendra d'autant plus sensible, que la force coercitive sera plus grande, et elle en aura d'autant plus de facilité pour y faire une troisième alternative. D'après cette manière d'envisager ce phénomène, l'énergie des pôles successifs doit aller en s'affaiblissant graduellement, à mesure qu'ils s'éloignent de la première extrémité *b*, où le développement du magnétisme est le plus énergique; et c'est aussi ce que l'on peut vérifier par l'expérience, en comparant les poids qui peuvent adhérer à ces différentes parties du barreau.

S'il pouvait encore rester quelque difficulté sur cette théorie, elle disparaîtrait toute entière par l'expérience suivante, dans

laquelle on voit les mêmes effets que nous venons de décrire exactement, produits par l'électricité.

Prenez un tube de verre poli de quelques pieds de longueur; suspendez-le à des cordons de soie, et touchez pendant quelques instans une de ses extrémités avec un tube de cire d'Espagne frotté. Si vous examinez ensuite l'état du tube de verre, vous trouverez que sur une certaine longueur, à partir de l'extrémité touchée, il a la même électricité que la cire d'Espagne. A cette partie succède une autre, où règne une électricité contraire, mais plus faible; au-delà, vous en trouverez une autre où règne de nouveau l'électricité de la cire plus faiblement encore, et ainsi de suite par des alternatives plus ou moins étendues, plus ou moins nombreuses, selon la force de l'électricité employée. Voilà précisément les points conséquens de l'aimant; la seule différence, c'est que l'électricité de la cire passe d'abord sur le verre, et s'y étend dans une certaine longueur, parce que ni l'un ni l'autre de ces corps ne résiste d'une manière invincible à la transmission directe de l'électricité : au lieu que les particules du fer sont rigoureusement imperméables à la transmission du magnétisme. C'est pourquoi, dans les barreaux aimantés, la première alternative acquiert toujours un magnétisme contraire à celui du pôle de l'aimant qu'elle a touché; au lieu que la première alternative d'électricité est de même nature sur le verre que sur la cire.

Généralement tous les phénomènes de composition et de décomposition que nous ont offerts les deux électricités, peuvent se reproduire par les deux magnétismes, avec les seules modifications qui résultent d'une imperméabilité absolue. Comme cette comparaison est très-propre à faire sentir la certitude de la théorie, j'en donnerai quelques exemples.

Placez un aimant AB dans une situation horizontale, fig. 18, et au-dessus de son pôle A suspendez verticalement à quelque distance un fil de fer mince et très-doux *a b*, qui ait trois ou quatre centimètres de longueur. Puis prenant un autre fil semblable *a′ b′*, et le tenant horizontalement, présentez son bout *b′*, d'abord à l'extrémité inférieure *b* du premier fil, il y aura répulsion; ensuite à l'extrémité supérieure *a*, il y aura attraction. La

raison en est simple : les magnétismes naturels du fil de fer doux *ab* sont instantanément décomposés par l'influence du pôle A, où dominera un des deux magnétismes. Ce fil acquiert ainsi deux pôles, l'un *b* contraire à A, l'autre *a* de même nature. Pareille chose arrive au second fil *a' b'*; alors, quand on approche *b'* de *b*, on présente l'un à l'autre deux magnétismes de même nom ; la répulsion doit donc s'ensuivre. Au contraire, quand on présente *b'* à *a*, les magnétismes sont différens, et il doit y avoir attraction. Voilà une représentation exacte des influences électriques ; mais avec cette différence qu'il ne se fait aucune transmission de magnétisme dans les différentes parties du fil *ab*, mais simplement une décomposition locale dans chaque particule ; décomposition en vertu de laquelle une des deux espèces de magnétisme devient libre en *b*, l'autre en *a*, tandis que le magnétisme contraire s'y trouve dissimulé.

Prenez maintenant deux lames d'acier AB, A'B', fig. 19, d'égale longueur et très-minces ; de celles qui servent, par exemple, pour faire des ressorts de montre ; aimantez-les toutes deux de la même manière, en les mettant en contact avec le même pôle d'un même aimant, ou en les frottant dans le même sens sur sa surface. Puis ayant éprouvé quel poids l'une d'entre elle AB peut soutenir par son pôle A, suspendez-y un fil de fer doux *ba* dont le poids soit cinquante ou cent fois moindre. Cela fait, approchez peu à peu la seconde lame A'B' de la première, comme si vous vouliez les superposer par les pôles de noms différens. Lorsque ces deux lames seront en contact, l'adhérence du fil *ba* sera entièrement ou presque entièrement détruite ; de façon que le système des deux aimans, ainsi superposés ne pourra soutenir qu'une infiniment petite partie du poids que chacun d'eux aurait soutenu séparément. Cette expérience est tout-à-fait analogue à celle que nous avons faite, page 289 du 4e livre, sur le contact de deux plaques de verre électrisées diversement ; et l'explication en est la même, en appliquant à chacun des magnétismes libres en A ou en B ce que nous disions de chacune des deux électricités.

J'ai supposé les deux lames très-minces, afin que leurs dis-

tances aux différens points du fil $a b$ fussent presque égales lorsqu'elles sont superposées. En effet, pour la seconde lame, cette distance est inévitablement plus forte de toute l'épaisseur de la première, et c'est pourquoi les actions de deux lames égales ainsi superposées ne peuvent pas rigoureusement s'entre-détruire. Mais s'il ne dépend pas de nous de détruire cette inégalité, nous pouvons au moins l'affaiblir en amincissant les lames. On pourrait y suppléer en prenant une seconde lame $A'B'$, plus énergique que la première. Alors le fil $a b$ tomberait de lui-même quand l'action de la seconde lame, affaiblie par l'excès de la distance, deviendrait égale à l'action de la première; ce qui arriverait, soit dans le contact des deux lames, soit auparavant. Dans ce dernier cas, si la distance des deux lames diminuait davantage, l'action de la seconde finirait par devenir prépondérante, et le fil $a b$ reviendrait de nouveau s'attacher au pôle A, mais par un magnétisme contraire à celui qu'il avait d'abord. On sent qu'il serait facile de varier beaucoup ces phénomènes; mais les deux expériences que nous venons de décrire suffisent pour indiquer toutes les autres que l'on pourrait imaginer.

Nous avons déjà remarqué qu'un aimant ne perd rien de sa force par l'aimantation qu'il donne à un nombre quelconque de barreaux; mais, ce que nous ne pouvions pas prévoir alors, l'effet de cette répétition, bien loin de l'affaiblir, doit plutôt augmenter son énergie. En effet, lorsque le pôle A d'un aimant, fig. 16, touche l'extrémité b d'un barreau, et y développe un magnétisme contraire à celui qu'il possède, ce magnétisme, à son tour, agit sur le magnétisme naturel de l'aimant qui l'a produit, et tend à y exciter une nouvelle décomposition qui augmente le magnétisme libre de A. Cette augmentation produit dans le barreau une décomposition nouvelle, qui réagit encore sur le pôle A; de sorte que l'un et l'autre, par cette mutuelle réaction, acquièrent un magnétisme plus intense qu'ils ne feraient par l'action directe de A. Ceci est tout-à-fait analogue aux accroissemens de charge que reçoit le plateau supérieur d'un condensateur par l'action de l'électricité

dissimulée dans le plateau inférieur. Mais l'équilibre électrique s'établit instantanément dans ces plateaux, parce qu'ils sont composés de matières propres à transmettre l'électricité avec une facilité extrême; au lieu que le maximum de charge d'un aimant et des barreaux qui le touchent ne s'établit qu'avec une extrême lenteur. Car, d'une part, si les barreaux sont d'acier ou de fer dur, leur force coercitive s'oppose à une prompte décomposition de développement de leurs magnétismes naturels ; et d'une autre part, la substance de l'aimant oppose à l'accroissement de son magnétisme une résistance pareille. On peut bien détruire le premier obstacle en formant les barreaux avec un fer très-doux, mais le second est inévitable, et il en résulte que, dans ce cas même, il faut encore beaucoup de temps pour que le système atteigne tout le développement de magnétisme qu'il peut acquérir.

Cette remarque explique plusieurs phénomènes remarquables. Si l'on suspend à un aimant artificiel toute la quantité de fer doux qu'il peut supporter, et qu'on l'y laisse suspendue, on trouvera qu'on peut de jour en jour l'augmenter d'une petite quantité ; et enfin, au bout de quelques semaines ou de quelques mois, le poids total supporté par l'aimant n'est plus capable de le soutenir ; il a perdu instantanément tout l'excès de force qu'il avait acquis par l'influence du fer. En effet, sous cette influence, ses deux magnétismes, en partie dissimulés par l'attraction du fer, pouvaient exister dans un état de décomposition que la force coercitive seule ne suffit plus pour maintenir : l'aimant, abandonné à lui-même, doit donc revenir au maximum de force magnétique que lui permet la nature de sa substance, c'est-à-dire à l'état de saturation ; et, ce qu'il importe beaucoup de remarquer, il paraît que cette restitution s'opère instantanément.

On a fait une application utile de ce résultat pour augmenter la force naturelle des aimans, soit naturels, soit artificiels, en y adaptant ce que l'on appelle des *armatures*. Ce sont des morceaux de fer très-doux que l'on applique sur les côtés de l'ai-

mant, et qui, devenant eux-mêmes magnétiques par influence, augmentent avec le temps son énergie. Considérons, par exemple, un aimant d'une forme carrée, tel que A A B B, fig. 20, dont A A soit le pôle austral, B B le pôle boréal. Supposons d'abord que l'on applique au premier de ces pôles une armature en fer doux A′ A″ A‴ de la forme indiquée par la figure. Les magnétismes naturels de cette lame seront aussitôt décomposés; son magnétisme boréal sera attiré par le magnétisme austral qui domine en A A, et son magnétisme austral sera repoussé; de sorte que ce dernier dominera sur toute la surface extérieure A′ A″ A‴ de la plaque de fer, et principalement dans son extrémité la plus éloignée A′ A″, que l'on appelle *le pied de l'armature.* Enveloppons d'une armature semblable l'autre pôle de l'aimant B B; il s'y opérera une décomposition pareille, et le pied B′ B″ acquerra le magnétisme boréal. Au bout de quelque temps, l'influence de ces armatures aura augmenté sensiblement la décomposition du magnétisme dans les particules de l'aimant qu'elle enveloppe, et celui-ci sera considérablement plus fort. Il ne faut pas que ces enveloppes soient trop minces; car, toutes choses égales d'ailleurs, le développement de magnétisme qui peut s'opérer dans un morceau de fer dépend de sa masse; et il ne faut pas non plus qu'elles soient trop épaisses, afin que la plus grande énergie de leur action ne réside pas sur leur surface latérale, mais dans leurs pieds A′ A″, B′ B″; on verra plus loin en quoi cette circonstance est avantageuse. Au reste, l'expérience seule peut indiquer l'épaisseur la plus convenable à donner aux armatures de chaque aimant. Il est toutefois évident que ces armatures doivent être toujours faites en fer doux, comme nous venons de le dire, afin de faciliter la décomposition du magnétisme. L'acier et le fer dur seraient tout-à-fait mauvais pour cet usage, quoique quelques auteurs aient conseillé de les employer.

L'addition des armatures n'augmente pas seulement la force de l'aimant par le nouveau dégagement de magnétisme qu'elle y excite; elle l'augmente encore en donnant aux forces magnéti-

ques une meilleure direction. Je suppose, par exemple, que, l'aimant A A B B étant nu, on veuille s'en servir pour aimanter le barreau *a b*, fig. 21, en présentant une des extrémités de celui-ci à sa face boréale B B. Il est évident, à l'inspection seule de la figure, que la plus grande partie des points de cette face et des points ultérieurs agiront fort obliquement sur le barreau, et par conséquent auront peu d'influence pour décomposer par leurs attractions le magnétisme de ses particules dans le sens de sa longueur. En outre, la surface australe A A, qui se trouve parallèle à la première, contrariera cet effet par son influence opposée; et quoique son action soit plus faible, parce qu'elle agit de plus loin, on voit qu'elle a de l'avantage sous le rapport de sa direction, qui forme des angles moins grands avec la longueur du barreau. Lorsqu'au contraire l'énergie de chaque pôle est détournée et transportée en grande partie dans le pied de chaque armature, si l'on présente le barreau *a b* dans le prolongement d'un de ces pieds, comme le représente la fig. 20, on voit d'abord que l'action de ce pôle rassemblée, concentrée pour ainsi dire dans le pied seul, agira beaucoup moins obliquement sur les particules du barreau que ne faisait d'abord la large surface de l'aimant B B; et au contraire, l'action de l'autre pôle, transportée de même dans le pied correspondant, agira beaucoup plus obliquement sur le barreau qu'elle ne faisait dans le cas du parallélisme. Celle-ci aura par conséquent beaucoup moins d'influence pour contrarier l'action immédiate du pied auquel le barreau est appliqué. Aussi parvient-on par ce moyen à donner au barreau un magnétisme beaucoup plus intense qu'on ne ferait avec le même aimant non armé. C'est ce dont il est facile de s'assurer, en éprouvant la force directrice des barreaux; ou, ce qui suffit pour une pareille épreuve, en comparant les poids qu'ils peuvent supporter.

Voilà tout ce que l'on peut produire de plus fort au moyen de l'aimantation par simple contact; mais la nécessité de donner aux boussoles toute l'énergie possible a fait essayer aux physiciens plusieurs autres procédés.

Dans la première méthode, qui a été long-temps presque la

seule en usage, on faisait glisser à angles droits la lame ou le barreau que l'on voulait aimanter sur un des pôles d'un aimant, soit naturel, soit artificiel. Pour évaluer l'effet de cette méthode, considérons d'abord la lame *ab*, fig. 22, lorsque son extrémité *b* commence à être appliquée sur le pôle A de l'aimant AB; et pour fixer les idées, supposons que A soit le pôle austral de cet aimant. Dans ce cas, l'action australe de la partie CA l'emportant sur l'action boréale de la portion CB, il se fera en *b* une décomposition des magnétismes naturels de la lame. Le magnétisme austral de chaque particule sera repoussé vers *a*, le magnétisme boréal sera attiré vers *b*, et il se formera en *b* un pôle boréal. Mais lorsque le pôle A quittera l'extrémité *b*, et commencera à glisser sur les points suivans de la lame, il produira successivement sur chacun d'eux un effet exactement pareil, c'est-à-dire qu'il attirera le fluide boréal de chaque particule vers l'endroit où il se trouvera alors, et en repoussera le fluide austral. Il détruira donc par cette répulsion la première décomposition de magnétisme qu'il avait excitée par le contact à l'extrémité *b*, et à mesure qu'il s'avancera sur la lame, il détruira de même successivement par son influence les effets qu'il avait produits par son contact sur les points qu'il a successivement touchés. Mais à la dernière extrémité *b*, cette destruction n'aura pas lieu, et en la quittant, il la laissera à l'état de magnétisme boréal. C'est donc à peu près à ce dernier effet que se borne l'action de cette méthode; et par conséquent on n'en doit guère attendre un plus grand succès que du simple contact dont nous avons déjà fait usage. C'est ce que l'expérience confirme, comme on le verra tout-à-l'heure; car, en comparant les résultats obtenus par cette méthode avec ceux que donnent les autres procédés que nous allons décrire, on voit qu'elle ne peut aimanter à saturation que des aiguilles d'une très-petite épaisseur.

Elle a en outre le désavantage de donner souvent et facilement des points conséquens de même que le simple contact, surtout si la lame que l'on veut aimanter est longue, d'un acier dur, et que l'aimant que l'on emploie soit tenu sur quelques-uns de ses points beaucoup plus long-temps que sur d'autres. Cette der-

nière circonstance seule suffit même certainement pour en produire; car si l'on prend une lame d'acier déjà aimantée régulièrement, c'est-à-dire qui n'ait en chacune de ses moitiés qu'une même espèce de magnétisme, et qu'on y applique le pôle d'un aimant en quelques parties de sa longueur, on fera naître en ce point un pôle de nom contraire à celui de l'aimant qu'on aura appliqué, du moins si cet aimant est plus énergique que la lame; même, s'il est très-énergique et la lame peu épaisse, il suffit de l'appliquer au milieu de sa longueur pour faire naître en ce point un pôle, et deux pôles contraires aux deux extrémités, comme on peut le vérifier par l'aiguille d'épreuve.

La méthode d'aimantation que nous venons de décrire présente un phénomène très-remarquable. Lorsque la lame *ab* a été ainsi glissée sur un des pôles d'un aimant très-fort, par exemple sur son pôle boréal, et qu'elle a reçu par conséquent un magnétisme assez énergique, si on la fait glisser de même, suivant toute sa longueur et dans le même sens, sur le pôle homologue d'un aimant plus faible, on est porté à croire que cette opération faite dans le même sens que la première ne pourra qu'augmenter l'état magnétique de la lame, ou tout au plus le laissera tel qu'il était auparavant. Au lieu de cela, on trouve qu'elle le diminue, et qu'elle le réduit précisément au même point que si la lame avait été uniquement aimantée par le faible aimant. Pour concevoir ce phénomène, il faut faire attention que le second aimant, en touchant ainsi successivement chaque point de la première moitié de la lame, y fait naître momentanément par son contact un magnétisme contraire à celui que le premier aimant y avait laissé; du moins en supposant ce second aimant formé lui-même d'un fer assez dur pour que son magnétisme propre ne puisse pas être détruit par celui de la lame. Cette inversion s'opère toujours, quoique le second aimant soit plus faible que l'autre, parce qu'il agit alors par son contact immédiat; au lieu que le premier aimant n'avait produit ce magnétisme définitif que par son influence à distance. Ainsi à mesure que le second aimant glisse sur la première moitié de la lame par son pôle boréal, chacun des points qu'il touche est d'abord ramené à l'état

naturel, passe à l'état austral, et reçoit ensuite par influence à distance le degré définitif de magnétisme boréal que cet aimant peut lui donner. Mais ces changemens successifs de magnétisme libre ne peuvent se faire dans la première moitié de la lame, sans en nécessiter aussitôt de correspondans sur l'autre moitié. On voit donc, qu'après avoir éprouvé cette action perturbatrice sur toute sa longueur, la lame doit se trouver ramenée précisément au même degré de magnétisme définitif que si elle avait été seulement touchée par le second aimant. Mais on voit aussi que cette réduction n'aurait pas lieu, si le pôle boréal du second aimant ne touchait la lame que dans sa moitié australe; car alors le magnétisme de celle-ci en serait plutôt augmenté que diminué. Par la même raison, il n'y aurait pas non plus d'affaiblissement, si le magnétisme de la lame était assez fort pour détruire celui du second aimant et intervertir ses pôles. Le cas extrême de cette supposition arriverait, si cet aimant était composé d'un fer très-doux dans lequel la décomposition et la recomposition des magnétismes naturels pût s'opérer avec une extrême facilité; car alors, à mesure que ce fer passerait sur les différens points de la lame, il acquerrait momentanément dans le contact un magnétisme contraire à celui du point qu'il toucherait, et conséquemment par sa réaction, il tendrait à augmenter l'espèce de magnétisme que ce point posséderait déjà. Ce serait comme une armure mobile qui s'appliquerait tour à tour aux différens points de la lame; et il n'y a pas de doute que ces frictions réitérées, au lieu de diminuer le magnétisme de la lame, le porteraient bientôt à son maximum.

Après beaucoup d'efforts inutiles pour modifier et perfectionner l'aimantation par simple contact, le premier pas vers des méthodes mieux combinées et plus avantageuses fut fait en 1745 par le physicien anglais Knight. Il plaçait bout à bout deux barreaux fortement aimantés, en joignant le pôle nord de l'un avec le pôle sud de l'autre. Il posait ensuite sur ces gros barreaux, et dans le sens de leur longueur, un petit barreau d'acier trempé cerise-clair, dont le milieu répondait au point de jonction des deux gros barreaux; alors séparant ceux-ci, il les faisait glisser chacun de leur côté jusqu'aux extrémités du

petit barreau, qui, par ce procédé, se trouvait acquérir une force magnétique plus grande qu'on ne l'avait obtenue jusqu'alors.

Dans cette disposition, chaque aimant agit sur la moitié du petit barreau qu'il parcourt, comme il le faisait dans la première méthode. Mais dans celle-ci l'influence du même aimant agissait seule sur toute l'étendue de la lame pour y développer les deux magnétismes; au lieu qu'ici cette décomposition est favorisée par la présence de l'autre aimant; car dans tous les points qui les séparent, leurs influences conspirent, et l'espèce de magnétisme qui est attiré par l'un d'eux vers une des extrémités du barreau est en même temps poussée par l'autre vers cette extrémité. Aussi, en employant cette méthode, et se servant de gros barreaux fortement aimantés, on trouve que les petits barreaux, lorsqu'ils sont très-courts et peu épais, acquièrent à peu près le maximum de magnétisme; mais il est impossible d'aimanter à saturation un barreau un peu long par ce procédé.

Les petits barreaux de Knight, qui se répandirent dans tous les cabinets de physique, engagèrent à cette époque plusieurs physiciens à chercher d'autres moyens pour obtenir le même degré de magnétisme dans des barreaux plus grands. M. Duhamel, membre de l'Académie des sciences, s'étant réuni pour cette recherche avec M. Anthéaume, y parvint par le moyen suivant.

Il plaça parallèlement l'un à l'autre deux barreaux d'acier d'égale longueur, en joignant leurs extrémités par de petits parallélipipèdes de fer très-doux F F′, de manière à former un parallélogramme rectangle, comme on le voit fig. 23. Prenant ensuite deux faisceaux de barreaux *ab, a′ b′*, déjà aimantés, il réunit les pôles de différens noms vers le milieu d'un des barreaux d'acier; inclinant ensuite ces faisceaux, comme la figure le représente, il les fit glisser chacun de leur côté jusqu'à l'extrémité du barreau, et en répétant ces frictions successivement sur les deux barreaux d'acier, il obtint un degré de magnétisme considérable. Dans cette disposition, chaque faisceau aimanté agit encore sur la moitié de la lame qu'il parcourt, comme dans la première méthode. L'emploi de deux faisceaux au lieu d'un

seul a aussi le même avantage qu'offre la méthode de Knight; mais de plus, l'application des petits barreaux de fer doux, à l'extrémité de ceux que l'on veut aimanter, est une innovation très-importante. Car du moment où les barreaux d'acier ont acquis quelque degré de magnétisme, ces petits barreaux de fer doux s'aimantent aussi par influence; ils agissent sur les barreaux d'acier comme de véritables armures; ils fixent à chacune de leurs extrémités le magnétisme déjà développé, ils le dissimulent, et donnent ainsi aux faisceaux aimantés plus de facilité pour opérer une nouvelle décomposition de magnétisme par une nouvelle friction. Il n'y avait qu'un pas à faire pour donner à cette méthode tout le degré de perfectionnement dont elle était susceptible; il ne fallait que substituer aux petits barreaux de fer doux de forts aimans opposés par leurs pôles, qui retinssent et dissimulassent plus fortement encore le magnétisme déjà décomposé par les faisceaux glissans; c'est ce qu'Æpinus a fait, comme nous le verrons tout-à-l'heure. Mais déjà la méthode de Duhamel est la meilleure que l'on puisse employer pour aimanter les aiguilles des boussoles et les lames qui n'ont pas plus de 2 ou 3 millimètres d'épaisseur, pourvu que les faisceaux glissans dont on se sert soient fortement aimantés.

A peu près dans le même temps que M. Duhamel s'occupait à Paris de cette recherche, MM. Michel et Canton suivaient le même objet en Angleterre.

M. Michel se servait de deux faisceaux de barreaux fortement aimantés, liés parallèlement entre eux; les pôles de différens noms réunis à chaque extrémité, de manière cependant qu'il restât entre eux un intervalle de 7 à 8 millimètres. Il plaçait ensuite plusieurs barreaux égaux en ligne droite, et il faisait glisser à angles droits une des extrémités du faisceau le long de la ligne formée par les barreaux qu'il voulait aimanter. Il trouvait par cette méthode que les barreaux intermédiaires dans la chaîne prenaient une grande force magnétique; ce qui est vrai, quoique ce degré de magnétisme ne donne jamais le maximum ou le point de saturation.

Les divers barreaux mis en contact par leurs extrémités font ci le même effet que les petits barreaux de fer doux employés

par Duhamel : ce sont de véritables armures ; seulement, comme la nature de leur substance n'y permet pas le libre développement du magnétisme, ils ne s'aimantent et ils n'agissent qu'autant qu'ils ont été touchés par les faisceaux glissans. On conçoit par-là pourquoi les barreaux intermédiaires dans la série sont les seuls qui soient fortement aimantés; c'est que ce sont les seuls qui aient des armures. En cela, le procédé de Michel revient à celui de Duhamel, et lui est peut-être inférieur. Mais il offre une autre modification qui mérite d'être examinée; c'est l'emploi de deux faisceaux parallèles approchés à une distance constante par leurs pôles contraires, et glissant simultanément sur toute l'étendue des barreaux. Pour concevoir nettement l'effet de cette disposition, représentons ces deux faisceaux par AB, B'A', fig. 24; supposons qu'on promène leurs pôles sur la barre d'acier $\alpha\beta$, et analysons leur action sur les points compris en dedans ou en dehors de l'intervalle qu'ils comprennent.

Considérons d'abord le faisceau AB, que je supposerai pour plus de simplicité n'avoir pas de points conséquens; en sorte que sa moitié CB la plus éloignée de la barre possède le magnétisme boréal, et la partie CA la plus voisine, le magnétisme austral. Soit *m* une molécule quelconque de la barre; tous les points du faisceau AB exerceront sur les magnétismes naturels de cette particule une action ou boréale, ou australe, et tendront à les séparer chacun dans leur sens. Mais si les deux moitiés de ce faisceau possèdent un degré à peu près égal de magnétisme, comme il faut que cela soit, si le point d'indifférence tombe à peu près au milieu de sa longueur, il est évident que les actions australes devront l'emporter sur les autres, parce que les points qui les exercent sont plus voisins de la molécule *m*; de sorte qu'en définitif l'action totale du barreau aura pour résultante une force australe dirigée suivant une certaine ligne *om*, laquelle coupera le barreau dans sa partie australe, à peu de distance de son extrémité. Car dans les aimans qui n'ont pas de points conséquens, la quantité de magnétisme libre est la plus grande possible aux extrémités mêmes, et de là va en décroissant vers le centre avec une extrême rapidité, de même

que l'électricité libre dans les tourmalines et les piles électriques isolées.

Si nous considérons maintenant l'action de l'autre aimant A' B' sur la même particule, nous verrons pareillement qu'il en résultera une force boréale unique dont la direction $m\,o'$ coupera cet aimant dans sa partie boréale à peu de distance de son extrémité.

Pour avoir l'effet que produisent ces deux forces dans le sens de la longueur du barreau, il faut les décomposer suivant cette longueur. Alors, en les représentant par $m\,r$ et $m\,r'$, chacune d'elles donnera une force mf, mf' perpendiculaire à la direction du barreau, et une force $m\,s$ ou $m\,n$, boréale ou australe, dirigée dans le sens de sa longueur. Ces dernières forces sont les seules qu'il nous importe de considérer, puisqu'elles seules déterminent la décomposition longitudinale du magnétisme. Or, à la seule inspection de la figure, on voit que, si la molécule m est située entre les faisceaux, les deux forces dont nous parlons conspirent à la décomposition de ses magnétismes naturels, et tendent l'une et l'autre, à porter son magnétisme boréal vers l'extrémité β de la barre, son magnétisme austral vers l'extrémité α. Il est évident encore que cet effet aura lieu de même sur toutes les autres parties de la barre où l'on transportera l'assemblage des deux faisceaux. Si, au contraire, la molécule que nous considérons était située hors de l'intervalle qu'ils comprennent, par exemple en m', les actions longitudinales des deux faisceaux se contrarieraient au lieu de s'ajouter, et l'action du faisceau le plus voisin, de A' B' par exemple, l'emportant par sa proximité, il en résulterait une décomposition de magnétisme $a'\,b'$, contraire à celle qui s'opère dans la molécule m, et contraire aussi à l'état définitif du magnétisme de la barre. Mais cette décomposition, produite par la différence des forces, sera toujours plus faible que la première, qui est produite par leur somme; elle le sera surtout si les faisceaux glissans sont placés à peu de distance l'un de l'autre; car alors leurs influences contraires deviendront presque égales sur les points de la barre qui seront tant soit peu éloignés d'eux. Ainsi le faible développement de magnétisme qui en résultera ne pourra pas résister à l'action conspirante des deux barreaux, lorsqu'on transportera

leur assemblage sur le point m', et que ce point se trouvera compris entre eux. Réciproquement, ils ne pourront pas alors détruire tout le développement de magnétisme qu'ils avaient d'abord produit dans le point m, lorsqu'ils agissaient sur lui par des actions conspirantes. Des frictions de ce genre plusieurs fois réitérées d'un bout à l'autre de la barre tendent donc toujours à y exciter un développement croissant de magnétisme; et en effet, l'expérience prouve qu'en les réitérant, ce développement devient fort considérable. Pour qu'il soit égal dans les deux moitiés de la barre, on applique d'abord l'assemblage des faisceaux à son centre, et l'on fait un nombre de frictions égal sur chacune de ses deux moitiés. Puis les faisceaux étant revenus au centre, on les enlève perpendiculairement pour ne point troubler l'effet latéral précédemment produit. Ce procédé, appelé par son inventeur *la double touche*, a eu beaucoup de célébrité.

Canton essaya d'y faire une modification qui n'était nouvelle qu'en apparence; il formait d'abord, comme Duhamel, un parallélogramme rectangle, en unissant par des morceaux de fer doux les extrémités de deux barreaux d'acier. Puis il touchait ces barreaux avec deux faisceaux parallèles réunis selon la méthode de Michel; et enfin séparant ces faisceaux et les inclinant de part et d'autre sur les barres, il les faisait glisser, l'un d'un côté, l'autre de l'autre, jusqu'aux extrémités. Mais d'après ce que nous avons vu plus haut sur l'effet des frictions réitérées avec des aimans d'inégale force, il est clair que la dernière opération avec les lames inclinées était la seule qui déterminât définitivement l'état magnétique de la lame; car elle donne plus de magnétisme que l'autre, comme on va le voir. Ainsi l'emploi précédent de la double touche était tout-à-fait inutile, et l'opération dépouillée de cet accessoire superflu n'était plus identiquement que la méthode de Duhamel.

Æpinus fit à la double touche une modification beaucoup plus heureuse et mieux calculée. Il laissa les pôles des deux faisceaux glissans à une petite distance l'un de l'autre, sans jamais les séparer; mais il inclina les faisceaux en sens contraire, comme l'avait fait Duhamel, et comme le représente la fig. 25. Par ce moyen, la résultante de leurs actions sur chaque molécule m

devenait plus oblique sur la surface de la barre, et par conséquent la partie de cette résultante, qui se décomposait dans le sens longitudinal, devenait plus considérable. Il est vrai qu'en même temps l'action propre de chaque point du faisceau s'affaiblit, parce que sa distance à la molécule m devient plus grande; de sorte qu'on ne doit pas augmenter l'inclinaison indéfiniment. L'expérience seule peut indiquer quelle est en cela la limite la plus favorable : Æpinus se décida pour une inclinaison de 15 ou 20 degrés sur la surface de la barre; et c'est en effet à peu de chose près la valeur que nous indiquera la théorie, quand nous aurons acquis toutes les données nécessaires pour résoudre ce problème. Æpinus joignit à cette modification l'emploi des armures de fer doux de Duhamel, auxquelles il substitua avec avantage deux forts aimans opposés par leurs pôles, comme nous l'avons déjà indiqué. La combinaison de ces deux procédés compose la méthode à laquelle on a donné son nom. En éprouvant les résultats qu'elle produit, on trouve, comme nous le verrons tout-à-l'heure, qu'elle a de l'avantage sur toutes les autres, lorsqu'avec des faisceaux faibles de magnétisme l'on veut aimanter de très-gros barreaux; mais elle a quelques inconvéniens inévitables qu'il importe de remarquer. Le premier, c'est de ne jamais produire un développement de magnétisme parfaitement égal dans les barreaux auxquels on l'applique. En effet, si, après l'aimantation, on place ces barreaux horizontalement sous une feuille de papier sur laquelle on a répandu de la limaille de fer très-fine, on voit, par la manière dont elle se groupe, que le point d'indifférence ne tombe pas exactement au milieu du barreau, mais se trouve rapproché de quelques millimètres de l'extrémité qui a été aimantée la dernière. Cette observation est de Coulomb.

En second lieu, il paraît que la méthode d'Æpinus produit plus facilement des points conséquens dans les lames très-longues que celle de Duhamel. A la vérité, ces alternatives ont toujours peu d'énergie; mais néanmoins elles diminuent la force directrice, et cela devient un inconvénient très-grand dans la construction des aiguilles de boussole. On en doit dire autant de la petite inégalité que nous venons d'indiquer dans la distri-

bution du magnétisme. En conséquence, il vaut mieux pour l'aimantation des aiguilles de boussole employer la méthode de Duhamel, qui est complètement exempte de ces deux défauts, et l'on réservera la méthode d'Æpinus pour les gros barreaux auxquels on voudra donner une force magnétique considérable, parce qu'alors il importe peu que leur centre magnétique ne soit pas exactement placé au milieu de leur longueur.

En prenant ainsi dans chacun de ces procédés ce qu'ils ont de plus avantageux, et apportant dans l'exécution toutes les connaissances qui peuvent résulter d'une longue pratique, Coulomb s'est arrêté aux dispositions suivantes.

Pour former les aimans fixes, il emploie des barreaux d'acier trempés cerise-clair, ayant chacun 5 ou 6 décimètres de longueur. Il les aimante d'abord autant qu'il le peut avec un aimant naturel ou artificiel; puis les réunissant par leurs pôles de même nom, il en forme deux couches de cinq barreaux chacune, séparées par de petits parallélipipèdes rectangles de fer très-doux qui leur servent comme d'armure commune, et qui saillent un peu au-delà de leurs extrémités. Voyez fig. 26.

Les faisceaux glissans sont ordinairement composés de quatre barreaux aussi trempés cerise-clair, et ayant 400 millimètres de longueur, 5 d'épaisseur, et 15 de largeur. Après les avoir aimantés autant que possible, il en réunit deux sur la largeur, deux sur l'épaisseur; ce qui donne à chaque faisceau 30 millimètres de largeur, et 10 d'épaisseur.

Ces faisceaux, soit fixes, soit mobiles, sont composés d'un acier très-répandu dans le commerce, où il est connu sous le nom d'acier timbré à sept étoiles. Sa qualité est médiocre; mais Coulomb a observé, comme on l'avait déjà fait avant lui, que toutes les espèces d'acier, à moins qu'elles ne soient d'une très-mauvaise qualité, prennent à peu de chose près le même degré de magnétisme.

Pour aimanter une barre au moyen de cet appareil, on place les gros faisceaux sur une même ligne droite, de manière que leurs pôles nord et sud se regardent et soient éloignés l'un de l'autre d'une distance égale à la longueur de cette barre; puis on place chacun de ses bouts sur une de leurs armures, de

manière qu'elle n'y empiète que de 4 ou 5 millimètres. Après cela, on pose les faisceaux glissans à son centre, en les inclinant de chaque côté en sens contraire, de manière qu'ils forment avec elle un angle de 20 ou 30°. Puis si l'on veut employer la méthode de Duhamel, on fait glisser chaque faisceau du côté où il se trouve, jusqu'à l'extrémité correspondante de la barre; mais si on veut employer celle d'Æpinus, on ne les sépare point; on place seulement entre eux un petit morceau de bois ou de cuivre qui maintienne leurs pôles opposés à une distance de 5 ou 6 millimètres, et les tenant ainsi sous la même inclinaison que dans l'autre méthode, on les promène successivement du centre vers chaque extrémité tour à tour, de manière que les frictions sur chaque moitié soient égales. Après la dernière qui les ramène au centre de la barre, on les retire perpendiculairement à sa longueur, et l'on répète la même opération sur chacune de ses deux surfaces.

Si les barres qui forment les faisceaux n'ont pas d'abord pu être aimantées à saturation, ce qui devra ordinairement arriver quand on n'aura pas encore eu à sa disposition un appareil de ce genre, leur assemblage produira dans les barres soumises à leur action un magnétisme plus fort que celui qu'elles possèdent elles-mêmes. Alors on se servira de ces nouvelles barres pour former d'autres faisceaux plus forts que les premiers; puis on défera ceux-ci, et en les soumettant à l'action des nouveaux faisceaux, on augmentera encore leur magnétisme. Si l'on n'a pas encore atteint le maximum d'énergie, on répétera l'opération une troisième fois, une quatrième, et l'on obtiendra enfin des faisceaux aussi forts qu'on puisse le désirer.

Nous avons dit que chaque faisceau glissant n'était composé que de quatre barreaux. Cependant, lorsqu'on veut aimanter de très-grosses barres, il faut les réunir en plus grand nombre, en les disposant par gradins en retraite de dix ou douze millimètres dans le sens de l'épaisseur, comme le représente la fig. 27. Cette disposition est fondée sur ce que le plus grand développement de magnétisme a toujours lieu vers l'extrémité des barreaux. Alors le barreau le plus voisin du barreau central tend à maintenir, et même à augmenter dans son extrémité le dévelop-

pement du magnétisme qui y domine déjà ; le troisième barreau fait le même effet sur le second, et ainsi de suite.

Il nous reste à montrer par l'expérience la confirmation de toutes les considérations théoriques que nous venons d'exposer ; c'est encore ce que nous allons faire en prenant Coulomb pour guide.

Pour apprécier avec exactitude les effets des différentes méthodes d'aimantation, ce physicien s'est proposé de les comparer dans les divers degrés de difficulté qu'elles ont à vaincre. Il les a appliquées d'abord à des fers d'acier trempé, d'un très-petit diamètre, et à des lames d'acier minces, détrempées par le recuit, circonstance qui facilite le développement du magnétisme, en atténuant la force coercitive, comme nous l'avons observé plus haut. De là, il a passé à des lames également peu épaisses, mais trempées cerise-clair. Alors la force coercitive est plus grande, et la difficulté de l'aimantation plus considérable. Enfin, en conservant toujours ce degré de trempe, il a essayé d'aimanter, par les diverses méthodes, des barreaux de plus en plus épais.

Pour que cette comparaison se fît avec exactitude, il commença par se procurer dix barreaux d'acier trempés, ayant chacun 400 millimètres de longueur, 15 de largeur et 5 d'épaisseur, et les aimanta l'un après l'autre aussi fortement qu'il lui fut possible, en faisant subir à chacun d'eux la même série d'opérations, de manière que leur magnétisme devait être sensiblement égal.

Sa première expérience fut faite avec un fil d'acier trempé et non recuit, de 300 millimètres de longueur et 1 millimètre de diamètre. Il le fit d'abord glisser à angles droits sur le pôle d'un seul barreau aimanté ; il le mit ensuite en oscillation dans un plan horizontal, en le suspendant à un fil de soie très-fin, afin d'observer quelle était l'intensité d'action exercée sur lui par la force magnétique de la terre. Il trouva ainsi qu'en vertu de cette seule action il faisait dix oscillations en. . . . . 74″.

Ce même fil, glissant à angles droits sur le pôle de quatre et dix barreaux réunis, n'acquérait pas un magnétisme plus fort ; il faisait également dix oscillations en. . . . . 74″.

Aimanté par la méthode de Duhamel ou par celle d'Æpinus, en le soumettant à l'action du grand appareil, il n'acquérait rien de plus ; il faisait toujours dix oscillations en. . . . . . 74″.

Ainsi, pour les fils d'acier d'un aussi petit diamètre, toutes les méthodes donnent le même degré de magnétisme que le simple contact ; ce degré peut donc être regardé comme l'état de saturation.

Coulomb essaya ensuite, au lieu d'un fil, une lame d'acier recuite, ayant 300 millimètres de longueur, 8 de largeur, et 0,6 de millimètre d'épaisseur. Ainsi sa largeur seule différait du cas précédent.

Cette lame, glissée à angles droits sur le pôle d'un seul barreau, fit dix oscillations en . . . . 77″.

Sur les pôles de deux barreaux réunis, dix oscillations en 75″.

Sur les pôles de dix barreaux réunis, dix oscillations en 75″.

Par les méthodes de Duhamel et d'Æpinus, en n'employant de chaque côté qu'un seul barreau mobile, dix oscillations en. . . . . 75″.

Ici la différente influence des procédés commence à devenir sensible, mais elle est encore très-faible ; elle devient beaucoup plus forte en passant à l'état de trempe.

Une lame d'acier ayant 164 millimètres de longueur, 9 de largeur, $0^{mm},6$ d'épaisseur, trempée cerise-clair, après avoir glissé *à angles droits* sur les pôles de deux barreaux réunis, a fait dix oscillations en. . . . . 51″.

Sur les pôles de quatre barreaux réunis, dix oscillations en 49″

Sur les pôles de huit et dix barreaux réunis, dix oscillations en. . . . . $47\frac{1}{2}$″.

Réunissant seulement deux barreaux, et faisant glisser la lame sur leurs pôles, non plus à angles droits, mais sous une inclinaison de 15 à 20°, ce qui rapprochait leur centre d'action de la surface de la lame, elle a fait également dix oscillations en. . . . . $47\frac{1}{2}$″

Aimantée par les méthodes de Duhamel et d'Æpinus, seulement avec deux barreaux mobiles, elle a fait encore dix oscillations en. . . . . $47\frac{1}{2}$″.

Il est à remarquer qu'en employant la méthode d'Æpinus,

on trouve ordinairement une durée de $\frac{1}{2}$ seconde, et quelquefois d'une seconde plus longue que par celle de Duhamel; ce qui tient sans doute aux deux causes indiquées page 55.

Dans ces expériences, comme dans celles qui vont suivre, il ne faut établir de comparaison qu'entre les durées des oscillations de la même lame, successivement aimantée de diverses manières; car d'une lame à une autre, les résultats absolus sont altérés par la variété des dimensions.

L'épaisseur augmentant toujours, l'inégale énergie des diverses méthodes se fait sentir davantage. Une lame de 202 millimètres de longueur, 14 de largeur, 1 d'épaisseur, après avoir glissé plusieurs fois à angle droit sur le pôle d'un seul barreau, a fait dix oscillations en.. 73″.

Sur le pôle de quatre barreaux réunis, dix oscillations en 62″.

Sur le pôle de dix barreaux réunis, dix oscillations en 59″.

Mais en réunissant seulement deux barreaux, et les faisant glisser sur la lame avec une inclinaison de 15 ou 20°, elle a fait dix oscillations en.. 53″.

Même inclinaison, avec quatre barreaux réunis, dix oscillations en.. 49″.

Même inclinaison avec huit et dix barreaux, dix oscillations en.. 49″.

Par les méthodes de Duhamel et d'Æpinus, avec un seul barreau de chaque côté, ou un plus grand nombre, dix oscillations en.. 49″.

Ces expériences suffisaient pour montrer que les méthodes de Duhamel et d'Æpinus sont supérieures à toutes les autres, puisqu'elles donnent un degré de magnétisme égal avec un beaucoup plus petit nombre de barreaux glissans; on voit de plus que ces méthodes sont également bonnes, tant qu'on les applique à des lames qui n'ont pas plus qu'un ou deux millimètres d'épaisseur; mais en les appliquant à des épaisseurs plus fortes, celle d'Æpinus prend décidément l'avantage.

Coulomb en a fait l'épreuve sur un des gros barreaux dont ses faisceaux étaient formés; ces barreaux ont, comme nous l'avons dit, 400 millimètres de longueur, 15 de largeur, 5 d'épaisseur, et sont trempés cerise-clair. En appliquant à l'un

d'eux le procédé d'Æpinus, deux barreaux mobiles glissant sur sa surface lui donnèrent un degré d'aimantation tel, qu'il faisait dix oscillations en. . . . . 110″.

En augmentant le nombre des barreaux mobiles, il n'acquérait rien de plus; c'était donc là l'état de saturation. Or, par la méthode de Duhamel, on ne pouvait l'amener à ce même état qu'en employant des faisceaux mobiles composés chacun de quatre barreaux.

Coulomb répéta cette comparaison sur un barreau plus épais encore; il avait 400 millimètres de longueur, 25 de largeur et 9 d'épaisseur. En lui appliquant d'abord le procédé d'Æpinus, et formant les faisceaux mobiles d'un barreau ou de deux ou de trois, il acquérait un magnétisme progressivement croissant. Mais en employant des faisceaux composés de quatre barreaux, ou de dix ou d'un plus grand nombre, il faisait également dix oscillations en. . . . . 153″. C'était donc là l'état de saturation.

En employant la méthode de Duhamel, il fut impossible d'atteindre ce degré d'aimantation, même en se servant de faisceaux glissans composés de dix barreaux chacun. Par cette opération, le barreau ne faisait que dix oscillations en. . 162″.

Ainsi la première méthode lui donnait une force magnétique plus grande dans le rapport de $(162)^2$ à $(153)^2$, ou de 9 à 8.

La méthode d'Æpinus est donc la seule qu'il faille employer pour aimanter des barreaux de cette dimension; ce qui devient nécessaire, lorsque l'on veut se procurer des aimans artificiels d'une grande force; il n'y aurait aucun avantage à chercher à aimanter des barreaux d'acier trempés d'une épaisseur plus considérable. Car l'expérience prouve que l'on obtient beaucoup plus de force en formant un gros faisceau avec la réunion de plusieurs barreaux plus petits aimantés séparément avant d'être rassemblés; et cela provient sans doute de ce que l'on peut donner à chacun de ces barreaux en particulier un magnétisme beaucoup plus énergique qu'on ne pourrait faire s'il fallait agir sur lui, tandis qu'il serait placé au centre d'un barreau plus épais.

CHAPITRE V.

Distribution générale du Magnétisme libre dans les fils aimantés par la méthode de la double touche. Lois des attractions et des répulsions magnétiques.

Lorsqu'on a aimanté par la méthode de Duhamel et d'Æpinus un fil d'acier d'une ou deux lignes de diamètre, et de 15 ou 20 pouces de longueur, si l'on essaie les poids qu'il peut supporter en divers points par son attraction, on trouve que ces poids vont en augmentant depuis l'extrémité jusqu'à une distance de 4 ou 5 lignes ; après quoi ils diminuent rapidement ; de sorte qu'ils sont presque insensibles vers 2 ou 3 pouces de distance de l'extrémité. On trouve de plus que ces poids sont égaux vers chaque bout du fil. Cela prouve, comme nous l'avions prévu, que les quantités les plus intenses de magnétisme libre sont distribuées vers les deux extrémités du fil à une petite distance et y sont sensiblement égales, distribution parfaitement analogue à celle de l'électricité libre dans les tourmalines et les piles.

Ce résultat important se prouve encore mieux à l'aide de la torsion. Dans l'étrier de la balance magnétique, on place une aiguille d'acier, bien aimantée par la méthode de Duhamel ou d'Æpinus. Sur la direction du méridien magnétique de cette aiguille, qui doit aussi répondre au zéro de torsion, l'on fixe une règle verticale de bois ou de cuivre d'une ou deux lignes d'épaisseur, de manière que l'extrémité de l'aiguille vienne s'y appliquer, lorsqu'elle est ramenée à son méridien par la torsion. Puis de l'autre côté de cette règle on fait glisser verticalement un fil d'acier aimanté, tel que nous l'avons supposé plus haut ; en commençant, par exemple, par son pôle homologue à celui de l'aiguille. Celle-ci est d'abord chassée par la répulsion qui

s'opère entre les magnétismes de même nature ; mais on la ramène par force en contact avec la règle, en tordant le fil de suspension, de manière qu'il ne reste que l'épaisseur de la règle ou deux lignes de distance entre les points du fil et de l'aiguille les plus rapprochés. Or, comme le fil d'acier que nous plaçons derrière la règle est vertical, tandis que l'aiguille est horizontale, tous les points qui se trouvent, de part et d'autre, à 4 ou 5 lignes de distance du recroisement, ne contribuent que très-peu à la répulsion, à cause de leur distance et de l'obliquité avec laquelle ils agissent ; en sorte que la force de torsion qu'il faut employer pour maintenir le contact doit surtout dépendre des quantités de magnétisme libre qui existent sur chaque aiguille, depuis le point de contact jusqu'à une distance de 2 ou 3 lignes de part et d'autre de ce point. Ainsi, en faisant glisser verticalement le fil d'acier le long de la règle, et présentant successivement tous ses points à cette petite distance de 2 lignes de l'aiguille, dont l'action reste constante, les forces de torsion qu'il faudra employer pour maintenir le contact seront dans chaque essai une mesure très-approchée de l'intensité du magnétisme libre dans le point du fil qui forme le recroisement. Or, quand on fait cette expérience, on trouve que, s'il faut une torsion de huit cercles lorsque le point de recoupement est à 2 lignes de l'extrémité du fil, il ne faut que deux ou trois cercles de torsion à 2 pouces ; et lorsque l'extrémité du fil dépasse de 3 pouces le plan horizontal de l'aiguille, la répulsion est presque nulle ; presque tout le magnétisme libre est donc réuni sur ces 3 premiers pouces, à partir de l'extrémité. On trouve la même chose pour l'attraction des pôles de nom contraire ; et si le fil vertical a été régulièrement aimanté par la méthode de la double touche, on trouve que les attractions de ce pôle sont sensiblement égales aux répulsions de l'autre ; mais il faut avertir que, pour pouvoir compter sur les résultats d'une pareille expérience, il ne faut employer que des aiguilles et des fils d'excellent acier, fortement trempées, et encore ne pas leur donner un très-fort degré de magnétisme ; car, sans ces précautions, les points de recroisement n'étant

qu'à deux lignes de distance l'un de l'autre, les influences réciproques de l'aiguille et du fil pourraient y développer de nouvelles quantités de magnétisme ; de sorte que les résultats de leurs attractions ne seraient plus comparables entre eux.

Supposez maintenant que, dans cette expérience, au lieu d'une aiguille et d'un fil, on emploie deux fils pareils de 24 pouces de longueur, disposés de manière que le point de recoupement se trouve à peu près à 10 ou 12 lignes de distance de l'extrémité de chacun d'eux, et joignons-les ainsi d'abord par les pôles homologues; il y aura répulsion. Or, cette répulsion sera presque entièrement produite par les 2 ou 3 pouces de longueur sur lesquels le magnétisme est le plus développé, et les pôles qui se regardent seront presque les seuls qui y contribueront; car l'action des autres sera extrêmement affaiblie, à cause de la longueur que nous supposons ici aux deux fils, et elle le sera aussi par sa direction qui sera très-oblique, si les deux extrémités qui se regardent ne s'écartent l'une de l'autre qu'à de très-petites distances. Ces extrémités se trouveront donc alors disposées de la manière la plus favorable pour mesurer la loi de leurs répulsions à des distances diverses; car leur recoupement étant placé aux points où la répulsion est la plus forte, les autres portions de magnétisme libre, qui sont situées très-près de ces points, auront sur la répulsion presque le même effet que si elles y étaient toutes concentrées; de sorte que le phénomène reviendra, à peu de chose près, à l'action réciproque de deux points chargés l'un et l'autre d'une quantité constante et donnée de magnétisme de même nature.

Dans cette expérience, lorsque l'aiguille mobile se sera écartée de l'aiguille fixe, elle sera sollicitée vers celle-ci, non-seulement par la torsion, mais encore par l'attraction de l'aimant terrestre qui tend à la ramener vers son méridien magnétique; il faudra donc commencer par mesurer séparément cette force directrice pour diverses distances, après quoi on l'ajoutera à la torsion observée, pour avoir l'effet total de la répulsion des deux fils. Voici les résultats d'une expérience de ce genre faite par Coulomb.

Les fils avaient 24 pouces de longueur, 1 ligne $\frac{1}{2}$ de diamètre. Il a mis d'abord en place le fil horizontal mobile, et il a cherché, comme nous venons de le prescrire, avec quelle force le magnétisme terrestre le ramenait dans son méridien. Pour cela, il a tourné le micromètre de suspension de deux cercles; l'aiguille a marché de 20 degrés; la torsion était donc alors 2 cercles moins 20° ou 700°. De là il est facile de conclure la force directrice pour tout autre angle a, car elle est proportionnelle à sin a; et ainsi sa valeur est $700 \cdot \frac{\sin a}{\sin 20^\circ}$. Mais comme les sinus des petits angles sont à peu près proportionnels aux arcs, si l'on se borne à des répulsions au-dessous de 24°, on peut, sans une erreur notable, substituer le rapport des arcs $\frac{a}{20^\circ}$ à celui des sinus. Alors l'expression de la force directrice devient $\frac{700 \, . \, a}{20}$ ou $35\,a$; c'est-à-dire que, dans cette étendue, pour éloigner le fil horizontal d'un degré de son méridien magnétique, il fallut employer une force de torsion très-peu différente de 35°.

Coulomb plaça ensuite verticalement dans ce méridien un autre fil aimanté, des mêmes dimensions que le premier; de manière que, si les deux fils s'étaient touchés, ils se seraient rencontrés à un pouce de leurs extrémités; mais comme ils étaient opposés par des pôles homologues, le fil horizontal a été repoussé de la direction de son méridien, et il ne s'est arrêté que lorsque la force de répulsion des pôles opposés a été équilibrée par les forces combinées de la torsion et du magnétisme terrestre, qui tendaient à le ramener à son point de repos. Voici le résultat des différens essais :

Torsion donnée au fil de suspension par le moyen du micromètre.	Angle de répulsion.
0	24
3^c	17
8^c	12

La première expérience exprime l'angle auquel l'aiguille

mobile a été chassée immédiatement et en partant du zéro de torsion ; elle était donc alors ramenée vers ce zéro par une force de torsion de 24°, plus la force directrice du magnétisme terrestre pour 24° de distance, laquelle est égale à 24 . 35°, ou 840°. Ainsi la force répulsive totale était alors 864.

Dans la seconde expérience, on a tordu de trois cercles en sens contraire des 24° produits d'abord, mais l'aiguille n'est revenue qu'à 17° de son zéro ; ainsi la force de torsion était alors 3 cercles + 17° ou 1097°. Il faut y ajouter la force directrice pour 17°, qui est 17 . 35°, ou 595, ce qui donne pour répulsion totale 1097 + 595 ou 1692°.

Dans la troisième expérience, le fil a été tordu de 8 cercles. L'aiguille s'est arrêtée à 12° de son méridien magnétique ; la torsion a donc été 8 cercles + 12, ou 2892 ; il faut y ajouter la force directrice égale à 12 . 35° ou 420, ce qui donne pour répulsion totale 3312.

Ainsi dans ces expériences, où les arcs de répulsions sont assez petits pour qu'on puisse les confondre avec leurs cordes,

les distances sont. . . . . 12 ; 17 ; 24,
et les forces répulsives correspondantes . . 3312 ; 1692 ; 864.

On voit d'abord que la force répulsive s'affaiblit à mesure que la distance augmente, et même elle s'affaiblit plus rapidement que le rapport de la simple distance ; car la troisième distance 24 est double de la première, et la force répulsive 864 est beaucoup moindre que la moitié de 3312 ; elle n'est que le quart de cette première force. Essayons donc la raison inverse du carré des distances ; alors, en partant de la première force 3312, les autres devront être $3312 \cdot \frac{(12)^2}{(17)^2}$ et $3312 \cdot \frac{(12)^2}{(24)^2}$, ou 1650 et 828, au lieu de 1692 et 864 que l'expérience nous a donné. Les différences 42° et 36° répondent à peu près à un degré d'erreur sur la position observée du fil mobile, puisque la force directrice est de 35° pour chaque degré d'écart du méridien magnétique. Ainsi, en négligeant cette erreur, qu'on peut regarder comme bien petite dans des expériences de ce genre, nous pourrons en conclure que l'action réciproque des

deux aiguilles décroît comme le carré de la distance, et par conséquent les magnétismes de même nature, par lesquels cette action est produite, se repoussent aussi suivant cette loi.

Le petit écart que nous venons de trouver entre les répulsions observées et calculées n'indique même peut-être pas une erreur de l'expérience, ni une inexactitude de la loi qu'elles nous ont montrée; car nous n'opérons pas ici sur des points magnétiques, mais sur des portions de fil d'une certaine étendue, dont la configuration influe sur les résultats. En effet, dans la première expérience, où les deux fils ont été les plus rapprochés, l'influence des points voisins du recoupement était plus affaiblie par l'obliquité que dans les autres expériences; ou, en d'autres termes, il y avait, à obliquité égale, plus de points qui agissaient dans celles-ci que pendant la première. Or, ne tenant pas compte de cette augmentation dans notre calcul, nous devons trouver que la force répulsive de la première expérience, affaiblie selon le rapport du carré de la distance, donne des forces répulsives un peu plus faibles que celles qui sont réellement observées.

La même expérience, répétée sur les pôles de nom contraire, montre qu'ils s'attirent suivant la même loi, c'est-à-dire dans la raison aussi inverse du carré des distances. Cette loi d'attraction et de répulsion est donc commune au magnétisme et à l'électricité.

Ceci nous prouve, en outre, que nous avons pu légitimement négliger dans nos expériences l'action des pôles éloignés. Car les aiguilles ayant deux pieds de longueur, le plus grand arc de répulsion, qui a été de 24°, répondait à une distance de 5 pouces entre les pôles qui se regardaient; et par conséquent les autres pôles se sont toujours trouvés quatre fois au moins plus distans des pôles qui se regardaient, que ceux-ci ne l'étaient entre eux. Leur action directe était donc au moins 16 fois plus faible; mais elle était affaiblie bien davantage encore par l'extrême obliquité suivant laquelle elle s'exerçait. Il n'en serait pas de même, si l'on voulait faire les expériences avec des aiguilles beaucoup plus courtes. Il faudrait alors

avoir égard, par le calcul, à l'action réciproque de tous les pôles, et à la longueur du levier sur lequel chacune de ces actions s'exerce. Cela n'aurait aucune difficulté, en considérant tous ces pôles comme renfermant des quantités de magnétisme égales, distribuées sur une très-petite longueur vers les extrémités des aiguilles, et agissant suivant la raison inverse du carré des distances. On connaîtrait ainsi les intensités et les directions de leurs forces, soit attractives, soit répulsives, et il ne resterait plus qu'à les décomposer dans le plan horizontal de l'aiguille mobile, pour avoir les efforts qu'ils produisent sur sa rotation : mais il est beaucoup plus simple de faire les expériences sur des aiguilles assez longues pour que ces corrections soient inutiles; et l'on y trouve, de plus, l'avantage de diminuer les petites inexactitudes provenant de l'étendue sensible des pôles sur lesquels le magnétisme est distribué.

Coulomb a confirmé la loi du carré des distances par plusieurs procédés différens de celui que nous venons d'exposer. Mais comme celui-ci suffit pour l'établir, nous ne parlerons pas des autres ; on pourra les étudier dans ses Mémoires.

CHAPITRE VI.

Recherches de l'intensité du Magnétisme libre en chaque point d'une aiguille aimantée à saturation par la méthode de la double touche.

Ayant trouvé des procédés sûrs pour produire dans les barreaux de fer ou d'acier tout le développement de magnétisme qu'ils peuvent acquérir et conserver d'une manière durable, nous allons chercher, d'après l'expérience, quel est alors l'état magnétique de chacun de leurs points.

Pour plus de simplicité, commençons par considérer un fil d'acier cylindrique A B, fig. 28, d'un très-petit diamètre, et régulièrement aimanté par la méthode de la double touche. Alors le développement du magnétisme sera sensiblement égal, mais de nature contraire dans chacune de ses deux moitiés, et il décroîtra rapidement sur chacune d'elles, en allant des extrémités vers le centre. Si donc nous élevons en divers points du fil des ordonnées perpendiculaires pour représenter l'intensité du magnétisme libre, soit boréal, soit austral, ces ordonnées commenceront par être nulles au centre; de là elles iront en croissant également, et avec lenteur de part et d'autre de l'axe, jusqu'à une certaine distance. Après quoi elles croîtront rapidement jusqu'aux extrémités du fil, où elles atteindront leur maximum. Voilà tout ce que nos expériences précédentes nous permettent de conjecturer.

Pour déterminer maintenant les valeurs de ces ordonnées, suspendons à un fil de soie d'un seul brin une petite aiguille d'épreuve *a b*, fig. 29, déjà aimantée, et après l'avoir laissée se diriger dans le méridien magnétique, présentons-lui dans ce même méridien le fil A B, que nous tiendrons verticalement à une petite distance du pôle *a*. Cette opération ne changera

point la direction de l'aiguille *a b ;* mais si nous l'écartons un peu de son méridien, elle y reviendra plus rapidement que quand le fil n'agissait point sur elle, parce qu'elle s'y trouvera ramenée par les actions combinées de la terre et du fil. La première de ces forces peut s'évaluer aisément, en faisant d'abord osciller l'aiguille isolément par la seule influence de l'aimant terrestre; elle sera proportionnelle au carré du nombre d'oscillations qu'elle fera alors dans un temps donné, par exemple, dans une minute de temps. Si l'on observe de même le nombre d'oscillations que fait l'aiguille quand elle est à la fois sollicitée par cette force et par l'action du fil, on connaîtra de même par le carré de ce nombre l'action totale qu'elle éprouve alors, et en retranchant la partie dépendante du magnétisme terrestre, on aura séparément la mesure de l'action exercée par le fil. Or, dans ce cas, le point M situé à la hauteur de l'aiguille sera celui dont l'action se fera sentir davantage; d'abord, parce qu'il est le plus voisin de l'aiguille; ensuite, parce qu'il l'attire directement dans le plan horizontal où elle oscille; au lieu que les autres points situés au-dessus ou au-dessous agissent de plus loin et plus obliquement. A la vérité, l'influence de ces deux causes est très-faible sur les points du fil qui environnent M; mais si l'action d'un de ces points est plus forte que celle de M, celle du point situé de l'autre côté à la même distance sera plus faible d'une quantité à peu près égale; car quelle que soit la nature de la courbe A′ C B′ qui lie les différentes ordonnées, on peut toujours, lorsqu'on n'en considère qu'une très-petite étendue, lui substituer la ligne droite qui la toucherait. Ainsi, en vertu de cette substitution, la demi-somme des actions équidistantes exercée par les points voisins de M sera encore très-peu différente de celle de M. Il suit de là que dans chaque expérience la partie du fil dont l'action sera la plus énergique exercera une force totale presque exactement proportionnelle à celle du point M, et par conséquent à la quantité de magnétisme qui s'y trouve dans l'état de liberté. Seulement il ne faudra pas étendre cette proportionnalité jusqu'à l'extrémité du fil, ni même à une très-petite distance de cette extrémité; car

alors les points situés au-delà du fil devenant assez voisins pour que leur absence fût sensible, l'action éprouvée par l'aiguille ne serait pas la même que si le fil était continué. Par exemple, lorsqu'elle oscille devant l'extrémité même, la force qui la sollicite n'est que la moitié de celle qui agirait sur elle, s'il y avait dans le prolongement du fil un autre fil égal, et par conséquent les forces observées alors seront à peu de chose près la moitié de celles que l'on devrait obtenir si le fil était continué avec la loi de magnétisme qu'il possède. Ainsi, pour que les résultats observés dans cette circonstance soient comparables à ceux que l'aiguille présente quand elle oscille devant les autres points où le fil la sollicite par-dessus et par-dessous, il faudra y doubler le nombre qui représente le carré des oscillations. C'est ce que faisait Coulomb, et nous verrons tout-à-l'heure que cette correction est fort approchée de la vérité.

Je dois prévenir une objection qui pourrait se présenter ici naturellement. Lorsque nous avons cherché la loi des répulsions et des attractions magnétiques à diverses distances, nous avons considéré à la fois tout le magnétisme d'un même pôle, comme s'il agissait tout entier dans le plan horizontal de l'aiguille mobile, et qu'il y fût concentré en un seul point; tandis qu'à présent nous disons que l'action des différens points de ce pôle qui sont au-dessus et au-dessous du plan de l'aiguille sera fort affaiblie par l'obliquité. Mais c'est que, dans les deux cas, la distance de l'aiguille mobile au fil fixe est bien différente. Dans nos premières expériences, le pôle de l'aiguille mobile était toujours éloigné de l'aiguille fixe à une distance considérable, comparativement à l'espace sur lequel le magnétisme libre était distribué. A présent, au contraire, cet espace est considérable, relativement à la distance de la petite aiguille. Cette modification rend l'influence de l'obliquité beaucoup plus grande. L'action des points situés au-dessus et au-dessous du plan de l'aiguille décroît en conséquence avec beaucoup plus de rapidité, et l'action totale est toujours à peu près la même que si le fil était continué indéfiniment de part et d'autre du plan de l'aiguille avec la même intensité magnétique que possède le point qui se

trouve actuellement devant elle. Voilà pourquoi cette action ainsi observée est sensiblement proportionnelle à la quantité de magnétisme libre qui existe en ce point.

Il faut apporter à ces expériences deux précautions importantes; la première, c'est d'employer des fils assez longs pour qu'en observant l'action d'une de leurs extrémités sur l'aiguille, on n'ait pas besoin d'avoir égard à l'action de l'autre extrémité; la seconde, c'est que l'aiguille, quoique petite et facilement mobile, soit cependant assez forte et faite d'un acier assez dur pour que son magnétisme ne soit pas sensiblement modifié par l'action du fil; car si cela avait lieu, les expériences faites devant divers points ne seraient plus comparables, puisque la partie de l'action qui dépend de l'aiguille varierait. C'est ce qui est arrivé à Coulomb dans ses premières expériences, où il employait une petite aiguille de deux lignes de longueur, placée à trois lignes de distance du fil. Cette aiguille, abandonnée à la seule action de l'aimant terrestre, donnait des signes de magnétisme très-faible; mais dès qu'elle était placée devant le fil à trois lignes de distance, son état magnétique augmentait considérablement, et en la présentant à l'une ou à l'autre extrémité du fil, elle changeait subitement de pôle.

Averti par ces phénomènes, Coulomb employa une aiguille plus forte, qui avait trois lignes de diamètre, et six lignes de longueur; le diamètre du fil aimanté était de deux lignes, et sa longueur vingt-sept pouces; il pesait 865 grains le pied. De peur qu'il n'opérât quelque changement dans le magnétisme de l'aiguille, il la lui présenta de plus loin, à 8 lignes de distance, et il mesura le nombre N d'oscillations qu'elle faisait en une minute de temps, lorsqu'elle se trouvait ainsi devant différens points. Il avait de plus observé précédemment le nombre n d'oscillations qu'elle faisait dans le même temps par la seule action du magnétisme terrestre; la différence des carrés $N^2 - n^2$ exprimait donc dans chaque expérience l'action réciproque de l'aiguille et du fil, action qui, comme nous l'avons dit plus haut, devait être à peu de chose près proportionnelle à l'intensité du magnétisme libre dans le point du fil devant lequel l'ai-

guille avait oscillé. Portant donc ces résultats sur les abscisses correspondantes, Coulomb obtint la courbe d'intensités représentée fig. 30. La dernière ordonnée a été évaluée par une méthode empirique qui revenait à peu près à doubler le carré du nombre des oscillations, et l'on peut aisément s'en apercevoir; car dans d'autres expériences de ce genre sur des fils d'un diamètre à peu près pareil, on voit toujours que le nombre des oscillations faites devant l'extrémité même du fil est presque la même qu'à six lignes de distance de l'extrémité. Ici la moitié de la dernière ordonnée 165 diffère peu de la seconde, qui se trouve égale à 90. Malheureusement, dans l'exposé de cette expérience qui a été faite avec un soin extrême, Coulomb n'a rapporté que des forces observées, et non pas les nombres mêmes des oscillations; et dans d'autres cas où il les a rapportés, les expériences sont affectées par la variation du magnétisme de l'aiguille (1). Mais à l'exception de cette dernière ordonnée qui s'écarte peu de la vérité, comme nous le verrons par la suite, tout le reste de la courbe est immédiatement tiré des observations.

En admettant donc la proportionnalité des forces et des intensités magnétiques, cette courbe nous offre la confirmation de tout ce que les expériences précédentes nous avaient fait prévoir relativement à la distribution du magnétisme libre et à la grande intensité de son développement vers les extrémités.

Coulomb recommença l'expérience avec le même fil, en changeant seulement sa longueur, toutes les autres circonstances restant les mêmes. Il trouva alors que, quelque fût cette longueur, pourvu qu'elle excédât six ou sept pouces, les trois pre-

---

(1) Ceci ne s'applique qu'aux observations consignées dans les mémoires que nous analysons. A la vérité, on en trouve d'autres dans le premier Mémoire de Coulomb sur la loi des attractions magnétiques; mais la distance du fil aimanté à l'aiguille d'épreuve y est beaucoup trop grande pour que l'on puisse regarder les intensités comme proportionnelles aux forces attractives. Cette proportionnalité, indispensable dans la recherche qui nous occupe, ne l'était pas du tout pour celle que Coulomb se proposait alors.

miers pouces et les trois derniers donnaient toujours presque exactement les mêmes résultats que dans le fil de 27 pouces de longueur; de sorte que l'intensité du magnétisme libre était sensiblement la même depuis les extrémités de ces fils jusqu'à trois pouces de distance; après quoi elle devenait également faible et insensible sur les uns comme sur les autres, ou, en d'autres termes, la courbe des intensités ne faisait que se transporter aux bouts des fils, sans changer de forme dans cette partie; et ce n'était qu'après s'être fort abaissé vers l'axe que ses ordonnées se soutenaient plus ou moins long-temps, de manière à n'être exactement nulles qu'au centre du fil. Cette constance des ordonnées extrêmes pour tous les fils de même nature indique avec évidence que le magnétisme libre a reçu dans cette partie un degré de développement qu'il ne peut dépasser; et ce résultat est parfaitement conforme à l'idée que nous nous étions faite de l'état de saturation. Coulomb trouva moins de constance dans les petites ordonnées de la courbe, près du milieu des fils, et il reconnut même que dans les fils très-longs ces ordonnées variaient accidentellement quelquefois jusqu'à passer du positif au négatif, résultat tout simple, si l'on considère que toutes ces inversions constituent autant d'états d'équilibres possibles, et que les circonstances les plus légères, comme un contact un peu inégalement prolongé dans l'aimantation, ou même l'action propre des pôles du fil sur son centre, suffisent pour les développer.

En considérant la courbe tracée par Coulomb seulement comme une représentation approchée des intensités véritables, nous pouvons nous en servir pour vérifier la méthode d'observation qui a servi à la former. Car en l'admettant comme vraie, et partant de la loi du carré des distances, il n'y a qu'à calculer l'action totale qui doit en résulter sur l'aiguille dans chacune des portions du fil, et voir si cette action est réellement proportionnelle à l'intensité du magnétisme libre dans le point devant lequel la petite aiguille oscille. On peut même, pour faciliter le calcul, substituer à la courbe véritable le système de deux droites qui se coupent, telles que CM, CN,

fig. 31, et dont les inclinaisons soient propres à représenter approximativement les variations des forces observées. Si l'on fait ce calcul pour un pareil système, on trouvera que, depuis le centre du fil jusqu'à un pouce des extrémités, les intensités sont presque exactement proportionnelles aux forces attractives; aux extrémités mêmes, le rapport des intensités aux forces devient un peu plus que double; en sorte qu'en doublant la force observée à l'extrémité, on aura une valeur très-approchée de l'intensité correspondante ramenée à la même échelle que les autres, quoique cependant un peu trop faible. C'est ce qu'a fait Coulomb, et par conséquent nous pouvons regarder la courbe qu'il en a déduite comme fort peu différente de la véritable.

Maintenant il faut chercher à reconnaître la nature de cette courbe, et à former son équation analytique. Pour cela, laissons-nous guider par les analogies que nous avons découvertes entre les fils aimantés par la méthode de la double touche et les piles électriques isolées. Relativement à ces dernières, en nommant N le nombre total de leurs élémens, et représentant par A B les charges électriques opposées de leurs élémens extrêmes A et B, nous avons vu que l'électricité de A, que je supposerai vitrée, dissimulait dans la n^e plaque une quantité d'électricité résineuse exprimée par $A\mu^n$, et que l'électricité de B dissimulait dans ce même élément une quantité d'électricité exprimée par $B\mu^{N-n}$, μ étant une constante; de sorte que la quantité y d'électricité libre dans cet élément était

$$y = A\mu^n - B\mu^{N-n},$$

qui se réduit à $$y = A(\mu^n - \mu^{N-n}),$$

lorsque l'on suppose les charges extrêmes égales entre elles.

Les raisonnemens qui nous ont conduits à cette formule sont encore applicables au cas des fils aimantés par la méthode de la double touche. En effet, quoique la séparation des magnétismes naturels ne se fasse dans ces fils qu'avec effort, tandis que, dans les piles, la séparation des deux électricités se fait librement, il ne faut pas dans l'acte de l'aimantation avoir égard à cette résistance qui est vaincue par l'action des

aimans extérieurs, sous l'influence desquels le fil est touché ; on peut donc y regarder alors la décomposition du magnétisme comme parfaitement libre. Ainsi, puisque l'on sait par expérience que les deux charges extrêmes sont définitivement égales entre elles, chacune d'elles dissimulera nécessairement la quantité de magnétisme prescrite par la formule ; il s'opérera dans les magnétismes naturels la séparation nécessaire pour satisfaire à ces attractions, et les différences des quantités de l'un et de l'autre magnétisme, ainsi dissimulées, composeront l'excès que chaque élément gardera. Seulement comme, dans le cas du magnétisme, le nombre des élémens est infini, il faudra faire une petite modification à la formule. Soit $2l$ la longueur totale du fil aimanté, x la distance rectiligne depuis l'extrémité A jusques à l'élément dont le rang est n, il est clair que, si, sur une longueur fixe (l), il y a un nombre d'élémens ferrugineux exprimé par (n), il y en aura proportionnellement $\frac{2l(n)}{(l)}$ sur la longueur $2l$, et $\frac{2x(n)}{(l)}$ sur la longueur x; de sorte qu'en substituant ces nouvelles expressions au lieu de N et de n, l'équation des intensités prendra la forme

$$y = \mathrm{A}\left[\mu^{\frac{(n)}{(l)}\cdot x} - \mu^{\frac{(n)}{(l)}(2l-x)}\right].$$

On peut représenter $\mu^{\frac{(n)}{(l)}}$ par une seule lettre μ, qui désignera une autre constante dans laquelle l'exposant $\frac{(n)}{(l)}$ sera le même pour toutes les verges de fer de même nature, quels que soient leur forme et leur diamètre ; alors on aura simplement

$$y = \mathrm{A}\left(\mu^{x} - \mu^{2l-x}\right).$$

Si les analogies qui nous ont guidés ne sont pas trompeuses, ce doit être là l'équation de la courbe des intensités magnétiques pour notre fil ; la valeur de y indiquera la quantité et la nature du magnétisme libre en chacun des points de sa longueur : cherchons à vérifier ces inductions.

D'abord, à la première extrémité du fil, x est nul, et la valeur de y se réduit à $A(1-\mu^{2l})$. A l'autre extrémité, x est égal à $2l$, et la valeur de y devient $-A(1-\mu^{2l})$ la même, au signe près que la précédente. Depuis, chacune de ces limites jusqu'au milieu du fil, la quantité du magnétisme libre va toujours en diminuant également, sans changer de nature ; et l'une et l'autre devient nulle au milieu du fil, où x est égal à l; tout cela se lie parfaitement avec les observations.

Mais allons plus loin. Déterminons les constantes A et μ, d'après deux observations, et voyons comment les autres se trouveront représentées. Pour cela, employons la seconde ordonnée et la cinquième, dont les longueurs sont indiquées dans la fig. 30; nous aurons, en prenant le pouce pour unité de longueur,

$$x=1 \quad y=90,$$
$$x=4{,}5 \quad y=9,$$

ce qui donne

$$90=A(\mu-\mu^{26}),$$
$$9=A(\mu^{4,5}-\mu^{22,5}).$$

On verra tout-à-l'heure que, pour notre fil, μ est une fraction peu différente de $\frac{1}{2}$. Ainsi l'on peut, sans scrupule, négliger sa 26e et sa 22e puissance, comparativement à μ et à $\mu^{4,5}$. Alors nos deux équations de condition se réduisent à

$$90=A\mu \qquad 9=A\mu^{4,5}.$$

En divisant la seconde par la première, membre à membre, on trouve

$$\mu^{3,5}=\tfrac{1}{10}, \quad \text{d'où} \quad \log\mu=\bar{1},7142857, \quad \text{et} \quad \mu=0,517948.$$

Cette valeur étant connue, on en tire

$$A=\frac{90}{\mu}=173,76.$$

Nos deux constantes étant ainsi déterminées, nous pouvons calculer les ordonnées de la courbe pour une abscisse quelconque, et les comparer aux observations; nous formerons ainsi le tableau suivant :

Distance à l'extrémité boréale du fil, en pouc.	Intensités du magnétisme libre par le calcul.	par l'observation.	Excès du calcul.
0	173,76	165 +	+ 8,76 —
1	90,00	90	0
2	46,62	48	— 1,38
3	24,14	23	+ 1,14
4,5	9,00	9	0,00
6	3,35	6	— 2,65

La première ordonnée 165 n'est pas donnée immédiatement par l'expérience. Coulomb l'a conclue en doublant le nombre des oscillations observées; mais lui-même a indiqué que ce procédé devait donner une valeur un peu trop petite. Les autres erreurs sont très-faibles, et leurs signes alternent en plus et en moins. La dernière est la plus sensible; mais, comme nous l'avons dit, Coulomb a plusieurs fois remarqué que, dans les parties faiblement aimantées des barres et des fils, la distribution du magnétisme devient beaucoup moins régulière que vers les pôles; et cela doit en effet arriver, puisque les plus faibles causes peuvent alors y apporter de petites altérations qui n'influent pas sensiblement sur l'état des extrémités. Par exemple, dans l'expérience que nous calculons, il est extrêmement probable que la petite aiguille, parvenue à six ou sept pouces de distance de l'extrémité du fil, agissait sensiblement sur les magnétismes naturels des points devant lesquels elle oscillait, ce qui devait y augmenter les ordonnées conclues de ses oscillations; et cela suffit pour avoir occasioné le petit excès que l'on remarque en cet endroit dans les intensités observées (1).

(1) D'après des expériences que l'on verra plus loin, cette distribution du magnétisme dans notre fil indique qu'il avait été recuit.

En calculant les résultats de notre formule pour cette première moitié du fil, sur toute la longueur où l'aimantation est sensible, l'action de l'autre extrémité peut être tout-à-fait négligée; car même dans la dernière observation où $x=6$, le second terme μ^{2l-x} devient μ^{21}, et est absolument insensible; de sorte que, dans toute la portion précédente, il suffit de calculer la courbe avec le premier terme $A\,\mu^{x}$. Mais si l'on approchait davantage du centre, cette simplification ne serait plus légitime, et il faudrait employer les deux termes de la formule, qui deviendraient alors comparables entre eux.

Nous avons vu que le produit $A\,(1-\mu^{2l})$ exprime la quantité de magnétisme libre qui existe à chaque bout du fil sur l'étendue d'une section transversale. Si l'on suppose que l'aimantation a été portée au degré de saturation, cette quantité ne doit dépendre que de la force coercitive, et nullement de la longueur du fil. Ainsi, pour satisfaire à cette condition, il faudrait que la constante A fût réciproque à $1-\mu^{2l}$. Mais cela suppose que l'on atteigne rigoureusement le degré de saturation, et c'est ce qui n'est peut-être pas parfaitement certain. Si l'on supposait, par exemple, que la constante A contînt un facteur de la forme $\frac{(1+\mu^{\alpha l})}{1-\mu^{\alpha l}}$, α étant un nombre positif et plus grand que l'unité, l'intensité du magnétisme libre dans les sections extrêmes deviendrait
$$\frac{B\,(1-\mu^{2l})\,(1+\mu^{\alpha l})}{1-\mu^{\alpha l}},$$
B étant une autre constante; et lorsque l serait assez considérable pour que μ^{2l} et $\mu^{\alpha l}$ fussent insensibles, cette intensité paraîtrait avoir toujours la même valeur; mais dans les longueurs très-petites, la différence pourrait devenir appréciable. J'ai trouvé en effet que, pour le fil que nous considérons, il y avait de l'avantage à employer ce facteur en faisant $\alpha=6$, ce qui donne à l'équation des intensités magnétiques la forme
$$y=B\,\frac{(1+\mu^{6l})}{1-\mu^{6l}}\cdot(\mu^{x}-\mu^{2l-x}).$$

Quant à la constante μ, elle exprime la proportion de magné-

tisme qui se dissimule d'une section à une autre à travers l'épaisseur des particules ; elle est donc également indépendante de la longueur du fil, et elle restera ainsi la même dans tous les morceaux qu'on pourra couper.

Or, tant que ces morceaux seront assez longs pour que les termes μ^{6l} et μ^{2l-x} soient insensibles dans la partie où le développement du magnétisme est appréciable à l'expérience, les intensités y seront encore représentées comme tout-à-l'heure par le seul premier terme $B\mu^x$, et la longueur $2l$ n'entrera absolument pour rien dans leur valeur ; ce sera donc toujours la même courbe qui se reportera aux extrémités de chaque fil, et sa forme ne commencera à différer que dans les parties les plus voisines du centre. C'est en effet ce que l'expérience nous a montré ; car en présentant à l'aiguille d'épreuve des morceaux du même fil dont la longueur surpassait une certaine limite, cinq ou six pouces, par exemple, les trois premiers pouces de chacun d'eux ont produit sur l'aiguille absolument les mêmes effets.

Mais nous pouvons encore soumettre ce résultat de nos formules à une épreuve plus rigoureuse, en exposant divers morceaux du même fil à l'action du magnétisme terrestre. Alors chacun de leurs points sera attiré ou repoussé avec une force proportionnelle à son intensité magnétique. Toutes ces forces, ayant des directions parallèles, se composeront sur chaque moitié du fil en une seule, comme les efforts de la gravité se composent dans les corps pesans ; et, dans toutes les positions possibles du fil, leur résultante passera toujours par un même point. Il y aura donc sur chaque moitié un centre d'action magnétique, comme il y a un centre de pesanteur dans les corps graves, et il sera placé sur l'abscisse correspondante au centre de gravité de l'aire de la courbe des intensités. Or, l'équation de cette courbe est

$$y = \frac{B(1+\mu^{\alpha l})}{1-\mu^{\alpha l}} \cdot (\mu^x - \mu^{2l-x}).$$

Considérant une seule de ces branches, et nommant x' l'abscisse

de son centre de gravité comptée de l'extrémité du fil, on trouve par les règles de la mécanique

$$x' = \frac{-2\,l\,\mu^l - \dfrac{(1-\mu^{2l})}{\log'\mu}}{(1-\mu^l)^2}.$$

En représentant par Z l'aire de cette partie de la courbe, on a aussi

$$Z = \frac{-B.(1+\mu^{\alpha l})(1-\mu^l)^2}{\log'\mu.(1-\mu^{\alpha l})}.$$

Log$'\mu$ désigne le logarithme hyperbolique de μ, qui se déduit du logarithme tabulaire par la formule connue

$$\log'\mu = \text{M}\log\mu\,; \qquad \text{M} = 2{,}3025809.$$

Ici nous avons trouvé $\log\mu = \bar{1}{,}7142857$; ou, en effectuant la soustraction indiquée sur la caractéristique négative

$$\log\mu = -\,0{,}2857143,$$

par conséquent

$$\log'\mu = -\,0{,}6578813 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\log'\mu} = -\,1{,}52003.$$

L'expression précédente de x' étant retranchée de l, donne

$$l - x' = \frac{l(1+\mu^{2l}) + \dfrac{(1-\mu^{2l})}{\log'\mu}}{(1-\mu^l)^2},$$

$l - x'$ est la distance du centre de gravité de chaque branche au milieu du fil. C'est le bras de levier par lequel agit la résultante des forces directrices pour faire tourner le fil, quand il est suspendu horizontalement par son milieu. Ainsi, en multipliant $l - x'$ par l'aire Z de la courbe des intensités, et par la force du magnétisme terrrestre décomposée horizontalement dans le méridien magnétique, composante que nous nommerons H, on aura le moment statique de cette force, en la supposant appliquée perpendiculairement au fil ; la valeur de ce moment sera donc

$$-\frac{\text{BH}(1+\mu^{\alpha l})}{\log'\mu(1-\mu^{\alpha l})}\left[l(1+\mu^{2l}) + \frac{(1-\mu^{2l})}{\log'\mu}\right].$$

Chaque moitié donnera un résultat pareil ; et comme les forces qui les sollicitent conspirent à faire tourner l'aiguille, le mo-

ment total de la force directrice sera égal à la somme de ces résultats. Si le fil, au lieu d'être perpendiculaire au méridien magnétique, faisait avec lui un angle a, le moment serait égal à la valeur précédente multipliée par sin a; et en le désignant par Q, on aura

$$Q = -\frac{2BH(1+\mu^{\alpha l})}{\log'\mu(1-\mu^{\alpha l})}\left[l(1+\mu^{2l})+\frac{(1-\mu^{2l})}{\log'\mu}\right]\sin a.$$

Développons les conséquences de ces formules, et cherchons à les vérifier par l'expérience.

Pour le faire avec simplicité, considérons d'abord des longueurs assez grandes pour que μ^{2l} et $\mu^{\alpha l}$ soient insensibles. Cela aura lieu, par exemple, quand $2l$ surpassera six pouces; car, d'après nos précédens calculs, la valeur de μ pour notre fil est peu différente de $\frac{1}{2}$, et la sixième puissance de $\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{64}$, qui peut bien être négligée vis-à-vis de l'unité. A plus forte raison pourra-t-on négliger $\mu^{\alpha l}$, puisque dans notre fil $\alpha = 6$. Dans ce cas, les termes multipliés par μ^{2l} disparaissent de la formule, et il reste

$$Q = -\frac{2BH}{\log'\mu}\left(l+\frac{1}{\log'\mu}\right)\sin a.$$

Alors, pour chaque valeur donnée de a, le moment statique de la force terrestre se compose d'une quantité constante et d'un terme proportionnel aux longueurs. Par conséquent, si l'on expose successivement à l'action de cette force différens morceaux d'inégale longueur, en les écartant tous également du méridien magnétique, les forces de torsion qu'il faudra employer pour les maintenir à cette distance augmenteront proportionnellement à l'accroissement des longueurs.

Coulomb a fait cette expérience sur divers morceaux du fil, pour lequel nous avons déjà déterminé la valeur de μ. En les plaçant dans la balance, et les retenant par la torsion à 30° de distance du méridien magnétique, il a obtenu les résultats suivans :

Longueur en pouces. $2l$.	Torsion.	Variation des torsions pour une différence de trois pouc. dans la longueur.
18	288°	
12	172	58
9	115	57
6	59	56
4,5	34	50
3	13	42
1,5	3	20
1	1,46	3,08
0,5	0,32	2,28

Ce tableau confirme parfaitement les indications de la formule. Dans les deux premières expériences, la différence des longueurs est 6 pouces, et la différence des torsions 116° ; ce qui donne 58° pour une diminution de 3 pouces dans la longueur. En effet, comparant la seconde expérience à la troisième, la diminution des longueurs a été 3 pouces, et la diminution de la force 57°. Même résultat à peu près de la troisième à la quatrième ; mais de celle-ci à la suivante, la longueur n'étant plus que de 4,5, la différence commence à s'affaiblir d'une manière très-notable ; aussi ne peut-on plus alors supposer μ^{2l} tout-à-fait insensible. C'est donc ici le cas d'employer l'expression rigoureuse de Q. Pour cela, il faudra en déterminer le coefficient $2BH \sin a$, qui renferme la nouvelle constante H, dépendante de l'intensité du magnétisme terrestre. Une seule observation suffit à cet effet, puisque nous connaissons déjà la valeur de μ ; mais il vaut mieux essayer cette détermination sur plusieurs observations successivement, soit afin d'obtenir plus d'exactitude par leur ensemble, soit afin de vérifier si ce coefficient peut, dans la réalité, être regardé comme constant. Employant ainsi les quatre premières observations, et représentant par C la quantité $-\frac{2BH \sin 30^0}{\log' \mu}$, qui est constante

pour toutes les longueurs du même fil, on trouve

$2l = 18 \ldots\ldots \log C = 1{,}5854886$
$2l = 12 \ldots\ldots \quad 1{,}5839803$
$2l = 9 \ldots\ldots \quad 1{,}5841342$
$2l = 6 \ldots\ldots \quad 1{,}5757171$

Moyenne... $\log C = 1{,}5823300$ $\qquad C = 38{,}223$;

ce qui donne pour toutes les longueurs

$$Q = \frac{C(1 + \mu^{\alpha l})}{(1 - \mu^{\alpha l})} \left[l(1 + \mu^{2l}) + \frac{(1 - \mu^{2l})}{\log' \mu} \right].$$

Je n'emploie que ces quatre observations pour déterminer C, parce que, dans les petites longueurs, la moindre erreur d'expérience aurait sur C une influence énorme; les résultats y dépendant beaucoup plus de μ que de C.

La valeur que nous obtenons ici pour C exprime la diminution constante que le moment statique de la force terrestre éprouve dans les grandes longueurs, pour une diminution de 1 pouce dans la valeur de l, et par conséquent pour une diminution de 2 pouces sur la longueur totale $2l$. Or, la simple comparaison des deux premières expériences nous avait donné tout-à-l'heure 116° pour une diminution de 6 pouces, ce qui fait 38,66 pour 2 pouces. Ce résultat diffère bien peu de celui que nous venons d'obtenir pour C. Employant donc cette valeur, et celle de μ, que nous avons plus haut déterminée, calculons la torsion relativement à toutes les expériences : nous formerons ainsi le tableau suivant :

Longueur totale $2l$.	Moment calculé.	Moment observé.	Excès du calcul.
18	285,913	288	— 2°,087
12	171,347	172	— 0, 653
9	114,523	115	— 0, 477
6	59,905	59	+ 0, 905
4,5	35,366	34	+ 1, 366
3	15,356	13	+ 2, 356
1,5	3,229	3	+ 0, 229
1	1,326	1,46	— 0, 134
0,5	0,326	0,32	+ 0, 006

L'erreur la plus forte ne va jamais à $2°,4$; et quelque soin que l'on prenne pour observer les angles de torsion, il paraît difficile de répondre de plus près que ces quantités. D'ailleurs, les signes des erreurs alternent tantôt en plus, tantôt en moins; ainsi notre formule représente bien les observations.

Dans tous les calculs qui précèdent, nous avons employé pour μ la valeur résultante des observations faites avec l'aiguille d'épreuve. Mais, à défaut d'observations pareilles, on pourrait encore déterminer μ aussi bien que C, d'après les seules valeurs des momens. En effet, en supposant les longueurs assez grandes pour que μ^{2l} soit négligeable, nous avons vu que l'on avait généralement

$$Q = C\left(l + \frac{1}{\log' \mu}\right).$$

Si l'on a observé deux momens Q' et Q'' pour deux longueurs connues $2l'$ et $2l''$, on en tirera ces deux conditions :

$$Q' = C\left(l' + \frac{1}{\log' \mu}\right) \qquad Q'' = C\left(l'' + \frac{1}{\log' \mu}\right),$$

qui suffisent pour déterminer simultanément nos deux constantes C et $\log' \mu$. On aura la première en les soustrayant l'une de l'autre, et la seconde en prenant leur rapport; ce qui donne

$$C = \frac{Q' - Q''}{l' - l''} \qquad \log' \mu = - \frac{(Q' - Q'')}{Q' l'' - Q'' l'}.$$

Prenons, par exemple, les observations faites par Coulomb sur les longueurs de 18 et de 12 pouces, les données seront alors

$$\begin{array}{ll} l' = 9 & Q' = 288 \\ l'' = 6 & Q'' = 172, \end{array}$$

et l'on en tire

$$C = 38,667 \quad \log' \mu = -0,644444;$$

par conséquent $\log \mu = \bar{1},7201213.$

Nous avions trouvé par la première méthode

$$C = 38,223, \qquad \log \mu = \bar{1},7142857.$$

La différence est à peine sensible; et si l'on employait la nouvelle valeur de μ, pour calculer la courbe des intensités, on

trouverait qu'elle les donne tout aussi bien que celle que nous avions déduite des oscillations même de l'aiguille d'épreuve.

Ceci va nous servir pour déterminer les constantes C et μ, relativement à un autre fil d'acier dont Coulomb a observé pareillement les forces directrices sous diverses longueurs, mais dont il n'a point mesuré les intensités magnétiques. Ce fil était de même nature que le précédent, mais beaucoup plus mince; car il pesait seulement 38 grains le pied, au lieu de 865. En mettant différentes longueurs de ce fil dans la balance, les retenant de même à 30° degrés du méridien magnétique avec la même suspension, Coulomb a trouvé les relations suivantes entre les torsions et les longueurs :

Longueurs. $2l$.	Torsion.
12	11,50
9	8,50
6	5,30
3	2,30
2	1,30
1	0,35
0,5	0,07
0,25	0,02

Ici les forces directrices sont beaucoup moindres que pour le premier fil à longueur égale. Mais les différences des momens commencent de même par être proportionnelles aux différences des longueurs, comme dans les expériences faites avec le premier fil. En effet, en comparant d'abord les deux premières observations, la difference des momens est 3°, et celle des longueurs est 3 pouces; ce qui fait 1° par pouce, et ce résultat se soutient sensiblement jusqu'à ce que le fil n'ait plus que 1 pouce de longueur.

En employant les deux premières observations pour déterminer C et μ, les données sont

$$l' = 6 \qquad Q' = 11,5,$$
$$l'' = 4,5 \qquad Q'' = 8,5 ;$$

d'où l'on tire $C = 2$, $\log' \mu = -4$,

et par conséquent $\log \mu = \bar{2},2628210$.

Ces valeurs sont toutes deux beaucoup plus faibles que pour l'autre fil. Si l'on effectue les calculs qui les donnent, on verra que celle de μ est la moins certaine, parce qu'elle est extrêmement influencée par les plus petites erreurs des observations; et en consultant leur ensemble, je trouve qu'on y satisfait mieux en supposant

$$C = 2, \quad \log' \mu = -3,1388, \quad \text{d'où} \quad \log \mu = \bar{2},6368359.$$

En effet, en calculant toutes les observations avec ces valeurs, et prenant comme pour le premier fil $\alpha = 6$, on trouve les résultats suivans :

Longueurs. $2l$.	Forces directrices calculées.	Forces directrices observées.	Excès du calcul.
12	11, 363	11°,50	— 0,137
9	8,363	8, 50	— 0,137
6	5,363	5, 30	+ 0,063
3	2,363	2, 30	+ 0,063
2	1,368	1, 30	+ 0,068
1	0,434	0, 35	+ 0,084
0,5	0,102	0, 07	+ 0,032
0,25	0,021	0, 02	+ 0,001

L'accord du calcul et de la formule est, comme on voit, aussi approché que l'on puisse le désirer. En faisant attention aux nombres rapportés par Coulomb, il serait possible que l'on s'étonnât qu'il y ait conservé jusqu'à des centièmes et des millièmes de degré; mais il faut savoir qu'il ne les observait pas directement tels qu'ils sont ici rapportés. Il employait pour suspension un fil d'argent très-fin, dont la force de torsion n'était que la trentième partie de celle du fil de cuivre n° 12, et il ramenait tous les résultats à ce dernier cas, en divisant par 30 les torsions observées. On conçoit aisément l'emploi d'un fil de suspension plus fin pour avoir une mobilité plus grande; mais on

ne voit pas bien la nécessité de la réduction au fil n° 12, et lui-même ne l'a pas indiquée. On peut penser que son but a été d'atténuer ainsi les irrégularités des observations partielles qui auraient pu paraître trop grandes, s'il les eût immédiatement énoncées; car lorsque l'on emploie un fil de suspension très-fin, comme on a plus de mobilité dans l'aiguille, on a aussi dans les observations partielles des variations plus étendues.

Nous avons dit que notre premier fil pesait 865g le pied, tandis que le second n'en pèse que 38. En prenant la racine carrée du rapport de ces nombres, on a

$$\sqrt{\frac{865}{38}} = 4{,}7711.$$

Mais si l'on prend de même le rapport des $\log \mu$, relativement aux deux fils, on trouve pareillement

$$\frac{\log \mu''}{\log \mu'} = 4{,}7711.$$

Ainsi, dans ces deux fils, les logarithmes de μ sont réciproquement proportionnels aux racines carrées des poids, et par conséquent aux rayons des fils ou aux contours de leurs sections transversales.

Quant aux valeurs de C, elles paraissent s'approcher beaucoup du rapport direct des poids, c'est-à-dire de celui des surfaces mêmes des sections; car on a

$$\frac{C'}{C''} = \frac{38{,}6666}{2} = 19{,}3333, \quad \text{et} \quad \frac{P'}{P''} = \frac{865}{38} = 22{,}7633.$$

Ici le rapport $\frac{C'}{C''}$ est un peu moindre que $\frac{P'}{P''}$; mais cela peut tenir à la différente nature de l'acier dont étaient faits ces deux fils; car Coulomb n'a employé aucune précaution pour qu'elle fût la même. En effet, d'autres expériences nous montrerons plus loin que, pour la même nature d'acier, les valeurs de C sont exactement proportionnelles aux surfaces.

Connaissant μ et C pour nos deux fils, nous pouvons calculer quelle est la position du centre des forces magnétiques dans chacun des morceaux que nous en avons éprouvé; car en nom-

mant x' la distance de ce centre à l'extrémité du fil, nous avons trouvé

$$x' = -\frac{2\,l\,\mu^l + \dfrac{(1-\mu^{2l})}{\log'\mu}}{(1-\mu^l)^2}.$$

Dès que la longueur sera assez grande pour que μ^l et μ^{2l} puissent être considérées comme insensibles, les termes multipliés par ces quantités disparaîtront, et il restera simplement

$$x' = -\frac{1}{\log'\mu};$$

c'est-à-dire que les distances du centre des forces magnétiques à l'extrémité des fils sont alors réciproques aux logarithmes népériens de μ. Or, ce logarithme, toujours négatif, est d'autant plus grand, que les fils sont plus minces, leur substance étant la même. Ainsi, à longueur égale, plus le fil est mince, plus le centre des forces se rapproche des extrémités.

Dans notre premier fil, on a

$$\frac{1}{\log'\mu} = -1{,}52003;\quad \text{par conséquent}\quad x' = 1{,}52003.$$

c'est-à-dire que, dans tous les morceaux de ce fil, dont la longueur est assez grande pour que μ^l soit insensible, le centre des forces est à $\frac{152}{100}$ de pouce, ou environ 18 lignes des extrémités.

Si l'on suppose $l = 12^p$, et qu'on emploie la formule rigoureuse, on trouve $x' = 1{,}412$.

Ainsi, depuis l'infini jusqu'à 24 pouces de longueur totale, la distance du centre des forces aux extrémités du fil ne varie que de $0^p{,}108$ ou environ $1^{lig}\,\frac{3}{10}$.

A mesure que l'on diminue la longueur, x' devient moindre, et le centre des forces se rapproche des extrémités. Par exemple, pour un morceau de trois pouces de longueur, on aura $l = 1{,}5$, et en employant la formule rigoureuse, il viendra

$$x' = 0{,}48432,\qquad \text{ou en lignes},\qquad x' = 5^{lig}\,8,$$

c'est-à-dire un peu moins de six lignes; mais quand l devient fort petit, le calcul de x' peut se faire d'une manière plus simple; car en développant μ^l et μ^{2l} en série, et supprimant les

facteurs communs entre le numérateur et le dénominateur, on trouve, toute réduction faite,

$$x' = \frac{l(1 + l \cdot \log'\mu + \frac{11}{20} l^2 \log'^2 \mu \ldots)}{3(1 + \frac{l}{1.2}\log'\mu + \frac{l^2}{1.2.3}\log'^2\mu \ldots)^2}.$$

De sorte que dans les très-petites longueurs où la première puissance de l l'emporte beaucoup sur toutes les autres, on a, en se bornant au premier terme de chaque série,

$$x = \frac{l}{3}.$$

La position du centre des forces ne dépend donc plus alors ni de μ, ni de l, mais seulement de la longueur totale du fil, et sa distance à chaque extrémité est toujours le sixième de cette longueur. Cela tient à ce qu'alors la courbe des intensités peut être considérée comme une ligne droite, et son aire sur chaque moitié du fil comme un triangle. Or, le centre de gravité d'un triangle est toujours placé au tiers de sa hauteur, en partant de la base.

Ce résultat se vérifie déjà dans le dernier exemple que nous avons calculé; car, ayant supposé la longueur totale du fil égale à trois pouces, nous avons trouvé l'abscisse du centre des forces égale à 0,48432, ou presque exactement le sixième de 3 pouces. On voit ainsi que, dans les petites longueurs, le centre d'action se rapproche de plus en plus des extrémités du fil. Cette remarque est utile pour calculer l'action des divers points d'un même fil sur l'aiguille d'épreuve; car cette aiguille étant très-courte, on peut y supposer tout le magnétisme libre concentré à une petite distance, une ligne, par exemple, des extrémités.

En faisant les mêmes calculs pour notre second fil, où la valeur de μ est beaucoup plus petite, on aura d'abord pour les grandes longueurs

$$x' = -\frac{1}{\log'\mu} = 0{,}31859.$$

Cette valeur est moindre que celle que nous avions trouvée pour le premier fil, qui pesait 865 grains le pied. En effet, les $\log'\mu$ étant réciproques aux rayons des sections transversales,

les valeurs de x' dans les grandes longueurs doivent être proportionnelles à ces rayons. Ensuite, en faisant, par exemple, $l = 1$, et ayant égard à tous les termes, on trouve

$$x' = 0,12515,$$

ou environ le huitième de la longueur totale. Ainsi quand μ est moindre, il faut descendre à de plus petites longueurs avant de pouvoir employer l'approximation rectiligne. Cela tient à ce qu'alors la valeur de $\log '\mu$, étant plus considérable, rend les séries moins convergentes.

Si l'on veut connaître cette ligne droite à laquelle la courbe des intensités se réduit dans les petites longueurs, il n'y a qu'à développer en série l'expression générale de l'ordonnée

$$y = \frac{B(1 + \mu^{\alpha l})}{(1 - \mu^{\alpha l})} \quad (\mu^{x} - \mu^{2l-x}),$$

en regardant x et l comme des quantités très-petites, dont il suffit de conserver la première puissance; on trouvera ainsi, toutes réductions faites,

$$y = \frac{4B}{\alpha}\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

La ligne droite que cette équation représente a d'abord ses ordonnées nulles au milieu du fil où $x = l$; elles vont ensuite en augmentant de part et d'autre de ce point jusqu'aux extrémités où x est nul, et alors elles deviennent égales à $\frac{4B}{\alpha}$; telle est donc l'intensité du magnétisme libre aux extrémités des fils très-courts.

Quand, au contraire, les fils sont assez longs pour que μ^{2l} et $\mu^{\alpha l}$ soient insensibles, cette intensité extrême déduite de la formule rigoureuse est égale à B. Puis donc que nous avons trouvé $\alpha = 6$, on voit que la quantité de magnétisme libre est moindre dans les fils très-courts que dans les longs fils; la proportion est de $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ à l'unité. Ce résultat tient probablement à ce que, dans les petites longueurs, les pôles de nom contraire sont assez peu éloignés pour exercer l'un sur l'autre une action sensible, qui recompose une plus grande partie du magnétisme développé par les aimans extérieurs dans l'acte de l'aimantation.

Dans les fils dont la longueur est très-grande, cette réaction des pôles contraires l'un sur l'autre n'est plus sensible; mais elle s'exerce sur les points intermédiaires, et tend à développer leurs magnétismes naturels, comme ferait la présence d'un aimant étranger. De là résultent les points conséquens qui se forment d'eux-mêmes dans les fils très-longs, dès qu'on les a soustraits à l'influence des faisceaux qui les aimantent; c'est ainsi qu'un fil de métal suspendu verticalement par un de ses bouts se rompt lui-même par son propre poids au-delà d'une certaine longueur.

Pour compléter ces formules, développons la valeur du moment horizontal de la force terrestre dans le cas des longueurs très-petites. Alors, en se bornant aux puissances les moins élevées de l, on trouve qu'elle se réduit à

$$Q = -\frac{4\,C \log{}'\mu}{3\,\alpha} \cdot l^2.$$

Sa valeur est donc alors proportionnelle au carré des longueurs; c'est ce que l'on peut en effet remarquer dans les observations faites avec les morceaux les plus courts de nos deux fils.

Dans le premier, par exemple, nous avons

$$-\frac{4\,C}{3} \log{}'\mu = 33{,}529.$$

Si l'on prend de plus, comme je l'ai recommandé, $\alpha = 6$, ou plus exactement $\alpha = 5{,}877$, il viendra dans les petites longueurs

$$Q = 5{,}705\, l^2;$$

et en appliquant successivement cette formule aux trois morceaux les plus courts, on aura le tableau suivant :

Longueurs $2\,l$. en pouces.	Moment calculé en degrés.	Moment observé en degrés.	Excès du calcul.
3	12,834	13	— 0,166
1,5	3,204	3	+ 0,204
1	1,426	1,46	— 0,034
0,5	0,356	0,32	+ 0,036

De sorte que la formule approchée se trouve alors au moins aussi exacte que la formule rigoureuse. D'après l'influence directe que α exerce sur les petites longueurs, on conçoit qu'il faut le déterminer par la condition d'y satisfaire, et c'est ainsi que j'ai opéré. En établissant une comparaison semblable sur les observations faites avec le second fil, on s'assurera de même que la valeur de α y est encore, à très-peu de chose près, égale à 6 ; car, avec cette valeur, on trouve

$$-\frac{4C}{3\alpha}\log '\mu = 1{,}395\,; \qquad Q = 1{,}395\, l^2\,;$$

formule qui, étant appliquée aux trois dernières expériences, donne le tableau suivant :

LONGUEURS $2l$. en pouces.	MOMENS observ. en degrés.	MOMENS calculés en degrés.	EXCÈS du calcul.
2	1,395	1,30	+ 0,095
1	0,349	0,35	— 0,001
0,5	0,087	0,70	+ 0,017
0,25	0,022	0,70	+ 0,002

Ayant ainsi complètement reconnu les modifications que les longueurs des fils apportent dans la valeur des forces directrices, il faut examiner l'influence des grosseurs. Coulomb a fait un grand nombre d'expériences sur cet objet.

Ici, comme dans les épreuves précédentes, il faut, comme condition indispensable, que tous les fils ou verges que l'on compare soient exactement de même nature et au même degré de trempe ou de recuit. La chose était facile, tant que nous ne comparions que les longueurs ; il suffisait de couper successivement différens morceaux du même fil ; mais on n'a plus cet avantage quand les grosseurs doivent être inégales, et il faut y suppléer par quelque autre procédé.

Les premiers essais que Coulomb tenta pour y parvenir lui firent bientôt reconnaître qu'il était presque impossible de se

procurer deux aiguilles d'acier de différens diamètres qui fussent également homogènes, et eussent le même degré de ressort. Mais il observa heureusement que de simples fils de fer acquéraient par la torsion seule un état d'écrouissement et de ressort qui leur permettait ensuite de recevoir et de garder le magnétisme presque aussi bien que des fils d'acier de même diamètre. Il choisit donc un fil de fer très-pur de 120 pieds de longueur, tel qu'il sortait de la filière ; et, sans le recuire, il le coupa en différentes parties qu'il tordit autour de leur axe, en les tendant par un poids pendant cette opération pour les maintenir rectilignes. Puis il en forma des faisceaux de différentes longueurs et de différens diamètres, qu'il lia par des brins de soie mince, et qu'il aimanta à saturation. Après quoi il les plaça dans sa balance, et chercha les torsions nécessaires pour les maintenir à une distance fixe du méridien magnétique. Le résultat général de ces expériences fut que, dans les faisceaux de figure semblable, les momens magnétiques sont exactement proportionnels aux cubes des dimensions homologues. Coulomb éprouva depuis cette loi sur un grand nombre de lames d'acier de formes très-diverses, et tirées deux à deux d'un même morceau ; il la trouva toujours parfaitement rigoureuse, quelque fût le rapport des dimensions.

En liant ce résultat avec ceux que nous avons trouvés relativement aux longueurs, on peut en déduire les valeurs des momens magnétiques de tous les fils cylindriques d'une nature et d'une forme données, pourvu qu'on en ait observé un seul de même nature, et dont la section transversale soit semblable. Prenons pour exemple notre fil d'acier de 2 lignes de diamètre, et désignons son rayon par r, comme nous avons désigné sa longueur par $2\,l$. Supposons maintenant que l'on propose d'en déduire le moment magnétique d'un autre fil de même acier, pareillement cylindrique, retenu de même à 30° du méridien magnétique, mais dont le rayon soit r' et la longueur $2\,l'$; alors on cherchera une longueur l du premier fil, telle qu'il en résulte un solide semblable ; ce qui se fera par la proportion

$$r' : l' :: r : l, \qquad \text{d'où} \qquad l = \frac{r\,l'}{r'}.$$

Ensuite, on substituera cette valeur de l dans l'expression générale des momens de notre premier fil, et enfin on multipliera le résultat par le rapport cubique des dimensions homologues, c'est-à-dire par $\frac{r'^3}{r^3}$; on aura ainsi

$$Q = \frac{C r'^3 \left(1 + \mu^{\frac{6rl'}{r'}}\right)}{r^3 \left(1 - \mu^{\frac{6rl'}{r'}}\right)} \left[\frac{r\,l'}{r'} \left(1 + \mu^{\frac{2rl'}{r'}}\right) + \frac{\left(1 + \mu^{\frac{2rl'}{r'}}\right)}{\log' \mu} \right].$$

Supposons, par exemple, que la nouvelle aiguille dût avoir 48 pouces de longueur et 6 lignes de diamètre, on aura alors

$$r' = 3^{\text{lig}}; \quad l' = 24^{\text{po}}; \quad \frac{r}{r'} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad l = 8^{\text{p.}}$$

En substituant ces nombres dans la formule, et employant les valeurs de C et de μ que nous avons plus haut déterminées pour notre premier fil, on trouve

$$Q' = 6687^\circ{,}5\,;$$

c'est-à-dire que, pour retenir cette aiguille à 30° de distance du méridien magnétique, avec le même fil de suspension dont nous avons déjà fait usage, il faudrait employer une force de torsion de 6687°,5.

Cette comparaison suppose toujours que les aiguilles sont identiques quant à leur substance. Si l'identité n'est pas parfaite, on doit trouver des différences dans la valeur des momens. Considérons, par exemple, notre second fil qui pesait 38 grains le pied, et cherchons quelle devait être son moment magnétique pour une longueur de 12 pouces; nous aurons alors

$$\frac{r}{r'} = \sqrt{\frac{865}{38}} = 4{,}77102 \qquad l' = 6\,;$$

par conséquent $\qquad l = 28{,}62612.$

Cette valeur de l est beaucoup plus grande qu'il ne faut pour que μ^{2l} et μ^{6l} soient insensibles. En la substituant dans la formule avec cette simplification, on trouve

$$Q' = 9^\circ{,}54\,;$$

l'expérience a donné 11°,5. Mais nous n'avons aucune certi-

tude que la substance de ces deux fils fût identiquement pareille; il y a au contraire tout à parier qu'elle ne l'était pas, et alors l'accord approché que nous trouvons ici est une véritable confirmation de la loi que nous avons trouvée.

La valeur obtenue plus haut pour Q′ peut être écrite de cette manière :

$$Q' = \frac{C r'^2}{r^2} \frac{\left(1 + \mu^{\frac{6rl'}{r'}}\right)}{\left(1 - \mu^{\frac{6rl'}{r'}}\right)} \left[l'\left(1 + \mu^{\frac{2rl'}{r'}}\right) + \frac{\left(1 - \mu^{\frac{2rl'}{r'}}\right)}{\frac{r}{r'} \log' \mu} \right].$$

Si l'on connaissait directement les valeurs de μ et de C pour le fil dont $2\,r'$ est le diamètre, en les nommant μ' et C′, on aurait en général, relativement à une longueur $2\,l'$ de ce fil,

$$Q' = C' \frac{(1 + \mu'^{6l'})}{(1 - \mu'^{6l'})} \left[l'\,(1 + \mu'^{2l'}) + \frac{(1 - \mu'^{2l'})}{\log' \mu'} \right].$$

Or, cette formule s'accordera avec la précédente, si l'on fait

$$C' = C \frac{r'^2}{r^2} \qquad \log' \mu' = \frac{r}{r'} \log' \mu\,;$$

car alors on aura aussi

$$\mu' = \mu^{\frac{r}{r'}}\,; \qquad \log \mu' = \frac{r}{r'} \log \mu,$$

et les deux formules rentreront l'une dans l'autre. Ceci nous apprend que, pour tous les fils cylindriques en général, les valeurs de C sont directement proportionnelles aux carrés des rayons, et les logarithmes de μ réciproques à ces mêmes rayons. C'est en effet ce que nous avions trouvé pour les constantes μ, en comparant les deux fils que Coulomb avait éprouvés; et les constantes C se trouvaient aussi à fort peu près dans le rapport que cette théorie leur assigne; de sorte que la différence doit être sans doute attribuée à la différente nature de l'acier, que Coulomb n'avait pris aucune précaution pour rendre la même dans les deux cas.

La constante C elle-même n'est qu'une abréviation pour

représenter le produit $\frac{-2\,B\,H\sin a}{\log'\mu}$, dans lequel H est la force horizontale du magnétisme terrestre, B l'intensité du magnétisme libre à l'extrémité du fil, et a l'angle de déviation du méridien magnétique. Les quantités a et H étant communes à tous les fils que l'on compare, on aura en général

$$\frac{C'}{C}=\frac{B'}{B}\cdot\frac{\log'\mu}{\log'\mu'}.$$

Ainsi, en substituant aux rapports $\frac{C'}{C}$, $\frac{\log'\mu}{\log'\mu'}$, leurs valeurs $\frac{r'^2}{r^2}$ et $\frac{r'}{r}$, on aura généralement

$$B'=B\frac{r'}{r};$$

c'est-à-dire que, dans tous les fils circulaires de même nature, aimantés à saturation par la méthode de la double touche, les quantités de magnétisme libre, développées aux extrémités, sont proportionnels aux rayons des fils ou à leur contour.

En réunissant les deux équations

$$B'=B\frac{r'}{r}\qquad \log'\mu'=\frac{r}{r'}\log'\mu,$$

on peut déterminer pour tous ces fils les intensités du magnétisme en un point quelconque, et par suite, les forces directrices pour une longueur et un diamètre donnés. Un travail semblable sur des figures non cylindriques permettrait probablement de découvrir des lois analogues, ou même d'appliquer les précédentes avec les seules modifications que la différence de la figure exige.

En examinant la manière dont l'électricité se dispose sur un plan circulaire, lorsqu'elle y est en équilibre, nous avons trouvé que l'épaisseur de la couche électrique y est presque constante, depuis le centre jusqu'à une très-petite distance des bords où elle croît tout à coup avec beaucoup de rapidité; il était naturel de penser que la même loi s'étendait aussi aux quantités de magnétisme libre qui subsistent en divers points de la section

transversale d'un barreau magnétique : c'est ce que Coulomb a vérifié.

S'étant procuré une grande planche de tôle d'acier, il y coupa seize lames égales ayant la forme de parallélogrammes rectangles. Elles avaient chacune 6 pouces de longueur, 9 lignes $\frac{1}{2}$ de largeur, et pesaient 382 grains. Après les avoir aimantées séparément à saturation, il les assembla quatre à quatre, huit à huit, et enfin toutes les seize, en les posant à plat les unes sur les autres, et les liant par des fils de soie. Puis il suspendit les différens faisceaux dans la balance, et observa les torsions nécessaires pour les retenir à 30° du méridien magnétique. De plus, comme les lames ainsi assemblées réagissent les unes sur les autres, il mesura de nouveau leurs forces directrices, après avoir défait les faisceaux. Voici les expériences, qui parlent d'elles-mêmes :

Nombre des lames assemblées.	Torsions observées.
1	82
2	125
4	150
6	172
8	182
12	205
16	229

Pour trouver la loi des torsions, il faudrait avoir des expériences faites sur les diverses longueurs d'une seule lame. Alors on y appliquerait le même mode de comparaison, et la même formule que nous avons employée pour les fils cylindriques; mais Coulomb n'a point fait d'expériences pareilles. Je me bornerai donc à remarquer que les torsions croissent avec le nombre des aiguilles superposées, mais non pas à beaucoup près proportionnellement à ce nombre. Nous en verrons la raison tout-à-l'heure.

Ayant désuni le faisceau de quatre lames, et ayant remarqué

leur rang, Coulomb essaya séparément la force directrice de chacune d'elles en les amenant toujours à 30° du méridien, et il trouva les valeurs suivantes :

Rang des lames.		Torsions.
Première surface du faisceau....	1	70°
	2	44
	3	44
Seconde surface du faisceau....	4	60

Il s'était donc opéré dans le magnétisme libre de ces lames une diminution considérable, moindre toutefois dans les extérieures que dans les intérieures, et à peu près égale dans ces dernières; distribution conforme à ce que nous avaient fait prévoir les analogies tirées de l'électricité. Pour concevoir comment ces changemens s'opèrent, il faut considérer que les lames ainsi assemblées réagissent les unes sur les autres, comme des aimans dont on approche les pôles homologues. Elles tendent ainsi à détruire mutuellement leur magnétisme, et le détruisent en effet partiellement. Les lames intérieures, sollicitées ainsi sur les deux faces, doivent perdre plus que les extérieures, qui n'éprouvent leur réaction que d'un seul côté. Quant à l'inégalité qui se trouve ici dans l'état des deux lames extérieures, elle est purement accidentelle. Nous avons déjà remarqué que la force coercitive, qui s'oppose au développement et à la recomposition des magnétismes naturels, permet plusieurs états d'équilibre.

Si l'on fait la somme des momens partiels après la décomposition du faisceau, on la trouve égale à 218°; par conséquent, beaucoup plus grande que le moment du faisceau lui-même. Cela doit tenir encore à la réaction des lames les unes sur les autres, pendant qu'elles sont assemblées. Mais ce qui est très-remarquable, cet effet de leur réaction est passager; il s'opère sans que les lames éprouvent dans leur magnétisme

une diminution durable, et si on les réunit de nouveau dans le même ordre, leur moment total revient à 150° comme auparavant. Ce phénomène, parfaitement constaté par Coulomb, mérite d'être étudié avec le plus grand soin.

La décomposition des autres faisceaux a donné des résultats absolument pareils; par exemple, en défaisant le faisceau de huit lames, dont le moment total était 182°, les forces directrices ont été telles qu'on le voit ici.

Rang des lames.		Torsions.
Première surface du faisceau.....	1	48
	2	36
	3	35
	4	33
	5	34
	6	38
	7	35
Seconde surface du faisceau.....	8	51

On voit encore que toutes les lames ont perdu une grande partie de leur force directrice primitive; mais celles des surfaces beaucoup moins que celles de l'intérieur, et celles-ci à peu près toutes également.

Dans ces expériences, Coulomb aimantait d'abord chaque lame à saturation avant de les réunir; dans d'autres essais, au contraire, il n'aimanta les lames que toutes ensemble, après les avoir assemblées, et il les laissa réunies pendant plusieurs mois, pour connaître l'état magnétique auquel elles s'arrêteraient. Il trouva encore dans ce cas que les lames des surfaces perdaient beaucoup moins que celles de l'intérieur. Mais celles-ci lui ont présenté en général plus d'irrégularité. Il est même quelquefois arrivé que celles qui étaient tout-à-fait centrales ont eu leurs pôles renversés. Toutes ces variétés n'ont rien qui doive surprendre, puisqu'elles constituent autant d'états d'équilibre

magnétiques possibles que le temps peut réaliser, en détruisant peu à peu le développement énergique et la distribution forcée qu'une aimantation puissante avait d'abord imprimée aux magnétismes naturels.

Dans toutes les expériences précédentes, nous avons déterminé les forces directrices horizontales par le moyen des torsions qui leur font équilibre. On pourrait les déterminer de même en suspendant librement les aiguilles dans une situation horizontale, et observant la durée des oscillations très-petites qu'elles exécutent de part et d'autre du méridien magnétique par la seule influence de l'aimant terrestre : ce procédé très-simple a été expliqué dans le chapitre III. Nous avons vu alors qu'en nommant P le poids de l'aiguille, l la moitié de sa longueur, et T le temps d'une de ses oscillations horizontales, le moment des forces directrices horizontales est exprimé par

$$\frac{\pi^2 P l^2}{3 g T^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{2 \pi^2 h l^3}{3 T^2},$$

si l'on veut introduire, au lieu du poids de l'aiguille, la superficie h de sa section transversale, en supposant sa densité égale à 1. Or, d'après la distribution que nous avons reconnue au magnétisme libre dans les aiguilles aimantées par la méthode de la double touche, nous avons trouvé que ce même moment était exprimé par

$$-\frac{2 BH (1 + \mu^{\alpha l})}{(1 - \mu^{\alpha l}) \log' \mu} \left[l (1 + \mu^{2l}) + \frac{(1 - \mu^{2l})}{\log' \mu} \right].$$

H représentant l'action horizontale de l'aimant terrestre, et B une constante dépendante de la quantité de magnétisme libre qui peut se développer à l'extrémité du fil sur la superficie de sa section transversale, il n'y a donc qu'à égaler ces deux valeurs, et en tirer le temps T, pour le comparer aux expériences. Cela nous offrira une nouvelle vérification de notre formule ; on aura ainsi

$$T^2 = \frac{-\pi^2 h \log' \mu \,.\, (1 - \mu^{\alpha l})}{3 BH (1 + \mu^{\alpha l})} \cdot \frac{l^3}{l (1 + \mu^{2l}) + \dfrac{(1 - \mu^{2l})}{\log' \mu}}.$$

Le facteur
$$-\frac{\pi^2 h \log' \mu}{3\,BH}$$
est constant pour tous les morceaux de la même verge, quelle que soit leur longueur. Nous le représenterons par D^2; on aura donc alors

$$T^2 = \frac{D^2(1-\mu^{\alpha l})}{(1+\mu^{\alpha l})} \cdot \frac{l^3}{l(1+\mu^{2l})+\dfrac{(1-\mu^{2l})}{\log' \mu}}.$$

Pour appliquer cette formule, je choisirai les observations suivantes faites par Coulomb sur diverses longueurs d'une même lame d'acier rectangulaire de trois lignes de large, et d'une épaisseur telle, qu'elle pesait 288 grains le pied.

Longueurs en pouces; $2l$.	Durée de 20 oscillations.
16	231
12	180
10	154
8	126
6	98
4	80

Considérons d'abord des longueurs assez grandes pour que μ^{2l} et $\mu^{\alpha l}$ soient insensibles. Dans ce cas, la formule se réduit à

$$T^2 = D^2 \cdot \frac{l^3}{l+\dfrac{1}{\log' \mu}}.$$

Deux observations suffisent alors pour déterminer les constantes D et μ. Nous emploierons pour cela les deux premières, dans lesquelles on a

$$l = 8^{po} \qquad T = 11'', 55$$
$$l' = 6 \qquad T' = 9, 00,$$

et en les substituant dans la formule, nous en tirerons

$$D = 1,3067 \quad \log D = 0,1161749 \quad \log \mu = \bar{1},6998120.$$

On voit par la valeur de μ qu'en effet nous avons pu négliger μ^{2l} et $\mu^{2l'}$, qui deviennent ici μ^{16} et μ^{12}. Quant à $\mu^{\alpha l}$, il paraît, d'après ce que nous avons vu sur les verges cylindriques, que nous pouvons le négliger dans toutes les observations où l surpasse 2 ; alors il reste

$$T^2 = \frac{D^2 l^3}{l(1+\mu^{2l}) + \frac{(1-\mu^{2l})}{\log'\mu}}.$$

En effectuant le calcul pour les différens cas observés par Coulomb, et multipliant les valeurs de T par 20, pour avoir le temps de 20 oscillations, l'on obtiendra le tableau suivant :

Longueurs $2l$.	Durée de 20 oscillations.		Excès du calcul.
	calculée.	observée.	
16	231	231	0″
12	180	180	0
10	155	154	+ 1
6	130	125	+ 5
8	107	98	+ 9
4	84	80	+ 4

Les écarts sont de l'ordre de ceux qu'on doit attendre d'expériences pareilles ; car les petites longueurs admettent toujours plus d'irrégularités dans l'intensité de l'aimantation. Et en outre, leur largeur devenant plus sensible, comparativement à leur longueur, on ne doit plus, dans le calcul, les considérer comme de simples lignes ; ou du moins on doit s'attendre que cette supposition entraînera quelques petites erreurs. Mais malgré cela, cet exemple suffit pour montrer l'application de nos formules, et il achève de confirmer ce que les autres expériences nous avaient déjà fait connaître sur la distribution

du magnétisme libre dans les aiguilles aimantées à saturation par la méthode de la double touche.

Quoique les formules exposées dans ce chapitre embrassent toutes les longueurs des lames, néanmoins, dans la pratique, leur application est limitée. Car elles supposent que chaque moitié de la lame ne possède qu'une seule espèce de magnétisme libre; et l'expérience fait connaître que cette condition est impossible à remplir dans les aiguilles trempées, lorsque leur longueur est très-grande, comparativement au diamètre de la section transversale. Alors quelque méthode d'aimantation que l'on emploie, il se forme dans ces aiguilles plusieurs centres, dont le développement est très-probablement dû à la réaction des pôles de la lame sur les parties voisines de son centre. Dans ce cas, la courbe des intensités n'est plus située pour chaque moitié de l'aiguille d'un seul côté de l'axe; elle ondule nécessairement au-dessus et au-dessous, comme le représente la fig. 32, et par conséquent elle n'est plus représentée par l'équation logarithmique dont nous avons fait usage. Heureusement divers motifs font croire que cette limitation est peu à regretter. D'abord elle n'a pas lieu dans les aiguilles recuites, si ce n'est peut-être à des longueurs beaucoup plus grandes que celles dont on se sert ordinairement; et quant aux aiguilles trempées, si l'on n'est pas astreint par quelque motif impérieux à les rendre extrêmement légères, il y aura toujours de l'avantage à leur donner une épaisseur suffisante pour que le magnétisme libre soit de même nature sur chacune de leurs moitiés; car, à égalité de force coercitive, le développement des nouveaux centres affaiblit le moment total des forces directrices pour chaque moitié de l'aiguille, et rend aussi moins énergique l'action à distance de ses pôles.

CHAPITRE VII.

De l'influence de la température sur le développement du Magnétisme.

Nous avons déjà annoncé qu'une grande élévation de température détruisait totalement la force coercitive des métaux magnétiques, et déterminait ainsi la réunion des magnétismes naturels que l'aimantation avait séparés. Nous avons aussi remarqué que le degré de chaleur auquel les barreaux sont trempés influe sur le développement de magnétisme qu'ils peuvent conserver ; et cela est une conséquence naturelle de la modification imprimée par la chaleur à leur force coercitive. Il nous devient maintenant nécessaire de fixer avec précision ces diverses influences, afin de savoir quel est l'état des barreaux qui comporte le plus grand développement de magnétisme. Tel est l'objet des expériences suivantes, qui sont extraites d'un travail inédit de Coulomb.

Cet habile physicien chercha d'abord à déterminer la progression suivant laquelle le développement du magnétisme se détruit à mesure que la température s'élève. Pour cela, il prit un barreau de cette espèce d'acier connue dans le commerce sous le nom d'*acier aux sept étoiles ;* sa longueur était 162 millimètres, sa largeur 14, son épaisseur 5, son poids 82 grammes. Ce barreau a été chauffé cerise-clair, environ jusqu'à 900° de température, et refroidi lentement dans l'air, pour qu'il ne prît aucune trempe. Ensuite on l'a aimanté à saturation, la température étant à 12° du thermomètre de Réaumur. Dans cet état, on a observé le temps qu'il employait à faire dix oscillations horizontales ; cela fait, on a de nouveau élevé sa température d'un certain nombre de degrés, et après l'avoir laissé se refroidir, sans le réaimanter, on a mesuré par les oscillations ce qui lui restait de magnétisme. On a répété cette observation

à diverses températures de plus en plus élevées. Voici le tableau des résultats :

Températures en degrés de Réaumur.	Temps de 10 oscillations.
12	93″
40	97,5
80	104
211	147
340	215
510	290
680	très-grand

L'augmentation progressive de la durée des oscillations montre que le magnétisme du barreau s'affaiblit à mesure qu'on le chauffe davantage.

Pour mesurer, dans ces expériences, les températures diverses auxquelles le barreau était successivement amené, Coulomb employait une méthode que nous ferons plus tard connaître, et qui exigeait que le barreau échauffé fût jeté à chaque fois dans une masse d'eau à la température de 12°. On pourrait donc penser que cette opération le trempait, et influait ainsi sur ses facultés magnétiques. Mais il n'en est pas ainsi ; car après avoir été retiré de l'eau, il n'offrait aucune des propriétés de la trempe ; il se limait et s'écrouissait encore aussi facilement qu'au plus grand état de recuit. Ce n'est que vers 750° qu'il commençait à prendre un peu de trempe et à résister à la lime sur ses arêtes. Il paraît donc que jusqu'à 700° de température les particules du barreau sont encore trop voisines les unes des autres pour qu'un refroidissement subit à 12° puisse saisir celles de la surface, et les empêcher de revenir aux positions naturelles d'équilibre qu'elles prendraient spontanément par un refroidissement gradué ; et ce qui achève de confirmer cette remarque importante, c'est qu'après chacune de ces immersions, le barreau, étant aimanté de nouveau à saturation, reprenait

exactement la même force directrice que dans son état parfait de recuit, et faisait de même 10 oscillations horizontales en 93″; d'où l'on doit conclure que les distances et l'arrangement de ses particules étaient aussi redevenues les mêmes qu'auparavant. Ce ne fut, comme je l'ai dit, que vers 700° qu'il commença dans les immersions à prendre une trempe sensible. Aussi, en l'aimantant à saturation, après l'avoir trempé à cette température, et successivement à d'autres de plus en plus élevées, Coulomb trouva que sa force directrice commençait à croître; c'est ce que montre le tableau suivant :

Températures de la trempe.	Temps de 10 oscillat., après avoir été aimanté de nouveau à saturation.
780	78″
860	64
950	63

On voit que la trempe a considérablement augmenté le développement du magnétisme que ce barreau pouvait admettre; elle l'a presque doublé à 900°, puisque les temps de dix oscillations ont varié de 93 à 63. En augmentant davantage la température de la trempe, la force directrice n'éprouve plus que des accroissemens insensibles.

Dans ces expériences, nous avons graduellement élevé le barreau de l'état complet de recuit à celui de la trempe la plus dure. Nous allons maintenant le ramener de l'état de trempe à celui de recuit.

Températures.	Temps de 10 oscillations horizont. du barreau trempé à 950.
12°	63″
80	66
214 couleur bleue	80
410 couleur d'eau	170

Ici le barreau a d'abord été trempé très-roide, puis aimanté à saturation, et ses oscillations observées. Cela fait, on l'a successivement élevé aux diverses températures marquées dans la première colonne, et après l'avoir laissé refroidir, on a mesuré par les oscillations le magnétisme qui lui restait. En comparant ces nombres à ceux de la première série d'expériences, on voit que l'élévation progressive de la température altère beaucoup moins le magnétisme du barreau, lorsqu'il a été d'abord trempé vers 900°, que lorsqu'il a été mis d'abord dans l'état de recuit.

Voici encore une autre différence : dans l'état de recuit, tant que le barreau n'a été exposé qu'à des températures au-dessous de 500°, une nouvelle aimantation lui a rendu toute sa force directrice primitive, et il est toujours revenu à faire 10 oscillations horizontales en 93″. Mais dans l'état de trempe, le résultat est différent, chaque élévation de température diminue sensiblement le développement de magnétisme que le barreau peut recevoir par une aimantation nouvelle. C'est ce que montre le tableau suivant :

Températures du recuit.	Temps de 10 oscillations du barreau, après une nouvelle aimantation.
12°	63″
214	64,5
410 couleur d'eau	70
900 cerise-clair	93

La force directrice que le barreau peut acquérir atteint donc son maximum d'énergie, quand il est trempé cerise-clair vers 900° ; alors le temps de dix oscillations est 63″. A partir de ce terme, la force directrice dont il est susceptible diminue à mesure que la température du recuit augmente ; à 900°, le barreau, aimanté de nouveau à saturation, emploie 93″ à faire dix oscillations horizontales comme dans nos premières expériences. Cela devait

en effet arriver, puisqu'il se trouve alors ramené exactement au même état de recuit parfait où nous l'avions pris d'abord.

Les dimensions de ce barreau étaient telles, qu'il avait de longueur environ 30 fois son épaisseur. Tous les barreaux dans lesquels cette proportion de la longueur est égale ou moindre, présentent des phénomènes pareils. Mais il n'en est plus de même des barreaux qui sont proportionnellement beaucoup plus longs.

Pour le prouver, Coulomb a pris un fil cylindrique d'acier très-pur, ayant 326^{mm} de longueur et 4^{mm} de diamètre; en sorte que le rapport de la première dimension à la seconde était 81,5 à 1. Il l'a d'abord trempé à 820°, l'a aimanté à saturation, et a déterminé sa force directrice; puis il a répété successivement cette opération, après l'avoir fait recuire à diverses températures. Voici les résultats qu'il a obtenus :

Températures du recuit.	Temps de 10 oscillations horizontales.
12° tempér. de l'atmosphère	89″
320 presque couleur d'eau	75
450 rouge-sombre	63
530 rouge moins sombre	70
900 cerise-clair	76

On voit donc qu'ici l'état de trempe roide, au lieu de donner la plus grande force directrice, donne au contraire la plus petite. Le maximum de cette force a lieu lorsque le fil est recuit rouge-sombre, environ à 450°. Tous les fils et toutes les lames dont la longueur est de même très-grande, comparativement à leur grosseur, donnent des résultats pareils, qui s'écartent considérablement de ceux que le gros barreau nous avait offerts.

Ce résultat paraît lié au mode de distribution du magnétisme libre. Dans les barreaux dont la longueur n'excède pas trente fois le diamètre, il n'existe jamais qu'un seul centre magnétique

placé au milieu de la longueur; et chaque moitié possède une seule espèce de magnétisme, du moins quand on aimante à saturation par la méthode de la double touche, comme nous l'avons supposé. Dans ce cas, à tous les degrés de recuit et de trempe, la courbe des densités magnétiques a toujours la forme logarithmique que nous lui avons trouvée fig. 30, et elle ne varie que dans la grandeur, non dans le signe de ses ordonnées. Mais dans les fils et les lames dont la proportion de la longueur à la grosseur est plus considérable, l'aimantation produit constamment trois centres magnétiques, savoir un au milieu, et deux à égale distance des extrémités. Alors la courbe des intensités a la forme ondulante représentée fig. 33; elle coupa une fois l'axe entre le milieu et chaque extrémité de la lame. De sorte que chaque moitié possède deux sortes de magnétismes qui se soustraient l'un de l'autre dans l'expression de la force directrice totale.

Or, l'expérience qui découvre ces centres montre aussi que leurs distances aux extrémités de la lame varient dans ses différens états. Voici leurs positions, par exemple, pour le fil de 326^{mm} de longueur :

Temps de 10 oscillations.	Distances au milieu du fil.		
	C'	C	C''
89 trempé roide	98^{mm}	0^{mm}	98^{mm}
75 recuit couleur d'eau	63	0	63
68 recuit rouge-sombre	43	0	43
76 recuit cerise	0	0	0

Ainsi, à mesure que le recuit a augmenté, les deux centres extrêmes se sont rapprochés du milieu de la lame, et enfin ils s'y sont réunis dans l'état de recuit cerise, vers 900°. De sorte qu'alors chaque moitié du fil ne possédait plus qu'une seule espèce de magnétisme libre. Si la force coercitive, dans cet état, eût resté la même qu'auparavant, il est clair que la force directrice eût

été alors à son maximum. Mais comme le recuit la diminue, le fil n'admettait plus alors un développement de magnétisme aussi considérable que dans les états précédens; et cette cause a fait plus que contre-balancer l'avantage d'une meilleure distribution du magnétisme libre; de sorte qu'au total la force directrice s'est trouvée un peu plus faible. On voit donc qu'en général entre ces influences contraires il y a un certain milieu à choisir, qui donne à la force directrice sa plus grande valeur. D'après les expériences précédentes et beaucoup d'autres encore, Coulomb regarde l'état de recuit rouge-obscur comme le plus avantageux pour les aiguilles ou barreaux dont la longueur surpasse 30 fois l'épaisseur, et l'état de trempe roide pour ceux dans lesquels la proportion de la longueur à l'épaisseur est moindre. Ainsi, toutes les fois que des motifs étrangers à ceux qui précèdent ne devront pas influer sur le choix des barreaux, il y aura beaucoup d'avantage à les prendre dans ces dernières limites, puisqu'ils y réunissent la grande force coercitive que donne la trempe avec la distribution de magnétisme la plus parfaite.

D'ailleurs, quoique les expériences précédentes n'aient indiqué dans les longs fils que trois centres magnétiques, on conçoit qu'en augmentant encore la longueur, il doit s'en développer davantage, ne fût-ce que par la seule réaction de la lame sur elle-même. Mais la théorie, d'accord en cela avec l'expérience, montre que, dans les fils aimantés symétriquement par la méthode de la double touche, les nouveaux centres doivent toujours se former à égales distances du centre de la lame où se trouve toujours le centre primitif; de sorte que le nombre total des centres est nécessairement impair.

CHAPITRE VIII.

De la meilleure forme à donner aux Aiguilles des boussoles.

Les résultats établis dans les précédens chapitres doivent servir de guides dans la construction des aiguilles de boussoles. Quoique cette application soit facile, elle est assez importante pour que je croie devoir m'y arrêter particulièrement; et je le ferai d'autant plus volontiers, que nous aurons encore Coulomb pour guide.

Les boussoles dont les marins se servent en général, soit à la mer, soit à terre, sont formées par des aiguilles aimantées munies à leurs centres d'une chape qui repose sur un pivot de métal non magnétique. Un petit contre-poids, placé sur un des bras de l'aiguille, la rend horizontale. Il faut le changer de place ou de grosseur, lorsqu'on passe dans des latitudes fort distantes, où le moment des forces verticales du magnétisme terrestre est très-différent.

Quelle que soit la forme de l'aiguille, il est facile de déterminer sur sa surface la direction horizontale de la résultante des forces magnétiques, au moyen de la méthode de retournement que nous avons expliquée page 36. Si l'aiguille se mouvait sur son pivot avec une liberté parfaite, elle se dirigerait naturellement, de manière que la ligne ainsi tracée coïncidât exactement avec le méridien magnétique; et en conséquence, elle indiquerait toujours exactement ce méridien. Mais le frottement du pivot contre le fond de la chape s'oppose à cette tendance, et forme ainsi un obstacle que la force directrice de l'aiguille doit surmonter; d'où l'on voit que la meilleure construction sera celle dans laquelle le frottement sera le moindre possible, et la force directrice la plus grande.

En supposant des pivots et des chapes de même forme, de

même nature, et travaillés avec une exactitude égale, le frottement ne dépend que du poids de l'aiguille. On peut le déterminer, par expérience, en présentant de loin à l'aiguille suspendue sur son pivot un aimant qui la détourne de son méridien magnétique, et observant avec quel degré d'approximation elle y revient quand elle est ensuite abandonnée à elle-même. Il est, en effet, évident que les amplitudes des arcs auxquels elle s'arrête indifféremment de part et d'autre de ce plan, dans un grand nombre d'expériences, devront être proportionnelles à l'énergie du frottement. Coulomb, par des observations de ce genre, a trouvé que, pour des pivots très-pointus et des chapes formées d'une matière impénétrable, le frottement était à peu près proportionnel à la puissance $\frac{3}{2}$ des pressions. Mais lorsque, par un long usage, la pointe des pivots s'est émoussée, et s'est pour ainsi dire accommodée au fond de la chape, ce qui est le cas le plus ordinaire, il a trouvé que le frottement devenait simplement proportionnel aux pressions. C'est là la première donnée dont nous devons faire usage.

Concevons maintenant une aiguille aimantée de forme et de grosseur quelconque, placée sur un pareil pivot; et, sans rien changer à ses dimensions longitudinales, doublons seulement de son épaisseur, ou, ce qui revient au même, posons sur elle une autre lame absolument pareille : la pression sur le pivot sera doublée, ainsi que le frottement; mais la force directrice ne le sera pas. Car nous avons trouvé, page 100, qu'en vertu de la réaction des pôles homologues l'un sur l'autre, elle croît dans un moindre rapport que les épaisseurs. Ce nouveau système déterminera donc la direction du méridien magnétique, moins exactement que la première aiguille toute seule; et de là on voit qu'en général, toutes choses d'ailleurs égales, il y a de l'avantage à employer, dans la construction des boussoles, des aiguilles très-peu épaisses : il suffit de borner l'épaisseur au degré nécessaire pour que l'aiguille ne se courbe pas par la flexion.

Passons maintenant aux longueurs, et considérons d'abord le cas où l'aiguille, par ses dimensions et son état physique, ne possède qu'une seule espèce de magnétisme libre sur chacune

de ses moitiés. C'est le cas des formules expliquées dans le chapitre VI. On voit alors qu'à moins que les aiguilles ne soient excessivement courtes, l'expression de leur force directrice est composée de deux termes, l'un constant, et l'autre proportionnel aux longueurs ; de sorte que, dans les longueurs un peu considérables, il suffit d'avoir égard à ce dernier. Or la section transversale de l'aiguille étant supposée constante, le poids, et par conséquent le frottement qui en résulte, sont l'un et l'autre proportionnels aux longueurs. Ainsi, lorsqu'on sera parvenu à cette limite, toutes les aiguilles, quelles que soient leurs longueurs, auront à peu près une exactitude égale. Mais pour que cette théorie continue d'être applicable, il faudra se restreindre à des longueurs telles que, comparées à l'épaisseur, il n'en résulte pas plusieurs centres magnétiques ; et l'épaisseur, ainsi que l'état de recuit ou de trempe, devront être employés de manière que cette condition soit satisfaite d'après les indications données par l'expérience dans le chapitre précédent. Si la longueur de l'aiguille est moindre que 30 fois son épaisseur, il faudra la tremper à blanc avant de l'aimanter. Si, au contraire, sa longueur excède cette proportion, il faudra, après l'avoir trempée à blanc, la faire recuire jusqu'au rouge-obscur. Dans le passage d'une de ces limites à l'autre, il est à peu près indifférent d'employer l'un ou l'autre procédé.

Tout ceci suppose que les aiguilles ne doivent avoir qu'un seul centre magnétique ; mais si l'on veut en admettre qui aient plusieurs centres, on pourra quelquefois y trouver de l'avantage, l'affaiblissement produit par la multiplicité des centres pouvant être compensé par l'accroissement qui résulte d'une force coercitive plus considérable et d'un plus grand développement du magnétisme. Alors il faudra, suivant les indications du chapitre cité, employer les degrés de trempe ou de recuit qui conviendront le mieux aux proportions que l'on aura adoptées. Il paraît que Coulomb avait fait sur ces différens points une longue série d'expériences, qu'il se proposait de distribuer en tableaux où l'on aurait vu d'avance pour chaque forme de lames quelles étaient les circonstances les plus favo-

rables. Mais je n'ai malheureusement rien trouvé dans ses manuscrits qui fût assez en ordre pour que l'on pût reconstruire ce travail important, et c'est un sujet de recherches à proposer aux physiciens.

Il nous reste enfin à déterminer, parmi toutes les formes que l'on peut donner aux aiguilles, quelle est la plus favorable. Celles qui sont les plus usitées sont en parallélogrammes, en cylindres ou en flèches. Coulomb a trouvé, par expérience, qu'à poids égal, les aiguilles en flèches avaient une force directrice plus grande ; et il était facile de le prévoir, d'après la même raison qui l'avait déterminé à composer ses faisceaux magnétiques de plusieurs lames disposées par gradins en retraite, comme je l'ai appliqué page 58. On voit encore, par la même raison, qu'il y aurait du désavantage à donner aux extrémités des aiguilles une forme contraire à la flèche, c'est-à-dire élargie vers le bout ; et cette forme, que l'on a voulu quelquefois introduire, doit être sévèrement rejetée.

Les considérations que nous venons d'exposer sont également applicables aux aiguilles d'inclinaison. Il faut, de plus, employer beaucoup de précaution pour que l'axe de suspension passe exactement par le centre de gravité ; et cela est très-difficile, ne fût-ce qu'à cause du magnétisme que l'aiguille prend presque toujours spontanément dans l'atelier de l'artiste. Mais lorsque l'erreur est petite, on la corrige en aimantant successivement l'aiguille en deux sens opposés, ce qui exige seulement que l'on ait des faisceaux assez forts pour l'aimanter ainsi à chaque fois à saturation, afin que la disposition du magnétisme libre, et l'énergie absolue de la force magnétique, soient toujours les mêmes. Il faut aussi avoir soin de tourner successivement l'aiguille face à l'est, face à l'ouest, et observer à chaque fois l'inclinaison apparente, car l'inclinaison véritable est une moyenne entre les deux résultats ainsi observés ; il faut faire aussi ce retournement dans les observations d'intensités magnétiques. Cette opération, analogue au retournement de l'aiguille de déclinaison, a été suffisamment expliquée dans le chapitre III.

CHAPITRE IX.

De l'action des Aimans sur tous les corps naturels.

Nous avons dit que le fer, l'acier, le nickel et le cobalt étaient les seuls métaux magnétiques jusqu'à présent connus. Ce sont en effet les seuls qui puissent acquérir un état magnétique énergique et durable. Néanmoins, lorsqu'on forme avec toutes les substances quelconques de petites aiguilles de sept ou huit millimètres de longueur sur environ un demi-millimètre d'épaisseur, et qu'on les suspend à un fil de cocon entre les pôles opposés de deux forts aimans, on voit qu'elles se dirigent constamment dans le sens de ces pôles; et si on les fait osciller autour de leur direction d'équilibre, leurs oscillations en présence des aimans sont plus rapides que lorsqu'elles sont isolément suspendues dans l'espace. Ces petites aiguilles sont donc sensibles à l'influence des aimans. On peut faire également l'expérience avec des aiguilles d'or, d'argent, de verre, de bois, et de toutes les substances quelconques organiques ou inorganiques. Ces phénomènes remarquables ont été découverts par Coulomb, et annoncés par lui à l'Institut en mai 1812. Je dois même à l'amitié dont il m'honorait l'avantage de les lui avoir vu observer. Nous allons les étudier, en prenant pour guide le Mémoire inédit dans lequel il les avait consignés.

Il ne se présente au premier coup d'œil que deux manières de les expliquer : ou toutes les substances de la nature sont susceptibles de magnétisme, ou elles contiennent toutes des parcelles de fer et des autres métaux magnétiques qui leur communiquent cette propriété. Mais l'alternative n'est pas aussi inévitable qu'elle le semble d'abord; car elle suppose que l'action éprouvée par les aiguilles est réellement magnétique, et c'est ce qu'on ne saurait entièrement affirmer. Lorsque nous voyons le simple contact des corps hétérogènes développer des forces électriques sensibles, dont pendant long-temps on n'a pas même

soupçonné l'existence, ne devons-nous pas regarder comme possible que d'autres circonstances développent des forces semblables ou seulement analogues, dont les effets extrêmement faibles ne pourraient être aperçus qu'avec des appareils très-subtils; et l'action éprouvée par les petites aiguilles dont Coulomb a fait usage ne serait-elle pas due à quelque petite force de ce genre qui nous serait encore inconnue?

Dans cette incertitude, le parti le plus sage est d'observer exactement les phénomènes, d'en fixer les lois et de calculer les forces nécessaires pour les produire. C'est ce qui est très-facile d'après la durée des oscillations.

Considérons d'abord l'aiguille lorsqu'elle est isolée dans l'espace, et qu'elle oscille horizontalement en vertu de la seule force de torsion du fil de soie auquel elle est suspendue. Le moment statique de cette force peut alors être évalué directement d'après la durée des oscillations, et en le nommant n, on a

$$n = \frac{\pi^2 \, P \, l^2}{3 \, g \, T^2}.$$

P est le poids de l'aiguille, l la moitié de sa longueur, T le temps d'une de ses oscillations, g la pesanteur terrestre, et π le rapport de la circonférence au diamètre, ou 3,14159. Cette formule a été démontrée dans le chapitre de l'élasticité.

Maintenant, lorsque l'aiguille oscille entre les aimans, elle est sollicitée à la fois par l'influence qu'ils exercent sur elle, et par la torsion du fil auquel elle est suspendue. Mais si l'on a pris soin de la descendre entre eux dans une direction telle que sa situation d'équilibre réponde au zéro de torsion du fil qui la soutient, la torsion et la force attractive agiront sur elle de la même manière, proportionnellement à l'arc dont elle se sera écartée de son point de repos. Cela est évident pour la torsion, qui est toujours proportionnelle à cet écart, même dans les plus grands angles; mais cela est vrai aussi pour la force attractive dans les oscillations très-petites; car étant en général proportionnelle au sinus de l'écart, elle devient, dans les très-petites oscillations, proportionnelle à l'écart même. Par conséquent, si l'on nomme Q le moment statique de cette dernière force, en la supposant appliquée perpendiculairement à l'extrémité d'un

bras de levier égal à l'unité de longueur, $Q + n$ sera le moment statique de la résultante totale qui sollicite l'aiguille, lorsqu'elle est placée entre les deux aimans. Or ce moment peut se déduire des oscillations observées; car en nommant leur durée T', il est aussi exprimé par $\frac{\pi^2 P l^2}{3 g T'^2}$.

On aura donc $$Q + n = \frac{\pi^2 P l^2}{3 g T'^2};$$

ou en mettant pour n sa valeur

$$Q = \frac{\pi^2 P l^2}{3 g} \left(\frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2}\right).$$

Avant d'appliquer cette formule, il est nécessaire d'indiquer quelques précautions indispensables pour faire les observations avec exactitude.

Il faut d'abord préserver les aiguilles des agitations de l'air. Pour cela, Coulomb employait une cloche de verre AA, fig. 34, percée par le haut, et surmontée par un tube AB, dont l'extrémité supérieure était fermée par un bouchon de liége qui pouvait monter et descendre avec facilité. Ce bouchon était traversé par une tige *tt* de bois ou de métal, à laquelle on attachait le fil de cocon, dont l'extrémité inférieure portait un anneau de papier très-fin, dans lequel on plaçait la petite aiguille. Cette cloche se posait sur les pôles opposés des aimans NS. En élevant d'abord la tige *tt*, l'aiguille se trouvait soustraite à l'influence de ces aimans; on observait le nombre de ses oscillations, et l'on déterminait la direction du zéro de torsion; puis on tournait la tige jusqu'à ce que cette direction coïncidât avec l'axe des aimans. Enfin, en abaissant la tige, on descendait l'aiguille entre eux.

Ces aimans étaient formés chacun de 4 barreaux d'acier trempés à blanc, de 360^{mm} de longueur, 14 de largeur, et 4 d'épaisseur; en sorte que chaque faisceau avait 28 millimètres de largeur sur 8 d'épaisseur, et 360 de longueur. On les plaçait sur la même ligne, comme le représente la figure, de manière que leurs pôles opposés NS fussent éloignés l'un de l'autre de

20^{mm}. D'après ce que nous avons démontré sur la distribution du magnétisme libre dans les barreaux aimantés par la méthode de la double touche, on voit que la distance de leurs centres d'action était beaucoup plus grande, et au moins de 120 millimètres ; ce qui suffisait pour que les directions de leurs attractions sur les divers points des aiguilles pussent être censées parallèles.

Après avoir constaté à l'aide de cet appareil l'influence des aimans sur toutes sortes de substances, Coulomb entreprit de la mesurer exactement pour les métaux, qui offraient l'avantage de pouvoir être façonnés en aiguilles bien cylindriques. MM. Sage et Guyton lui ayant procuré des morceaux purifiés avec le plus grand soin par les moyens chimiques, il en forma plusieurs aiguilles ayant toutes une même longueur de 7 millimètres et pesant 40 milligrammes, et il les soumit à l'action de son appareil. Ces aiguilles, hors de l'influence des aimans, faisaient toutes 4 oscillations en 44″, égalité à laquelle on devait s'attendre, à cause de la similitude de leur longueur et de leur poids. Ainsi, en prenant le millimètre pour unité de longueur, et le milligramme pour unité de poids, on avait, relativement à toutes ces aiguilles,

$$l = 3{,}5 \qquad P = 40 \qquad T = 11.$$

Il faut de plus exprimer aussi g en millimètres ; ce qui donne

$$g = 9808{,}8.$$

Ces données déterminent le moment n de la force de torsion du fil de soie auquel les aiguilles étaient suspendues, et l'on en tire

$$n = 0{,}0013551,$$

ce qui équivaut environ à $\frac{1}{715}$ de milligramme suspendu à un bras de levier d'un millimètre. Maintenant les aiguilles étant descendues entre les aimans, on a trouvé

Pour l'or	4 oscillations en	22″	$T' = 5'',50$
argent		20	$T' = 5,00$
plomb		18	$T' = 4,50$
cuivre		22	$T' = 5,50$
étain		19	$T' = 4,75$

D'après ces durées, on peut calculer le moment total $Q + n$ des forces qui sollicitaient chacune de ces aiguilles, et retranchant la valeur constante de n, on aura Q; on trouve ainsi

	Valeur de $Q + n$.	Valeur de Q.
Or	0,0054204	0,0040653
Argent	0,0065587	0,0052036
Plomb	0,0080972	0,0067421
Cuivre	0,0054204	0,0040653
Etain	0,0072673	0,0059122

Comme le moment de la torsion seule est exprimé pour toutes ces aiguilles par 0,0013551, on voit que l'action Q exercée par les aimans sur elles était entre trois et quatre fois aussi forte que la torsion du fil de cocon auquel elles étaient suspendues.

Les différences notables qui se trouvent entre les valeurs de Q pour les différens métaux ne permettent guère de supposer que l'action éprouvée par les aiguilles fût la gravitation même produite par la masse des aimans; car la gravitation s'exerce sur toutes les substances avec une énergie égale; ce qui aurait dû produire des oscillations d'égale durée. Par la même raison, l'on ne peut guère supposer que cette action soit de nature électrique. A la vérité, les variations de Q ne répondent qu'à une différence d'une ou trois ou quatre secondes sur la durée de quatre oscillations; mais on ne saurait admettre des erreurs pareilles dans des observations que Coulomb avait faites avec un soin extrême, et répétées un grand nombre de fois. Reste donc à examiner si l'influence des aimans serait due à des parcelles de fer répandues dans tous les corps de la nature, et alors il faut chercher quelle proportion ces phénomènes en supposeraient.

Pour cela, Coulomb forma trois mélanges de cire blanche et de limaille de fer dans diverses proportions, savoir :

N°	1	$\frac{1}{4}$ du poids de la cire, ou	$\frac{1}{5}$ du poids total.
	2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
	3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{17}$

Il tira ensuite de chacun d'eux un cylindre de 22 millimètres de longueur, dont il proportionna la grosseur de manière qu'il pesât exactement 212 milligrammes. Il suspendit successivement

ces trois cylindres au même fil de cocon, les fit osciller entre les pôles des aimans éloignés l'un de l'autre de 100 millimètres. Il eut ainsi les résultats suivans :

	Temps de 40 oscillations.
N° 1	32
2	43
3	61

Ces nombres, divisés par 40, donneront les durées d'une seule oscillation, ou T'; après quoi, en les substituant dans la formule,

$$\frac{\pi^2 \, P \, l^2}{3 g T'^2},$$

qui donne le moment total $Q + n$, on aura

N° 1	$Q + n =$	13,4432
2	$Q + n =$	7,4450
3	$Q + n =$	3,6995

Coulomb n'a pas fait osciller ses aiguilles hors de l'influence des aimans pour déterminer la valeur de n; mais, d'après celle que nous avons trouvée pour cette quantité dans les premières expériences, on doit sentir qu'elle sera excessivement petite, comparativement à celles de $Q + n$ et de Q que nous trouvons actuellement. Ainsi, en la négligeant, nous pourrons regarder les nombres que nous venons d'obtenir comme représentant à très-peu de chose près les valeurs de Q. Cela revient à négliger la force de torsion du fil de cocon, comparativement à la force aimantaire de nos cylindres.

Maintenant, si nous partons du premier nombre 13,4432, et que nous le représentions par $\frac{1}{5}$, proportion de limaille contenue dans le poids du premier cylindre, ce qui revient à le diviser par 67,2160, nous trouverons, en réduisant les deux autres à la même échelle, qu'ils sont respectivement représentés par $\frac{1}{9,005}$ et $\frac{1}{18,16}$, c'est-à-dire à très-peu de chose près, par les proportions de limaille contenues dans chacun des deux derniers cylindres. Ainsi, en accordant aux observations les erreurs inévitables qu'elles comportent, nous devons regarder cette loi comme exacte, c'est à-dire que les forces exercées par les aimans sur

divers petits cylindres de même poids et de même longueur sont proportionnelles aux quantités de particules ferrugineuses qu'ils contiennent.

On pourrait s'étonner de trouver cette proportion si exacte. Car puisque la cire, comme tous les autres corps, éprouve quelque influence quand on la place entre nos aimans, l'effet de cette influence devrait entrer pour quelque chose dans le résultat total. Cela est vrai; mais d'après les résultats de nos premières expériences, on doit sentir que cet effet est d'un tout autre ordre que celui que nous observons actuellement; de sorte qu'il ne peut participer aux résultats que pour une proportion infiniment petite, d'autant plus que Coulomb l'avait encore affaibli et rendu insensible par la distance de 100 millimètres qu'il avait mise entre les aimans. Car à cette distance, les aiguilles de cire pure ne prenaient plus de direction déterminée.

Pour compléter ces premières déterminations, Coulomb a divisé chaque cylindre en quatre ou cinq autres de même longueur, mais dont par conséquent la masse était beaucoup moindre; et en les suspendant comme les premiers, ils ont fait chacun le même nombre d'oscillations que le cylindre total duquel on les avait tirés; de sorte que l'action des aimans sur chacun de ces petits cylindres était exactement proportionnel à leur masse. Ce résultat tient sans doute à ce que les particules ferrugineuses disséminées dans ces cylindres étaient trop distantes, et s'aimantaient trop peu pour agir sensiblement les unes sur les autres, et altérer réciproquement leur magnétisme naturel.

Coulomb a obtenu la même égalité entre divers petits cylindres de même longueur, mais de grosseur inégale, tirés d'un culot d'argent qui avait été séparé du fer par la simple fusion. Ce culot avait évidemment conservé quelques particules ferrugineuses; car les barreaux aimantés agissaient sensiblement sur les parcelles qu'on en détachait. Cependant, lorsqu'on le dissolvait dans l'acide nitrique, et qu'on essayait de le précipiter par le prussiate de potasse, il ne donnait pas la plus légère nuance de couleur bleue.

Pour connaître combien cet argent pouvait contenir de fer,

Coulomb se proposa de le comparer au mélange de cire et de limaille n° 1. Il en tira une lame de 26 millimètres de longueur, et il tira aussi du n° 1 un cylindre de même longueur et de même largeur que cette lame. Il fit ensuite osciller ces deux aiguilles entre les pôles des aimans placés à 70 millimètres de distance, et il trouva

Mélange n° 1.... 40 oscillations en..... 16″.
Argent......... 40................. 128″.

D'après les expériences précédentes, ces temps auraient encore été les mêmes, si les deux cylindres eussent été de même poids. Mais alors les forces directrices auraient été réciproquement proportionnelles au carré du temps des oscillations. Ainsi, *à poids égal*, l'action magnétique éprouvée par l'aiguille d'argent est $\frac{(16)^2}{(128)^2}$ ou $\frac{1}{64}$ de celle qu'éprouve l'aiguille formée de cire et de limaille. Or, celle-ci contient $\frac{1}{5}$ de son poids de fer, et les actions des aimans sont proportionnelles à la quantité de ce métal que les aiguilles contiennent; par conséquent la proportion du fer dans l'aiguille d'argent est $\frac{1}{5.64}$ ou $\frac{1}{320}$ de son poids; c'est-à-dire que, sur 320 parties en poids, elle en contient 319 d'argent pur et 1 de fer.

Ce résultat offrait un terme de comparaison pour déterminer la proportion de fer qui peut rester encore dans les métaux purifiés par les procédés chimiques, regardés comme les plus exacts; par exemple, dans l'argent purifié à la coupelle ou retiré du muriate d'argent. Mais comme les aiguilles faites de cet argent n'éprouvaient pas d'action sensible de la part des aimans, lorsque leurs pôles étaient éloignés de 70 millimètres, comme dans l'expérience précédente, Coulomb les rapprocha et les mit à 24 millimètres. Il forma ensuite deux petites lames, chacune de 13 millimètres de longueur, l'une avec de l'argent allié à $\frac{1}{320}$ de fer, l'autre avec l'argent retiré du muriate, et il éprouva comparativement leurs oscillations.

D'abord les deux aiguilles, oscillant hors de l'influence des aimans, faisaient l'une et l'autre 4 oscillations en..... 96''.
Entre les deux aimans, on avait

Aiguille d'argent pur, 40 oscillations en....... 450''.
d'argent allié, 40.................... 25''.

Dans le calcul de ces expériences, on peut supposer que les deux aiguilles avaient exactement le même poids. Cela devait être en effet, au moins à très-peu de chose près, puisque étant de même longueur, la torsion seule les faisait mouvoir avec une égale rapidité. Mais de plus, cette supposition n'influe pas du tout sur le temps des oscillations magnétiques, puisque le temps reste le même pour des longueurs égales, quelle que soit la grosseur de nos aiguilles. D'après cela, en appliquant la formule de la page 119, les momens Q, Q' des actions magnétiques qu'elles éprouveront seront, à poids égal,

$$\text{Arg. pur } Q = \frac{\pi^2 P l^2}{3g}\left[\frac{1}{(11,25)^2} - \frac{1}{(24)^2}\right] = \frac{\pi^2 P l^2}{3g} \cdot 0,00616512$$

$$\text{Arg. allié } Q' = \frac{\pi^2 P l^2}{3g}\left[\frac{1}{(0,625)^2} - \frac{1}{(24)^2}\right] = \frac{\pi^2 P l^2}{3g} \cdot 2,558264.$$

Il est inutile de calculer le facteur dépendant des longueurs et des poids, puisqu'il est le même pour les deux aiguilles. Il disparaîtra en divisant la première de ces valeurs par l'autre, et l'on trouvera

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{1}{414,97};$$

c'est-à-dire que l'action des aimans sur l'argent purifié à la coupelle est, à poids égal, 415 fois moindre que sur l'argent allié. Or, en supposant que cette action s'exerce uniquement sur les particules de fer, nous avons vu qu'elle est exactement proportionnelle à la quantité de ce métal contenu dans des aiguilles d'égale longueur. Il y aura donc 415 fois moins de fer dans l'argent purifié que dans l'argent impur; et puisque celui-ci en contient $\frac{1}{320}$ de son poids, le premier en contiendra

$\frac{1}{320.415}$ ou $\frac{1}{132800}$; c'est-à-dire que, sur 132800 parties, il y en aura 132799 d'argent pur et 1 de fer. Ce sont là des atomes dont l'analyse chimique la plus parfaite est bien éloignée de pouvoir répondre, et par conséquent on ne saurait décider que l'influence des aimans dans cette circonstance n'est pas due à cette infiniment petite proportion de particules ferrugineuses. Il n'y aurait rien non plus d'étonnant que des proportions du même ordre se trouvassent dans tous les corps organisés ou non organisés, et même dans les liquides en apparence les plus purs. Cependant il serait fort intéressant d'éprouver l'action des aimans sur des aiguilles de liquides congelés. Car en mettant beaucoup de soin à les préparer, et même en les formant de toutes pièces par des combinaisons chimiques, on aurait la plus grande probabilité d'en exclure le mélange du fer, ou au moins de le rendre aussi peu sensible que possible; et alors, si l'action des aimans sur tous les corps était uniquement produite par la présence de ce métal, elle devrait, sur de pareilles aiguilles, s'affaiblir extrêmement, ou même cesser tout-à-fait d'exister.

Dans tous les cas, il paraît impossible d'attribuer à une semblable cause la faculté magnétique du cobalt et du nickel. J'ai possédé une aiguille de nickel qui avait été purifiée avec tout le soin possible par M. Thénard. Elle avait de longueur $212^{mm},7$, de largeur 6^{mm}, et pesait $5^{g},178$. J'ai fait construire une aiguille d'acier de dimensions exactement pareilles; elle pesait $4^{g},586$. Après les avoir aimantées toutes deux à saturation, je les ai fait osciller horizontalement dans le méridien magnétique. Le temps de 10 oscillations a été pour l'aiguille de nickel 87″, pour celle d'acier 45″,5. Les figures étant égales, les momens des forces directrices sont entre eux en raison directe des poids et inverse des carrés de ces nombres, ou comme 0,3088 à 1; c'est-à-dire que la force directrice de l'aiguille de nickel était presque le tiers de celle que possédait l'acier. La proportion du fer qu'il faudrait admettre dans le nickel pour produire un pareil effet surpasse beaucoup celle que l'on peut y supposer avec quelque vraisemblance.

CHAPITRE X.

Lois du Magnétisme terrestre à différentes latitudes.

Nous avons annoncé, dans le chapitre III, que l'inclinaison, la déclinaison et l'intensité des forces magnétiques n'étaient pas les mêmes pour toute la terre. Nous avons maintenant les procédés nécessaires pour fixer exactement l'état actuel de ces phénomènes. Il ne faut que transporter successivement en divers lieux une même aiguille aimantée ou des aiguilles comparables, et y observer les trois élémens que nous venons de désigner. Cette grande expérience a été entreprise vers l'an 1700, par le célèbre astronome Halley, auquel le gouvernement anglais confia un vaisseau uniquement destiné à le transporter successivement, avec ses instrumens, dans les diverses parties du globe. Mais les recherches de Halley ayant pour objet principal la détermination des longitudes d'après les déclinaisons de la boussole, il s'attacha surtout à observer cet élément, qui malheureusement paraît être le plus variable. De sorte que, lorsqu'on veut décrire aujourd'hui l'état du magnétisme terrestre, on est obligé de recourir aux observations isolées des navigateurs plus modernes. Mais les aiguilles dont ils ont fait usage, n'étant point comparées les unes aux autres, et leurs manières d'observer n'étant pas les mêmes, on conçoit que ces différences doivent jeter beaucoup d'anomalies apparentes dans les résultats; de sorte qu'on peut tout au plus espérer d'y reconnaître les circonstances les plus générales des phénomènes, sans pouvoir les mesurer dans leurs détails. Enfin, ce qui augmente encore les difficultés, on manque tout-à-fait d'observations dans une grande partie du globe, où elles seraient d'autant plus nécessaires, que l'ensemble des faits semble y indiquer l'action de causes locales extrêmement remarquables, dont il est im-

possible de se faire une idée autrement que par l'expérience même. C'est pourquoi je me bornerai ici à indiquer ce que l'on peut jusqu'à présent reconnaître sur la marche générale des phénomènes, sans entreprendre de les lier par des calculs dont les données les plus nécessaires nous manqueraient. Cela suffira pour indiquer aux voyageurs les points du globe sur lesquels il serait principalement utile de diriger leurs efforts et de multiplier leurs observations.

Je considérerai d'abord les inégalités de l'inclinaison magnétique dans les divers climats de la terre, parce que ce phénomène paraît varier avec le temps beaucoup moins que la déclinaison. Pour y découvrir quelque loi, la première chose à faire, ce doit être de déterminer les points du globe où l'inclinaison est nulle; en sorte qu'une aiguille qui, avant d'être aimantée, s'y tient horizontale, y demeure encore horizontale après l'aimantation. La suite de ces points forme sur la terre une ligne courbe que l'on nomme l'*équateur magnétique*, et que tous les auteurs ont jusqu'ici regardée comme un grand cercle incliné sur l'équateur terrestre d'environ 12°. C'est en effet ce qu'indiquent toutes les observations faites sur une étendue de plus de 180° de longitude, dans l'Océan Atlantique, la mer des Indes et la partie de la mer du Sud qui baigne les côtes de l'Amérique méridionale. Pour le faire voir, supposons que M', M'', fig. 35, soient deux points du globe où l'observation a montré que l'inclinaison était nulle; menons le grand cercle $AE'E''$, pour représenter l'équateur terrestre; et soit AM un autre grand cercle perpendiculaire à $AE'E''$, pour représenter le méridien terrestre, dont les longitudes sont comptées sur l'équateur. Alors si des points observés $M'M''$ on mène d'autres portions de méridien $M'E'$, $M''E''$ pareillement terminées à l'équateur, les arcs AE', AE'', que je nommerai $l'l''$, seront les longitudes des points observés $M'M''$, et les arcs $E'M'$, $E''M''$, que je nommerai $\lambda'\lambda''$, en seront les latitudes géographiques. Cela posé, si par ces points on mène un arc de grand cercle qui aille couper l'équateur quelque part en N', à une distance du

point A égale à AN′ ou x, et sous une inclinaison M′N′E′, que je désignerai par i, les deux triangles sphériques M′N′E′, M″N″E″, rectangles en E′, E″ donneront les deux équations

$$\operatorname{tang} i = \frac{\operatorname{tang} \lambda'}{\sin(l'-n)}; \qquad \operatorname{tang} i = \frac{\operatorname{tang} \lambda''}{\sin(l''-n)},$$

d'où l'on tire, en éliminant i,

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{tang} \lambda'' \sin l' - \operatorname{tang} \lambda' \sin l''}{\operatorname{tang} \lambda'' \cos l' - \operatorname{tang} \lambda' \cos l''}.$$

Cette équation déterminera x, c'est-à-dire la longitude du nœud du grand cercle, et l'autre déterminera son inclinaison (1). Or si toutes les observations faites en diverses parties du monde, étant combinées ainsi deux à deux, donnent toujours pour x et i à peu près les mêmes valeurs, on sera en droit d'en conclure que l'équateur magnétique est en effet un grand cercle du globe terrestre, du moins dans l'étendue embrassée par les observations dont on a fait usage. Pour voir jusqu'à quel point cette indication est satisfaite, j'ai calculé le tableau suivant :

---

(1) Cette expression de tang x serait peu commode pour l'emploi des logarithmes; il vaut mieux en tirer

$$\operatorname{tang}(l'-x) = \frac{\operatorname{tang} \lambda' \sin(l''-l')}{\operatorname{tang} \lambda'' - \operatorname{tang} \lambda' \cos(l''-l')};$$

après quoi, prenant un angle auxiliaire φ, tel qu'on ait

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{tang} \lambda' \sin(l''-l')}{\operatorname{tang} \lambda''},$$

on trouve, en éliminant tang λ'',

$$\operatorname{tang}(l'-x) = \frac{\sin(l''-l') \sin \varphi}{\sin(l''-l'-\varphi)}.$$

Le tableau suivant a été calculé par ces deux formules.

Désignation des lieux.	Noms des observateurs, et dates des observat.	Latitudes.	Longit. comptées du méridien de Paris.	Inclinaison du grand cercle.	Longitud. du nœud occid.
Océan Atlantique. .	La Peyrouse, 1786	11° 9′ 7″. A	24° 17′ 10″. occ.	11° 9′ 7″	114° 22′ 54″
Mer du Sud.	La Peyrouse, 1786	0 50 30 . B	118 39 20 . occ.		
Mer des Indes.	W. Bayly, 1780	7 51 57 . B	103 53 32 . ori.	12 51 45	113 20 19
Océan Atlantique. .	W. Bayly, 1780	12 48 36 . A	18 4 47 . occ.		
Océan Atlantique. .	Lacaille, 1750 ?	11 30 0 . A	10 30 0 . occ.	12 3 32	118 15 25
Océan Atlantique. .	Lacaille, 1750 ?	12 0 0 . A	34 0 0 . occ.		
Océan Atlantique. .	La Peyrouse, 1786	11 9 7 . A	24 17 10 . occ.	11 11 32	119 13 15
Pérou.	Humboldt	7 1 49 . A	80 39 59 . occ.		
Mer du Sud.	La Peyrouse, 1786	1 1 53 . A	118 55 30 . occ.	12 33 22	114 17 19
Pérou.	Humboldt	7 1 49 . A	80 39 59 . occ.		
Mer des Indes.	W. Bagly, 1786	7 51 57 . B	103 53 32 . ori.	12 40 30	113 55 43
Pérou.	Humboldt	7 1 49 . A	80 39 59 . occ.		
			Moyenne.	12° 5′ 0	115° 34′ 0

L'accord de ces résultats est assurément bien remarquable. L'on semble bien autorisé à en conclure que l'équateur magnétique est réellement un grand cercle de la sphère terrestre, incliné à l'équateur d'environ 12°, et dont le nœud occidental est situé vers 115° 34′ de longitude à l'occident de Paris, c'est-à-dire dans la mer du Sud, près l'île Gallego, à neuf cents lieues des côtes du Pérou ; ce qui place le nœud opposé à 295° 34′ de longitude également occidentale. Telle a été en effet jusqu'ici l'opinion générale. Mais chose étonnante ! ces élémens sont totalement en défaut dans toute la partie de la mer du Sud située au-delà du nœud occidental, entre 115 et 270° de longitude, ce qui comprend presque un hémisphère entier de mer. En effet, en discutant des observations faites avec le plus grand soin par William Bayly et Cook, sur deux bâtimens différens qui naviguaient de concert dans la mer du Sud en 1777, je trouve qu'ils ont *l'un et l'autre* rencontré l'équateur magnétique à 158° 50′ 9″ de longitude occidentale, et à 3° 13′ 40″ *de latitude australe;* tandis qu'en prolongeant le grand cercle que nos premières observations nous avaient donné, cet équateur aurait dû alors se trouver à une latitude *boréale* de 8° 36′ 30″. Ceci nous montre donc que l'équateur magnétique, après avoir rencontré l'équateur terrestre vers 115° de longitude occidentale, redescend dans la partie australe du globe ; et comme les observations de Bayly, confirmées en cela par celles de Dalrymple, montrent de nouveau la ligne sans inclinaison vers 7° de latitude *boréale* dans les mers de la Chine, à 256° de longitude occidentale, il en faut conclure qu'entre cette longitude et celle de 158° 50′, déterminée par l'observation de Cook, l'équateur magnétique et l'équateur terrestre ont au moins encore une intersection, indépendamment du nœud oriental situé dans les mers de l'Inde vers 295° de longitude et dépendant de la partie circulaire. Il y aura donc en tout au moins trois nœuds, et peut-être quatre, si l'équateur magnétique, près de son nœud occidental, s'élève un peu vers le nord avant de redescendre dans le sud vers l'archipel des îles de la Société. On a représenté, dans la fig. 36, la série de ces inflexions, dont

nous trouverons encore bientôt des confirmations frappantes dans les effets qui en dérivent.

Lorsqu'on examine les inclinaisons magnétiques observées de part et d'autre de la ligne que nous venons de tracer, on trouve qu'elles augmentent à mesure qu'on s'en éloigne. Si l'on se borne à considérer la moitié du globe pour laquelle l'équateur magnétique semble être exactement circulaire, ce qui comprend l'Europe, l'Afrique, l'Océan Atlantique, et les côtes orientales des deux Amériques, on voit l'inclinaison rester à peu près constante sur les parallèles situés à distances égales de part et d'autre de cet équateur; en sorte qu'en suivant toujours la même loi, le maximum d'inclinaison aurait lieu dans deux points opposés de la terre, dont l'un, situé vers le nord, se trouverait vers 25° de longitude occidentale, et 90° — 12°, ou 78° de latitude boréale; tandis que l'autre, diamétralement opposé, aurait 205° de longitude occidentale, et 78° de latitude sud. Ce seraient donc là les *pôles* de l'équateur magnétique; et telles sont en effet approximativement les positions que les physiciens leur ont assignées. Mais quand on se borne à cette moitié de la terre où les lois de l'inclinaison semblent être les plus simples, on peut aller beaucoup au-delà de ces indications générales. Car on peut représenter à très-peu de chose près les inclinaisons en nombres, en supposant au centre de la terre un aimant très-petit, ou, ce qui revient au même, deux centres magnétiques infiniment voisins, dont les actions s'exercent sur tous les points de la surface du globe selon les lois ordinaires des forces magnétiques, c'est-à-dire en raison inverse du carré de la distance. Ce résultat se trouve établi d'après l'observation, dans un mémoire publié par M. de Humboldt et moi, sur les variations du magnétisme terrestre à différentes latitudes. Si l'on nomme i l'inclinaison de l'aiguille aimantée vers le nord pour un lieu dont la latitude magnétique est λ', on a toujours

$$\text{tang}\,(i + \lambda') = \frac{\sin 2\lambda'}{\cos 2\lambda' - \frac{1}{3}}.$$

Ceci exige que l'on sache calculer λ'. Soit, fig. 37, A E l'équateur terrestre, N E' l'équateur magnétique, supposé pareille-

ment un grand cercle, et M le lieu donné sur le globe, ayant pour longitude $AE = l$, et pour latitude géographique $ME = \lambda$. Si de ce point on mène l'arc de grand cercle ME', perpendiculaire à l'équateur magnétique, cet arc exprimera la latitude magnétique de M. Or comme on connaît la longitude AN ou a du nœud de l'équateur magnétique, en l'exprimant par a, on aura $NE = l - a$. Ainsi dans le triangle sphérique MNE rectangle en E, on connaîtra les deux côtés NE, ME. On pourra donc calculer l'hypoténuse MN ou H et l'angle N par les formules

$$\cos H = \cos \lambda \cos (l - a)\,; \qquad \text{tang } N = \frac{\text{tang } \lambda}{\sin (l - a)}.$$

L'angle N étant connu, on y ajoutera l'inclinaison I des deux équateurs, et l'on aura l'angle MNE'. Alors, dans le triangle MNE', l'arc ME' ou λ', latitude magnétique du point M, s'obtiendra par la formule

$$\sin \lambda' = \sin H \sin (N + I).$$

Effectuons ces calculs pour Paris, par exemple. Alors la longitude l sera 0; la latitude λ sera $48° 50' 14''$, NE ou $l - a$ sera $64° 26'$, c'est-à-dire égale à la longitude du nœud oriental de l'équateur magnétique. Avec ces données, on trouve

$$H = 73° 29' 10'', \quad N = 51° 44' 10'', \quad \lambda' = 59° 20' 10''.$$

Enfin, avec cette valeur de λ', calculant $i + \lambda'$ et i, on trouve

$$i + \lambda' = 132° 49' 20'', \quad \text{et par suite} \quad i = 73° 29' 10''.$$

C'est donc là l'inclinaison de l'aiguille aimantée à Paris selon notre formule : l'expérience directe donne environ 70°.

Notre formule donne une relation très-simple entre les inclinaisons observées près de l'équateur magnétique. En effet, dans ce cas, i et λ' sont des quantités fort petites. Si l'on se borne à leur première puissance, on peut regarder $\cos 2\lambda'$ comme égal à 1, et substituer à $\text{tang}(i + \lambda')$ et $\sin 2\lambda'$ les arcs qui leur correspondent. Alors la formule se réduit à

$$i = 2\lambda'\,;$$

c'est-à-dire que chaque inclinaison est exactement double de la latitude magnétique correspondante. Cette relation se trouve parfaitement vérifiée dans toutes les observations faites à peu de distance de l'équateur magnétique entre les limites où il est sensiblement circulaire.

Par exemple, à Tompenda, au Pérou, M. de Humboldt a observé une inclinaison de $3^{\circ}\ 11'\ 42''$, ce qui donne λ', ou la latitude magnétique de Tompenda égale à $1^{\circ}\ 35'\ 36''$. En la calculant d'après la position géographique, on trouve $1^{\circ}\ 28'\ 55''$.

Autre exemple : à Quito au Pérou, la latitude magnétique,
calculée d'après la position géographique, est. $\lambda' = \ 6^{\circ}\ 33'\ 10''$
en la doublant, on aura l'inclinaison....... $i = 13\ \ 6\ \ 20$
M. de Humboldt a trouvé par observation. . $i = 13\ \ 21\ \ 54$

Les observations de La Peyrouse et de Lacaille, près de l'équateur magnétique, dans l'océan Atlantique et la mer des Indes, étant réduites de la même manière, m'ont présenté les mêmes accords avec la formule. Malheureusement ces lois simples ne s'étendent pas aux parties opposées du globe, qui sont affectées par les inflexions de l'équateur magnétique. Si l'on essaie d'appliquer la formule rigoureuse à quelques-unes des îles australes de la mer du Sud, à Otaïti, par exemple, où Cook a si souvent observé, on trouve des inclinaisons australes beaucoup trop fortes; et au contraire, pour les pays situés au nord de l'Amérique vers la même longitude, les inclinaisons calculées sont beaucoup trop faibles. Ces écarts résultent nécessairement de l'inflexion qui, dans cette partie du globe, ramène l'équateur magnétique vers le pôle austral, et elles en donnent une confirmation frappante.

Il faut donc, pour satisfaire à ces phénomènes, supposer vers les archipels de la mer du Sud quelque cause perturbatrice locale, telle qu'un centre particulier de forces magnétiques qui influe surtout dans cet hémisphère et y modifie l'action centrale. En effet, cette supposition permet d'accorder tous les résultats, et même elle n'exige dans le centre secondaire qu'une force très-faible qui tienne presque uniquement son énergie de sa proximité. Mais avant de chercher à la définir et à la mesurer, il faut étudier les variations que la déclinaison de la boussole et l'intensité des forces magnétiques éprouvent à différentes latitudes. Car ces phénomènes, étant aussi des résultats de l'action magnétique du globe, doivent être pris en considération, quand on veut la représenter complètement.

De même que, pour étudier les inclinaisons, nous avons com-

mencé par chercher la série des lieux où elles étaient nulles ; de même pour discuter les phénomènes que la déclinaison présente, il nous faut commencer par fixer sur le globe les points où elle est nulle, et dont la série forme ce que l'on appelle les *lignes sans déclinaison* (1). Ces lignes ne suivent pas les méridiens géographiques ; elles leur sont au contraire fort obliques, et elles offrent des inflexions très-irrégulières. D'après les observations les plus récentes, il existe à présent une ligne sans déclinaison dans l'océan Atlantique entre l'ancien et le nouveau monde. Elle coupe le méridien de Paris vers une latitude australe d'environ 65° ; de là elle remonte au nord nord-ouest jusque vers 55° de longitude, où elle se trouve à la hauteur des côtes du Paraguay ; après quoi, redevenant presque nord et sud, elle longe les côtes du Brésil, et va ainsi jusqu'à la latitude de Cayenne. Mais alors se tournant tout à coup au nord-ouest, elle se dirige aux Etats-Unis, et de là vers les autres parties septentrionales du continent d'Amérique, qu'elle traverse en suivant toujours la même direction.

La position de cette ligne n'est pas fixe sur le globe ; du moins depuis un siècle et demi ; elle s'est déplacée considérablement de l'est à l'ouest. Elle passait à Londres en 1657, et à Paris en 1664. Ainsi, d'après sa direction actuelle, elle a parcouru sur ce parallèle près de 80° de longitude en 150 ans. Mais il n'y a nul doute que ce déplacement n'est point uniforme ; il est même fort inégal sur les différens parallèles ; car, à la Jamaïque, par exemple, la déclinaison n'a pas éprouvé de changement sensible depuis 140 ans. En général, d'après la lenteur actuelle de ce mouvement, il n'est pas du tout certain qu'il soit constamment progressif, ni qu'il doive se continuer dans un sens quelconque. Ce sont des choses que le temps seul peut nous apprendre.

Des observations très-précises de l'inclinaison faites à diverses époques, par Gilpins et Cavendish à Londres, ont prouvé que cet élément est pareillement variable, quoique beaucoup moins que la déclinaison. L'inclinaison à Londres était, en 1775,

(1) Les élémens essentiels de cette discussion m'ont été fournis par M. de Humboldt.

72° 30′; en 1805, 70° 21′. Ce résultat a été confirmé en France par les expériences de M. de Humboldt.

Il existe une autre bande sans déclinaison, à peu près opposée à la précédente; celle-ci, se dirigeant constamment au nord-ouest, prend naissance dans le grand Océan austral, coupe la pointe occidentale de la Nouvelle-Hollande, traverse la mer des Indes, entre sur le continent d'Asie au cap Comorin, et de là, passant à travers la Perse et la Sibérie occidentale, s'élève vers la Laponie. Mais ce qui est bien remarquable, cette ligne se bifurque près du grand archipel d'Asie, et elle donne naissance à une autre branche qui, se dirigeant presque tout-à-fait du sud au nord, passe cet archipel, traverse la Chine et ressort dans la partie orientale de la Sibérie. L'existence de cette branche et sa séparation de la précédente sont clairement indiquées par les observations faites dans les mers de la Chine; mais je puis en offrir une confirmation encore plus sûre dans les déclinaisons observées en Russie et sur les frontières de la Chine par le célèbre astronome Schubert, qui a bien voulu me les communiquer. Car étant allé, dans l'été de 1805, de Casan à Tobolsk, et de Tobolsk à Irkutsk, il a rencontré successivement les deux branches que nous venons de décrire dans leurs parties boréales où elles sont les plus écartées; et c'est en effet ce qu'annoncent ses observations, que je me fais un devoir de rapporter ici.

Noms des lieux.	Latit. boréale.	Long. occid. de Paris, en temps.	Déclinais. orient.	Inclinaison.
Casan..........	55° 47′ 51″	3h 3′ 38″	2° 2′ ½	
Pekin..........	58 1 13	3 31 46	1 1	
Catherinebourg..	56 50 43	3 48 57	5 40	
Tobolsk........	58 11 56	4 18 30	7 9	78°
Tara...........	56 54 46	4 42 27	6 6	
Touisk.........	56 42 *	5 30 0	5 37	
Nish-Udinsk.....	54 55 21	6 26 46	2 40	
Irkutsk.........	52 16 44	6 47 25	0 32	67

* L'indication des minutes a été déchirée par le cachet de la lettre.

Les deux branches qui composent cette ligne ou ne se déplacent point, ou se meuvent avec beaucoup de lenteur. Il est certain que la déclinaison n'a point varié depuis 140 ans à la Nouvelle-Hollande.

On trouve encore des indices d'une quatrième ligne sans déclinaison, observée par Cook dans la mer du Sud, vers le point de la plus grande inflexion de l'équateur magnétique. Cette ligne n'a pas été suivie dans le nord par les navigateurs; mais il est extrêmement probable qu'elle s'y continue; car selon une remarque très-juste de M. de Humboldt, puisque, des deux côtés de chaque ligne sans déclinaison, la déclinaison change de signe, et devient d'orientale occidentale, il faut nécessairement que sur le contour entier du globe le nombre des lignes sans déclinaison soit pair, afin que l'on retombe sur le même signe, après toutes les alternatives de plus et de moins.

Ayant déterminé la direction des lignes sans déclinaison, il faut, pour fixer l'autre limite des phénomènes, tracer la suite des lieux où la déclinaison est la plus grande. On trouve ainsi des lignes tout aussi irrégulières, qui s'interposent entre les premières. La plus grande de toutes les déclinaisons observées dans l'hémisphère austral l'a été par Cook à 60° 49′ de latitude, et 93° 45′ de longitude occidentale, compté du méridien de Paris; elle était de 43° 45′. La plus grande de toutes celles que l'on a observées dans l'hémisphère nord l'a été aussi par Cook à 70° 19′ de latitude, et 161° 1′ de longitude orientale; elle était de 36° 19′ à l'est.

Après avoir ainsi exposé tout ce que l'on sait jusqu'à présent sur la direction des forces magnétiques dans les diverses parties de la terre, il nous reste à considérer leur intensité absolue; elle a été beaucoup moins étudiée que la déclinaison et l'inclinaison; ce qui vient sans doute de ce qu'elle est plus difficile à mesurer avec exactitude. Je ne connais à cet égard d'observations précises que celles que M. de Humboldt a faites dans son grand voyage, et celles de M. de Rossel dans l'expédition de l'amiral d'Entrecasteaux.

Les recherches de M. de Humboldt sur cet objet découvrent

un phénomène très-remarquable; c'est l'accroissement général de l'intensité en allant de l'équateur magnétique vers les pôles.

En effet, la même boussole qui, lors du départ de M. de Humboldt, donnait à Paris 245 oscillations en 10 minutes de temps, n'en a plus donné au Pérou que 211, et elle a constamment varié dans le même sens; c'est-à-dire que le nombre des oscillations a toujours diminué en approchant de l'équateur magnétique, et toujours augmenté en s'en éloignant vers le nord. On ne peut pas attribuer ces différences à une diminution des forces magnétiques de la boussole, ni supposer qu'elle se serait affaiblie par l'effet du temps et de la chaleur; car après trois années de séjour dans les pays les plus chauds de la terre, cette boussole a de nouveau donné au Mexique des oscillations aussi rapides qu'à Paris. Enfin M. de Humboldt n'a rien négligé dans ses observations pour en assurer l'exactitude; et elles se trouvent encore confirmées par les résultats qu'il a trouvés en faisant successivement osciller son aiguille dans le méridien magnétique et dans le plan rectangulaire; car l'inclinaison conclue de ces données est parfaitement d'accord avec celle qu'il a obtenue par l'expérience seule, quoiqu'il ne connût pas alors la liaison de ces élémens que M. Laplace a depuis indiquée. La justesse de ces observations ne pouvant pas être révoquée en doute, il faut accorder aussi la vérité de la conséquence qui en dérive, et qui est l'accroissement de la force magnétique terrestre en allant de l'équateur magnétique vers les pôles. Les expériences faites par M. de Rossel à Brest et à la Nouvelle-Hollande conduisent aussi à la même conclusion.

L'exposé que nous venons de faire de nos connaissances sur le magnétisme du globe montre assez combien elles sont encore imparfaites. Dans cette ignorance où nous sommes d'une foule de données essentielles, principalement pour les déclinaisons, nous ne pouvons pas espérer de remonter aux véritables causes. Il ne nous reste donc qu'à chercher des lois empiriques qui, embrassant le plus grand nombre de faits possibles, mettent en évidence leurs relations numériques, et

indiquent les élémens principaux sur lesquels il faut appeler l'observation.

J'ai déjà annoncé qu'une grande partie des inclinaisons observées, surtout dans les parties du globe pour lesquelles l'équateur magnétique est circulaire, pouvaient se représenter fort exactement par l'action de deux centres magnétiques placés à une très-petite distance l'un de l'autre, près du centre de la terre. Nous avions été conduits à ce résultat, M. de Humboldt et moi, dans le travail dont j'ai parlé plus haut; et notre mémoire était déjà publié, lorsque j'appris que le célèbre astronome Mayer était aussi arrivé à la même conséquence, en discutant les inclinaisons connues de son temps; et qu'il s'en était même servi pour représenter les déclinaisons, dans un mémoire lu à la société de Gottingue, mais non imprimé. Le fils de ce grand astronome ayant bien voulu m'en envoyer un extrait, j'ai pu me convaincre de cette identité, comme aussi j'ai reconnu que Mayer avait découvert de son côté, d'une manière expérimentale, la loi des attractions magnétiques réciproque au carré de la distance.

Cette conséquence commune, déduite d'élémens si divers, paraît indiquer quelque chose de plus qu'une loi purement empirique. Il est donc nécessaire de l'examiner de plus près. D'abord il est facile de voir qu'un seul aimant, placé au centre même de la terre, ne peut pas satisfaire aux phénomènes; car alors l'équateur magnétique devrait être un grand cercle perpendiculaire à la ligne droite menée par les deux centres d'action, et il n'en résulterait pas l'inflexion que nous avons observée dans la mer du Sud. D'ailleurs, un pareil aimant, de quelque manière qu'on le place, donnerait nécessairement des phénomènes symétriques, de part et d'autre du plan mené par ses deux centres d'action et par le centre de la terre, symétrie qui n'est nullement conforme aux faits observés, principalement dans la mer du Sud et le continent d'Asie.

Ne pouvant donc adopter cette idée simple, cherchons à nous en écarter le moins possible; et puisque nous avons trouvé qu'elle représente assez bien les observations faites en Europe

et dans l'océan Atlantique, essayons d'y faire une modification telle, qu'elle soit peu sensible dans cette partie du globe, et qu'elle le devienne beaucoup dans la partie opposée où l'équateur magnétique éprouve tout à coup son inflexion. C'est à quoi l'on parviendra en plaçant près de ce point un second aimant excentrique, dont on déterminera la position et l'énergie relative de manière à satisfaire aux observations. Or, en effectuant ce calcul, on trouve qu'il suffit de donner à cet aimant une très-petite force pour faire disparaître les anomalies qui ont lieu de ce côté du globe, et pour accorder les faibles inclinaisons observées dans la partie australe de la mer du Sud avec les grandes inclinaisons qui ont lieu dans le nord de l'Amérique. En répartissant ainsi quelques autres centres secondaires dans les points du globe où les irrégularités des déclinaisons semblent les plus bizarres, il est vraisemblable qu'on finirait par les représenter toutes avec exactitude, aussi-bien que les inclinaisons et les intensités. C'est ainsi que, dans le système du monde, le mouvement principal, produit par l'action du soleil, est modifié par les perturbations que les petites masses des planètes produisent. Mais de même qu'il faut connaître le lieu de ces masses pour calculer leur influence, de même il faut que des observations plus précises nous aient indiqué la position des divers centres magnétiques secondaires, avant que nous puissions en calculer les effets.

L'action magnétique centrale indiquée par ces phénomènes avec beaucoup de vraisemblance, est-elle réellement produite par un noyau magnétique renfermé dans l'intérieur du globe terrestre, ou n'est-elle que la résultante principale de toutes les particules magnétiques disséminées dans sa substance ? Nous l'ignorons : néanmoins la dernière supposition paraît la plus vraisemblable. Les centres secondaires seraient alors déterminés par quelques attractions locales devenues prépondérantes. Et en effet, les observations montrent, d'une manière non douteuse que le système général des inclinaisons, des déclinaisons et des intensités magnétiques est modifié très-sensiblement, et quelquefois d'une façon tout-à-fait subite et irrégulière, par le

voisinage des grandes chaînes de montagnes. Cela semble également confirmé par la singulière inflexion qu'éprouve l'équateur magnétique vers les nombreux archipels de la mer du Sud. On sait, en effet, que les îles dont cette mer est semée ne sont que les sommets de très-hautes montagnes qui s'élèvent absolument à pic du sein d'un océan où l'on ne trouve pas de fond. Si les madrépores dont elles paraissent composées n'y formaient qu'une couche peu épaisse, et si, comme l'ont pensé de très-habiles naturalistes, le reste de leur masse avait été produit ou travaillé par l'action des feux souterrains, le système de ces îles formerait la chaîne volcanique la plus étendue qui soit sur la surface du globe. Alors toutes les irrégularités produites par ce système dans les lois générales du magnétisme terrestre n'auraient rien que de simple et de conforme à ce que l'on observe dans les pays volcanisés. Car l'action des feux souterrains a dû nécessairement changer l'état chimique et l'arrangement naturel des parties ferrugineuses dans les lieux où elle s'est exercée, changemens qui n'ont pu se faire sans troubler la direction de l'aiguille aimantée, et modifier dans ces points l'action générale du globe. On a même plusieurs exemples de ces variations qui sont arrivées subitement; et M. de Humboldt en a observé de semblables au Pérou, après un grand tremblement de terre. Il serait donc possible que le centre magnétique particulier à la mer du Sud soit dû à de pareilles causes. Sans doute il en existe d'analogues dans d'autres pays; et alors ne serait-ce pas leurs variations qui auraient produit depuis deux cents ans les changemens de déclinaison de la boussole, changemens si bizarres et si irréguliers, qu'il a été jusqu'à présent impossible d'y trouver aucune loi, mais qui, par cette irrégularité même, semblent annoncer qu'ils ne sont pas l'effet d'une cause uniforme et constante? Dans cette idée, rien ne nécessiterait, pour l'Europe, le retour de la boussole vers l'est; et en effet, depuis qu'elle a cessé de décliner à l'ouest, on n'a pas observé qu'elle ait rétrogradé d'une quantité sensible; en sorte que, d'après les seules observations faites jusqu'à présent, il est impossible de décider si elle reviendra.

L'action magnétique du globe terrestre n'est pas bornée à son intérieur ou à sa surface; elle s'étend aussi dans l'espace, comme nous l'avons constaté, M. Gay-Lussac et moi, dans une ascension aérostatique. Il paraît même, d'après nos observations, que l'intensité de cette action décroît lentement à mesure que l'on s'éloigne de la surface terrestre; car nous n'y avons pas trouvé de diminution sensible à la hauteur à laquelle nous nous sommes élevés. Probablement sa diminution suit la loi générale des attractions magnétiques, c'est-à-dire la raison inverse du carré de la distance; et ainsi elle doit s'étendre indéfiniment dans l'espace. L'analogie porte à penser que la lune, le soleil et les autres corps célestes sont doués d'actions pareilles, d'autant plus que la composition des aérolithes tombés sur notre globe nous indique que les astres contiennent pareillement des substances magnétiques telles que du nickel et du fer. Les actions magnétiques de tous ces corps doivent donc, selon leurs positions et leurs distances, influer ici-bas sur la direction de l'aiguille aimantée, aussi-bien que sur l'intensité absolue de la force directrice; et comme ces positions et ces distances changent sans cesse par l'effet des mouvemens de la terre et de toutes les planètes, il en doit résulter aussi dans les forces magnétiques de perpétuelles variations. Par exemple, si l'action magnétique du soleil et de la lune est sensible, le mouvement de rotation de la terre sur elle-même, et son mouvement de révolution autour du soleil, doivent produire dans l'aiguille aimantée des oscillations diurnes et des oscillations annuelles. Or, non-seulement de tels mouvemens existent, mais leurs périodes, constatées par de longues suites d'observations, s'accordent avec la cause que nous venons d'indiquer. A Paris, d'après M. de Cassini, le maximum de la déclinaison diurne paraît avoir lieu entre midi et trois heures du soir; alors l'aiguille est stationnaire; elle se rapproche ensuite du méridien terrestre jusque vers huit heures du soir, puis elle s'arrête et reste stationnaire pendant toute la nuit. Mais le lendemain, vers huit heures du matin, elle recommence de nouveau à s'éloigner du méridien. Si ce second mouvement l'écarte plus que la veille, il en résulte que la déclinaison est croissante d'un

jour à l'autre ; dans le cas contraire , elle est décroissante. Les plus grandes variations diurnes ont généralement lieu pendant les mois d'avril, mai, juin, juillet; c'est-à-dire entre les deux équinoxes de printemps et d'automne. Elles sont, à Paris, de 13′ à 16′. Les plus petites sont de 8′ à 10′; elles ont lieu dans le reste de l'année. Maintenant si l'on compare les positions analogues de l'aiguille à différens jours, mais aux mêmes heures, pour avoir sa marche générale, on trouve que, depuis l'équinoxe du printemps jusqu'au solstice d'été qui suit, la déclinaison est décroissante, et qu'elle est croissante dans tout le reste de l'année, c'est-à-dire depuis le solstice d'été jusqu'à l'équinoxe du printemps suivant; c'est ce que représente la fig. 38. On doit la connaissance de ces périodes à M. de Cassini, qui les a établies par huit années d'observations faites à l'Observatoire de Paris.

Enfin des observations multipliées prouvent encore que l'aiguille aimantée est sujette à des variations brusques et accidentelles qui coïncident avec les apparitions du météore lumineux que l'on appelle *aurore boréale*. On ignore absolument la cause de cette correspondance, aussi-bien que celle de l'aurore boréale elle-même. L'influence de ce météore sur l'aiguille est ordinairement passagère; alors, après s'être vivement agitée pendant qu'il se manifeste, elle revient à sa position ordinaire, et reprend l'ordre de ses mouvemens accoutumés; mais il arrive aussi parfois qu'elle éprouve un déplacement durable ; car M. de Cassini en a observé des exemples.

Pour mesurer les variations, soit diurnes, soit annuelles, Coulomb employait une aiguille d'acier suspendue à un assemblage de fils de cocon parallèles, suffisant pour la porter. Aux deux extrémités de l'aiguille il fixait deux arcs de métal, portant une division circulaire très-fine. Tout l'appareil était enfermé dans une boîte vitrée par-dessus, afin qu'on pût observer l'aiguille, sans qu'elle fût troublée par les agitations de l'air. Deux microscopes fixes sur la boîte et munis de micromètres à fils se dirigeaient chacun sur un des arcs divisés portés par l'aiguille, et faisaient connaître ses plus petits mouvemens. M. de Prony a employé au même objet une longue

aiguille aimantée, portant sur sa longueur une lunette qui se déplace avec elle, et dont on observe la marche sur une mire éloignée. M. de Humboldt, qui a fait beaucoup d'observations avec cet appareil, le regarde comme très-exact.

Il serait important pour les progrès futurs de la physique que l'on déterminât avec exactitude l'intensité actuelle du magnétisme terrestre, comme on a fixé le poids de l'atmosphère et la température actuelle des différens climats. En répétant la même observation dans quelques siècles, on saurait si les forces magnétiques varient d'énergie, comme il est sûr qu'elles ont varié dans leur direction.

Le premier moyen qui se présente à l'esprit serait d'observer aujourd'hui la déclinaison, l'inclinaison et l'intensité, au moyen de trois aiguilles appropriées à cet usage, et que l'on conserverait ensuite soigneusement pour les essayer de nouveau de siècle en siècle. Comme dans cet intervalle elles pourraient perdre de leur magnétisme, on le leur rendrait au même degré par une nouvelle aimantation, en se servant pour cela de barreaux très-forts combinés suivant la méthode de la double-touche. En effet, dans l'application de ce procédé, les aiguilles, par l'influence des barreaux extrêmes, sont amenées momentanément à un degré de magnétisme beaucoup plus fort que celui qu'elles peuvent conserver quand elles sont abandonnées à elles-mêmes; de sorte que, si leur constitution intime reste la même, le degré d'aimantation où elles se fixent doit rester le même aussi, ou du moins ne doit éprouver de variation que celle qui proviendrait d'un changement d'intensité dans la force magnétique du globe. On pourrait rendre cette méthode beaucoup plus sûre en conservant ainsi un certain nombre d'aiguilles bien éprouvées, dont on aurait déterminé séparément les effets absolus à une première époque. Car si, en les éprouvant de nouveau à une autre époque, on trouvait qu'elles ont conservé entre elles leurs premiers rapports, on pourrait en conclure avec assurance qu'elles n'ont point été altérées dans leur constitution, et par conséquent l'observation de leurs énergies absolues ferait connaître l'état réel de la force magnétique.

Mais l'emploi de cette méthode exige la conservation des aiguilles et l'assurance de leur identité. On s'exempterait de ce soin, si l'on trouvait un moyen de fabriquer en tout temps deux aiguilles parfaitement comparables. Pour cela, il ne faut pas songer à employer l'acier, qui, étant un alliage de charbon et de fer, est nécessairement variable dans ses proportions. Mais on y suppléera si l'on parvient à se procurer par des moyens chimiques des fils de fer doux parfaitement purs. Car, d'après les expériences de Coulomb que nous avons rapportées, la torsion donne au fer un degré d'écrouissage tel qu'il prend le magnétisme presque aussi bien que l'acier, et le retient avec une égale constance; il ne s'agirait donc que de régulariser cette torsion. Or, cela serait facile en prenant des fils d'une longueur et d'une grosseur assignées, et mesurant, par le moyen d'un micromètre, le nombre de tours dont on les tordrait. Ensuite on aimanterait chacun de ces fils à saturation, et on les assemblerait en nombre déterminé, de manière à en former des faisceaux dont on mesurerait la force directrice, soit à la balance magnétique, soit par la méthode des oscillations. Toute la difficulté de la question se trouve ainsi réduite à se procurer du fer pur, et cette difficulté appartient uniquement à la chimie.

Si, dans un lieu quelconque, on dirige un morceau de fer doux, une clef, par exemple, dans le sens de l'inclinaison magnétique; cette clef prend aussitôt deux pôles qui agissent sur l'aiguille aimantée en sens contraire. Retournez la clef, ses pôles changent, et le même effet se reproduit. C'est l'expérience de la page 42, en substituant l'aimant terrestre à l'aimant artificiel.

FIN DU LIVRE QUATRIÈME.

LIVRE CINQUIÈME.

DE LA LUMIÈRE.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Lorsque le soleil, d'abord caché sous l'horizon, se lève, et paraît tout à coup à nos yeux, on conçoit qu'il existe nécessairement entre cet astre et nous un certain mode de communication qui nous avertit de son existence, sans que nous ayons besoin de le toucher. Ce mode de communication, qui s'exerce ainsi à distance, et se transmet par les yeux, constitue ce que l'on appelle la lumière. Les corps qui peuvent l'exciter immédiatement, et nous manifester ainsi leur existence, se nomment des corps lumineux *par eux-mêmes*, tels sont le soleil, les étoiles. Généralement toutes les substances matérielles deviennent lumineuses par elles-mêmes, lorsque leur température est suffisamment élevée; et elles perdent cette faculté en se refroidissant. Néanmoins, quand elles ont cessé d'en jouir, si elles sont éclairées par un corps lumineux, elles peuvent encore nous renvoyer sa lumière, comme si elle leur était propre, et alors elles deviennent visibles pour nous *par réflexion*. C'est ainsi que nous apercevons les objets qui nous environnent pendant que le soleil est sur l'horizon, et que tout devient obscur et invisible quand cet astre s'abaisse au-dessous.

Dans tous les cas, lorsqu'un objet nous transmet la sensation de son existence par le moyen de la lumière, cette transmission se fait en ligne droite; car, si l'on dispose des fils de soie ou de métal très-fins, parallèlement les uns aux autres, et dans un même plan, un point lumineux placé sur le prolongement de cette direction, au-delà des fils, sera occulté; mais pour peu

qu'on l'en écarte, il sera transmis. De même, si l'on prend deux plans de métal bien dressés, et qu'on les approche peu à peu l'un de l'autre en regardant la lumière des nuées à travers l'espace qui les sépare, on l'apercevra toujours à quelque petite distance que les plans se trouvent l'un de l'autre, jusqu'à ce qu'ils se touchent; mais pour peu que l'un d'eux soit concave et l'autre convexe, la vision cesse d'avoir lieu avant le contact. Une foule d'autres expériences journalières confirment cette vérité: comme elle est d'un usage continuel, il faut lui donner un énoncé simple. Pour cela, chaque ligne droite menée d'un point quelconque d'un corps lumineux à l'œil se désigne par une dénomination particulière; on la nomme un *rayon lumineux*, et l'on conçoit la vision directe comme s'opérant suivant ces rayons. Cette abstraction peut même être employée, dans un sens physique, pour distinguer les parties composantes d'un faisceau lumineux, du moins jusqu'aux dernières limites de division que nos sens puissent atteindre. Car quelque délié que soit un trait de lumière, tant qu'il est sensible à nos organes, on lui trouve toujours identiquement les mêmes propriétés que possèdent les faisceaux les plus volumineux.

Les observations astronomiques prouvent que la communication établie par la lumière entre les corps lumineux et nous n'est pas instantanée. Lorsque le soleil se trouve à un des points de son orbite, nous n'avons la sensation de sa présence en ce point que 8′ 13″ après qu'il y est arrivé. Lorsque les satellites de Jupiter, qui sont autant de petites lunes éclairées par le soleil, s'éclipsent derrière le corps de leur planète, et se dégagent ensuite de son ombre, il s'écoule un certain temps depuis l'instant physique où ils se dégagent, jusqu'à celui où nous commençons à les apercevoir. Le retard est plus ou moins long suivant que la terre est plus ou moins loin de Jupiter, et il est exactement proportionnel à sa distance. De là on a conclu que la vitesse de la communication de la lumière est uniforme dans toute l'étendue de l'orbe terrestre, et même de l'orbe de Jupiter.

Il résulte encore de ces phénomènes qu'à l'instant physique où les satellites de Jupiter entrent dans l'ombre de cette pla-

nète, nous les voyons encore au-dehors, parce que la sensation que nous en avons est due à leur présence antérieure dans le lieu de leur orbite où ils se trouvaient quelques momens auparavant ; et de même au moment où ils nous semblent disparaître, ils ont en effet déjà depuis long-temps disparu. Ainsi la communication résultante de leur présence en un lieu continue de se propager et de se transmettre, même après qu'ils l'ont déjà quitté. Il faut donc que cette communication se fasse, ou par des pulsations à travers un fluide élastique qui les transmette depuis les corps lumineux jusqu'à nous, comme le son se transmet dans l'air, ou par une émanation réelle de corpuscules matériels lancés par les corps lumineux. Dans tous les cas, puisque la sensation de la vision s'opère à travers la masse même de certains corps que l'on nomme *transparens* ou *diaphanes*, il faudra que les pulsations du fluide élastique continuent de se propager à travers les pores de ces substances, ou que les corpuscules lumineux continuent à s'y mouvoir, et puissent même les traverser.

Chacune de ces opinions a ses partisans. Ceux qui penchent pour l'idée d'un fluide élastique, allèguent la facilité que cette conception donne pour la transmission rapide. Ils regardent comme improbable une émanation réelle de corpuscules doués d'une vitesse pareille à celles que les molécules de la lumière devraient avoir, et qui devraient être en même temps d'une ténuité telle, qu'ils pussent aisément traverser les corps transparens. Sur cela, c'est aux phénomènes à nous instruire ; car il n'y a rien en soi de lent ou de rapide, non plus que de grand ou de petit. La vitesse d'un boulet de canon nous paraît si rapide, que nos yeux ne peuvent la suivre ; pourtant elle est très-lente, comparativement à la vitesse de rotation de la terre ; celle-ci à son tour est très-lente par rapport à celle du mouvement annuel, et enfin cette dernière est beaucoup moindre que la vitesse de transmission de la lumière. Il est sans doute plus difficile pour nous d'imprimer à un corps une grande vitesse qu'une petite, parce que nos forces sont limitées ; mais qu'y a-t-il de commun et de comparable entre cette limitation et

l'étendue ou l'espèce des forces qui agissent dans la nature? Rien, absolument rien. Maintenant, si l'on met à part ce préjugé, et si l'on consulte les phénomènes, on verra que tous se passent d'une manière exactement conforme à l'idée des émanations. Lorsque la lumière traverse les corps diaphanes, sa marche y est précisément telle qu'elle devrait être, si elle était composée de corpuscules attirables par les molécules du corps. Si l'on observe ses mouvemens dans des substances gazeuses ou liquides de nature diverse, et qu'ensuite on mêle ces substances que nous supposerons telles, qu'elles n'aient point d'action chimique l'une sur l'autre, le mouvement de la lumière à travers le mélange peut encore se calculer d'après les lois des attractions des substances composantes précédemment connues; et le résultat de ce calcul est exactement conforme à l'observation. Qui peut dire comment devraient se composer alors des ondulations? et sans pouvoir le dire, ne voit-on pas qu'elles se composeraient suivant des lois excessivement compliquées? Enfin d'autres phénomènes montrent que les rayons lumineux peuvent être modifiés et préparés de manière que leurs différens côtés présentent des propriétés physiques diverses; ce qui peut très-bien convenir à une série de particules, mais nullement à une série de pulsations; et par le développement de ces propriétés, on est parvenu à y reconnaître encore d'autres modifications telles que seraient des mouvemens de ces particules autour de leur centre de gravité. L'ensemble de ces phénomènes semble donc mettre aujourd'hui hors de doute le système de l'émanation, si l'on peut appeler système ce qui est une conséquence si naturelle des faits, et ce qui sert à les reproduire avec tant d'exactitude et de facilité.

Jusqu'ici nous avons considéré la vision comme propagée de l'objet à l'œil; mais ce n'est pas à la surface extérieure de cet organe que la sensation s'opère; c'est dans son intérieur, et à ce que l'on croit, sur une membrane blanche qui en tapisse le fond, et qui se nomme la *rétine*. En effet, lorsque les divers liquides qui composent le reste de l'organe viennent à se durcir ou à se troubler par des maladies, de sorte que la lumière ne

puisse plus parvenir à la rétine, on perd la faculté de voir, et on la recouvre dès qu'on enlève les parties de l'organe qui sont devenues opaques. Chacune de ces parties peut être ainsi enlevée séparément sans que la sensation de la vue soit totalement détruite ; mais si la rétine est altérée, la vision est détruite aussitôt. On sait de plus que c'est à la rétine qu'aboutissent deux gros nerfs émanés du cerveau, qui s'épanouissent sur sa surface postérieure, et s'y ramifient d'une infinité de manières ; ou, pour mieux dire, la rétine elle-même n'est que l'extension et la dilatation de ces nerfs. Or, on sait que, dans tous les autres organes, c'est par les nerfs que se produit la sensation. Cette analogie confirme donc encore que c'est sur la rétine même que la sensation de la vision doit s'opérer, soit par les pulsations propagées du fluide élastique, si la lumière se transmet par ondulations, soit par l'impression directe des globules lumineux, si, comme nous le croyons, la lumière est une matière. J'entrerai dans plus de détails sur la construction intérieure de l'œil, quand nous aurons étudié les instrumens d'optique ; car l'œil lui-même est un instrument d'optique, mais si parfait et si admirable, que la théorie la plus savante peut à peine en apprécier toute la merveille, et que l'art le plus parfait ne saurait l'imiter. Jusque-là ces notions préliminaires nous suffiront, et nous nous bornerons à considérer le fond de l'œil comme le centre de l'organe par lequel se fait la vision.

Cela posé, lorsque la lumière se propage d'un corps lumineux vers nous, elle nous parvient toujours à travers différens milieux, tels que l'air, l'eau ou d'autres corps diaphanes qui lui permettent le passage. Les rayons, en entrant dans ces corps, y poursuivent quelquefois leur route en ligne droite ; mais le plus ordinairement ils se dévient de leur chemin, et ce phénomène se nomme *réfraction*. De plus, la lumière ainsi transmise ne nous parvient pas toujours directement. Il arrive souvent qu'elle rencontre des surfaces polies qui la renvoient, la *réfléchissent*, et qui nous font voir les objets par cette voie indirecte, lorsque nous nous trouvons sur le chemin que suivent les rayons ainsi renvoyés. La réfraction et la réflexion de la lumière vont donc

nous occuper successivement. Il semble que nous devrions commencer par le premier de ces deux phénomènes, puisqu'étant nous-mêmes plongés dans un fluide matériel qui est l'air, la vision ne peut pas s'opérer sans que l'air agisse sur les rayons lumineux ; mais comme son action est très-faible, et qu'il les détourne à peine de leur direction naturelle, nous en ferons abstraction d'abord, et nous commencerons par étudier les lois du phénomène de la réflexion, qui sont d'ailleurs beaucoup plus simples. Leur ensemble constitue une première branche de la science de l'optique, que l'on a nommée *catoptrique*.

CATOPTRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Lois générales de la réflexion de la Lumière.

Pour que la surface d'un corps réfléchisse régulièrement la lumière, et donne une image distincte des points lumineux par lesquels elle est éclairée, il faut la polir, c'est-à-dire user soigneusement autant qu'il est possible toutes ses plus petites inégalités. Tel est l'état où l'art amène le verre, les cristaux, les métaux. Nous considérerons d'abord les phénomènes que présentent les surfaces ainsi préparées; nous tâcherons ensuite d'examiner en quoi le poli contribue à leur effet.

Pour étudier les lois de la réflexion avec méthode, nous commencerons par les déterminer relativement aux surfaces planes. Il sera facile ensuite de les étendre aux surfaces courbes. Car dans toutes les modifications que nous pouvons imprimer à la lumière, en faisant agir sur elle des corps d'une étendue sensible, les rayons lumineux se comportent, au moins pour nos sens, exactement comme feraient des lignes droites mathématiques; de sorte, par exemple, que la réflexion sur chaque point d'une surface s'opère exactement de même que sur le plan qui la toucherait en ce point; et comme on peut toujours calculer la position du plan tangent, relativement à tous les points d'une surface donnée, il s'ensuit que la réflexion de la lumière sur des surfaces quelconques ne sera qu'un simple objet de calcul.

Pour cette recherche, et en général pour toutes les expériences d'optique, il est indispensable de pouvoir opérer dans une chambre qui reçoive les rayons du soleil, au moins pendant un certain temps de la journée, et dont les fenêtres soient fermées par des volets bien joints, qui permettent d'y produire une obscurité complète. Alors on pratique dans ces volets une ouverture plus ou moins large, où l'on ajuste une plaque mé-

tallique percée de divers trous d'inégale largeur, que l'on puisse ouvrir et fermer à volonté. En ouvrant un seul de ces trous lorsque le soleil éclairera le volet de la fenêtre, la lumière de cet astre entrera dans la chambre sous la forme d'un trait délié, qui deviendra sensible par l'illumination des petites poussières qui voltigent toujours dans l'air. Nous composerons plus tard des appareils plus savans et plus commodes ; pour le moment celui-là suffit.

Maintenant, si l'on fait tomber ce trait de lumière solaire sur la première surface d'une lame de verre horizontale, polie, transparente et oblique sur sa direction, on remarque les phénomènes suivans :

1°. Le trait lumineux ne se transmet pas tout entier à travers la surface. Une partie est réfléchie en haut sous une direction dépendante de son obliquité. Si l'on place l'œil sur cette direction, on voit une image du soleil, vive et brillante, qui semble venir de dessous la glace du côté du plancher.

2°. Le point où le rayon rencontre la lame est visible de tous les points de la chambre hors de la direction du rayon réfléchi ; mais il paraît ainsi incomparablement moins lumineux que si on le regarde sur cette direction même ; et elle est la seule qui donne une image régulière du soleil.

3°. Une portion de la lumière incidente échappe à la réflexion sur la première surface de la lame, et pénètre dans son intérieur. Parvenue à la seconde surface, elle y éprouve encore une réflexion partielle, et le reste ressort dans l'air par-dessous la glace.

En nous arrêtant aux phénomènes que présente la première surface, on voit qu'il se passe ici trois opérations distinctes. Une partie de la lumière incidente est réfléchie régulièrement ; une autre partie est réfléchie irrégulièrement, comme si le corps n'était pas poli ; enfin le reste passe sans se réfléchir.

Si l'on substitue à la lame de verre un plan métallique poli, les deux premiers phénomènes auront encore lieu, mais le troisième ne se produira pas. Ainsi le métal poli réfléchit régulièrement une première portion de la lumière incidente, en dissémine irrégulièrement une seconde partie, et absorbe le reste :

ce reste est analogue à ce que le corps transparent transmet.

Maintenant l'obliquité du rayon incident sur la surface réfléchissante étant donnée, examinons quelle est la direction suivie par la portion de lumière qui est réfléchie régulièrement. Mais au lieu d'employer comme objet radieux le soleil même, dont la lumière trop vive pourrait blesser l'œil, servons-nous de la flamme d'une bougie, ou même de la seule lumière naturellement émise par quelque point d'un objet terrestre, que nous regarderons par réflexion sur la première surface d'une plaque polie. Plaçons, fig. 1, cette plaque HL dans une position parfaitement horizontale; puis supposant que SIC soit le rayon réfléchi que nous voulons observer, et qui nous fait voir l'image de l'objet S, amenons quelque part sur sa direction, en C, par exemple, le centre d'un cercle divisé, muni d'une alidade parallèle à son plan, comme le sont d'ordinaire les instrumens qui servent à mesurer des angles. Si après avoir rendu le plan de ce cercle vertical, on promène l'alidade mobile sur sa surface, on trouvera qu'elle rencontre successivement l'objet, le point d'incidence et le rayon réfléchi, ce qui prouve que le *rayon incident et le rayon réfléchi sont tous deux contenus dans un même plan normal à la surface d'incidence.* C'est la première loi de la réflexion. Maintenant, si l'on conçoit par le point C une ligne horizontale CH′, l'instrument, par l'alignement de ses alidades, donnera l'angle SCH′, qui est la hauteur apparente du point S sur l'horizon, et il donnera aussi l'angle SCI, formé par le rayon direct avec le rayon réfléchi. Afin de commencer par le cas le plus simple, supposons le point lumineux assez éloigné pour que la distance CI du centre du cercle au point d'incidence puisse être considérée comme insensible, comparativement à l'éloignement CS de l'objet. Alors, en faisant l'observation, on trouvera que l'angle SCI est double de SCH′. Or, puisque le point lumineux est supposé infiniment éloigné du cercle SC, figure 2, devient sensiblement parallèle à SI; d'ailleurs IH est parallèle à CH′; ainsi l'angle SIH est égal à l'angle SCH′. De plus, les deux angles H′CI, CIL sont égaux entre eux comme alternes internes; la valeur de l'angle total SCI sera donc toujours

$$SCI = SIH + CIL.$$

Or, on trouve par observation

$$SCI = 2 . SCH' = 2 SIH.$$

Donc en mettant pour SCI sa valeur précédente

$$CIL = SIH;$$

c'est-à-dire que *le rayon incident et le rayon réfléchi forment, avec la surface réfléchissante, des angles égaux.* C'est la seconde loi générale de la réflexion.

A la rigueur, il est impossible que les deux rayons SI, SC soient exactement parallèles; mais l'erreur peut être si petite, qu'elle devienne insensible; et d'ailleurs on peut avoir égard, par le calcul, à l'angle qu'ils font entre eux. Car, en revenant à la fig. 1, concevons par le centre C du cercle, la ligne CS' parallèle à IS. Dans ce cas, si l'angle CSI est sensible, on trouve, par observation,

$$SCI = 2 SCH' + CSI.$$

En ajoutant de part et d'autre CSI, on en tire

$$SCI + CSI = 2 (SCH' + CSI).$$

Or, puisque nous avons mené CS' parallèle à IS, il est clair que $CSI = S'CS$, par conséquent

$$SCI + CSI = S'CI, \qquad \text{et} \qquad SCH' + CSI = S'CH'.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation que l'observation donne, elle deviendra

$$S'CI = 2 . S'CH',$$

c'est-à-dire la même que précédemment, et l'on en déduira pareillement que l'angle $SIH = CIL$; c'est-à-dire que les angles formés par le rayon incident, et le rayon réfléchi avec la surface d'incidence, sont égaux entre eux.

Par le point d'incidence I, fig. 3, concevons une ligne IN normale à la surface réfléchissante, et soit SI le rayon incident, IR le rayon réfléchi; on appelle communément SIN *l'angle d'incidence* ou simplement *l'incidence*, et RIN *l'angle de réflexion.* Cela posé, la seconde loi générale de la réflexion qui se déduit des observations précédentes, c'est que *l'angle de réflexion et l'angle d'incidence sont égaux entre eux.*

Dans ces observations, pour déterminer avec exactitude la

direction des rayons SC, IC sur le limbe circulaire de l'instrument, on pourrait se servir de tuyaux percés à leur centre de deux fentes très-étroites, qui laisseraient seulement passer un faisceau lumineux très-mince. On emploie quelquefois cet appareil dans la levée des plans, où l'on nomme ces fentes *des pinnules;* mais on obtient bien plus d'exactitude en leur substituant des *lunettes.* Tout le monde sait que les lunettes sont formées par des assemblages de verres sphériques convexes ou concaves qui sont disposés aux deux extrémités d'un même tuyau. Ce n'est pas ici le lieu d'expliquer la construction de ces instrumens qui exige une connaissance complète de l'optique; mais sans l'approfondir, il suffit d'en faire usage pour reconnaître par expérience qu'ils perfectionnent singulièrement la vision, qu'ils la rendent plus nette et capable de distinguer au loin de plus petits objets. On peut également s'assurer qu'en tendant des fils très-fins dans l'intérieur du tuyau d'une lunette, et perpendiculairement à son axe, ces fils, s'ils sont placés convenablement, peuvent se voir avec beaucoup de netteté, et servir comme de marque pour diriger avec précision la lunette sur tel ou tel point déterminé d'un objet. Ainsi, en prenant successivement pour point de mire les deux extrémités d'un même objet, ou en général des points lumineux différens, l'arc parcouru par la lunette d'un de ces points à l'autre donnera précisément l'angle sous lequel les rayons lumineux venus de ces points se croisent en arrivant dans l'œil. C'est ce que l'on nomme l'*angle visuel* ou le *diamètre apparent* des objets, parce qu'en effet nous jugeons de leur grandeur absolue d'après la grandeur de l'angle visuel qu'ils soutendent dans notre œil, combinée avec l'idée de la distance que nous leur supposons. Toutes ces propriétés que l'on a sans cesse l'occasion de vérifier peuvent donc être admises dès à présent comme des faits certains dont il faudra plus tard chercher la cause; et d'après cela nous pourrons adapter des lunettes aux instrumens divisés que nous emploierons pour mesurer des angles; ce qui nous sera fort utile, parce qu'elles donneront à nos observations une beaucoup plus grande exactitude, comme l'expérience même peut encore nous en convaincre.

CHAPITRE II.

Du Miroir plan.

La loi générale de la réflexion étant connue, nous pouvons en déduire toutes les apparences qui doivent s'observer lorsque la surface réfléchissante est plane.

Soit, fig. 4, S un point rayonnant, O l'œil, et A B le plan réflecteur que je supposerai d'abord indéfini. Parmi tous les rayons lumineux qui émanent de S, il y en aura un tel, que S I, qui, après s'être réfléchi sur le miroir, ira rencontrer l'œil en O suivant la direction IO. Alors, pour ce rayon, les angles SIA, OIB seront égaux entre eux. La nécessité de cette condition suffit pour le déterminer. En effet, menez du point rayonnant S une perpendiculaire S A qui rencontre en A la surface réfléchissante; prolongez cette perpendiculaire vers l'autre côté du miroir d'une quantité A D = S A. Puis du point D menez la ligne DO dirigée vers l'œil; D O sera la direction du rayon réfléchi, et le point I où elle coupe la surface du miroir sera le point d'incidence. En effet, abaissez aussi de l'œil sur le miroir la perpendiculaire OB; les deux angles OIB, AID seront égaux entre eux comme opposés au sommet. Or, l'angle AID égale l'angle AIS, puisque les triangles AID, AIS sont égaux entre eux dans toutes leurs parties; donc, l'angle SIA égale l'angle OIB, ce qui est précisément la condition de la réflexion. De plus, il est aisé de voir que cette égalité a lieu seulement pour le point d'incidence I, déterminé comme nous venons de le dire. Car si l'on supposait ce point plus près de B, par exemple en I′, l'angle SI′A serait moindre que OI′B; et si on le supposait en I″, c'est-à-dire plus rapproché de A, l'angle S I″ A serait plus grand que l'angle O I″B. Ainsi le point déterminé par notre construction satisfait à la loi générale de la réflexion, et est le seul qui y satisfasse; d'où nous conclurons que parmi tous les rayons

émanés de S, il y en aura un SI qui se réfléchira vers l'œil, et il n'y en aura qu'un seul qui jouisse de cette propriété.

L'ouverture de la pupille, qui admet les rayons dans l'œil, n'est pas un point mathématique; c'est un espace qui, dans l'homme, a environ deux millimètres de diamètre, et que nous pouvons représenter par LL, fig. 5. Tous les rayons réfléchis qui pourront entrer dans cette ouverture parviendront jusqu'à la rétine, et contribueront à la vision. Or chacun d'eux se détermine par la même construction que nous venons d'employer tout-à-l'heure; de là il est évident qu'ils formeront un cône à base circulaire, dont la pointe sera D, et la base LL. Il est de fait que l'œil, lorsqu'il peut apprécier librement la distance des points lumineux, les suppose placés au point où se croisent les rayons qu'ils lui envoient. Ainsi l'œil étant placé en O, le point lumineux, vu par réflexion, paraîtra en D, c'est-à-dire autant derrière le miroir qu'il est réellement en avant.

Si l'objet rayonnant a une certaine étendue, chacun des points rayonnans qui le composent fera son image à part, suivant les lois que nous venons d'expliquer, et l'ensemble de ces images composera l'image de l'objet. Supposons, par exemple, que celui-ci soit une flèche SS′, fig. 6; la base S de la flèche fera son image en D, la pointe S′ fera la sienne en D′, et les points intermédiaires donneront la leur sur la droite DD′. Ainsi l'image entière sera comprise entre les rayons réfléchis extrêmes DO, D′O; sa grandeur absolue DD′ sera égale à SS′, c'est-à-dire à celle de l'objet lui-même; mais elle paraîtra renversée de droite à gauche.

D'après ce que nous avons dit tout-à-l'heure, fig. 5, chaque point de cette image est jugé par l'œil au lieu où il est réellement fixé par notre construction géométrique. Si donc à sa place on substituait un objet réel et semblable, c'est-à-dire une flèche toute pareille à SS′, que l'on posât sa pointe en D′, sa base en D, et qu'on la regardât du point O, en supprimant le miroir, on la verrait précisément comme on voit l'image DD′, avec la même grandeur, les mêmes angles visuels et le même degré de clarté, puisque tous les points lumineux qui composeraient l'objet

réel, enverraient à l'œil des cônes de rayons lumineux exactement semblables à ceux que lui envoie l'image. Il suit de là que les objets sont vus dans le miroir plan avec les mêmes formes, la même clarté, et à la même distance que si on les voyait dans l'air, pourvu qu'ils fussent seulement éclairés par la portion de lumière réfléchie qui compose l'image ; car il faut faire abstraction de celle qui est transmise, si le corps est diaphane, ou qui est absorbée, s'il est opaque.

Ce qui précède suffit pour résoudre toutes les questions que l'on peut se proposer, relativement à la réflexion de la lumière et à la vision des objets par des miroirs plans.

Nous distinguerons seulement une application qui offre quelque singularité. Supposons que l'objet S S′ soit vertical, que le miroir A B soit incliné à 45° à l'horizon, et que le spectateur O H soit droit ; alors, d'après notre construction, il est évident que l'image DD′ lui paraîtra horizontale. Donc, si l'objet S S′ est un homme élevé sur un tabouret, cet homme paraîtra couché et ayant un tabouret à ses pieds. Pour fortifier l'illusion, on peut placer un coussin derrière sa tête, et alors dans l'image il paraît reposer dessus. Mais malgré tout cela, l'illusion est très-loin d'être complète, parce que l'on remarque dans les muscles et dans toute l'habitude du corps un affaissement qui résulte nécessairement de la situation verticale, et qui avertit notre entendement que l'homme n'est pas couché. Nous ne remarquons pas cet affaissement quand nous voyons un homme debout, parce que nous y sommes accoutumés ; il nous frappe, dès que nous joignons à sa position l'idée de repos et d'une situation horizontale.

La réflexion de la lumière s'opérant avec une rigueur mathématique, suivant la loi que nous venons de démontrer, on peut l'employer avec un extrême avantage pour mesurer les angles formés par deux surfaces planes et polies. Comme cette mesure est nécessaire pour une infinité de recherches de physique, et que tous les autres moyens par lesquels on peut tenter de l'obtenir sont excessivement grossiers, quand on les com-

pare à la réflexion de la lumière, je vais expliquer ce procédé avec quelque détail.

L'instrument le plus commode pour cet objet est celui que M. Charles emploie, et qu'il nomme *goniomètre*, c'est-à-dire *mesureur d'angles*. Il est formé d'un cercle de cuivre horizontal, divisé sur sa circonférence, et muni d'une alidade qui peut tourner sur sa surface autour d'un axe vertical CZ, fig. 7. A côté de ce cercle et à sa hauteur, sur un support qui en est indépendant, on établit une petite lunette LL, qui, dans les observations, doit rester fixement dirigée sur la surface réfléchissante; mais à laquelle cependant on donne un mouvement horizontal et vertical, afin qu'on puisse aisément l'amener dans chaque cas sur la direction qui convient le mieux. Cette lunette est munie intérieurement d'un micromètre à fils; c'est-à-dire qu'on a tendu dans son intérieur un réseau de fils très-fins qui servent de repaire fixe pour diriger la lunette, comme je l'ai expliqué plus haut.

Supposons maintenant que l'angle dièdre que l'on veut mesurer soit celui que forment les surfaces planes AB, AD. On fixe sur l'alidade mobile du cercle, avec de la cire molle, le corps dont ces surfaces font partie, et on les dispose de manière que leur arête commune AA soit verticale. Pour cela, voici comment on opère : l'instrument doit être posé devant une fenêtre d'où l'on découvre des objets éloignés et verticaux, par exemple, des cheminées, des clochers, des paratonnerres. Si l'on fait réfléchir ces objets sur une surface verticale, il est évident que l'image réfléchie sera également verticale, car il n'y a aucune raison pour qu'elle penche d'un côté plutôt que d'un autre. Si donc on la regarde à travers une lunette dans laquelle on ait aussi tendu un fil vertical, il est évident qu'en faisant tourner horizontalement l'alidade mobile qui porte la surface réfléchissante, il viendra un moment auquel l'image de la cheminée ou du paratonnerre viendra se placer exactement sous le fil. Or la lunette fixe du goniomètre contient précisement un fil disposé de cette manière, et que l'on a préalablement réglé

en l'alignant sur l'image directe de l'objet. Ainsi, lorsqu'on voudra disposer une nouvelle surface de manière qu'elle soit verticale, on la fera mouvoir sur le support de cire jusqu'à ce que cette condition soit satisfaite, et l'on sera aidé en cela par le secours d'un second fil horizontal que la lunette renferme, et qui, lorsque la surface réfléchissante est verticale, doit toujours répondre aux mêmes points horizontaux de l'objet. On répète la même épreuve pour l'autre surface de l'angle dièdre. Quand elle est satisfaite pour toutes les deux, leur arête commune A A est nécessairement verticale, et l'on parvient à les accorder ainsi par quelques essais. J'ai décrit ici le procédé pour le cas le plus difficile ; mais le plus souvent les corps que l'on a besoin de mesurer sont des prismes dont les bases sont taillées perpendiculairement aux arêtes. Alors il suffit de poser la base de ces prismes sur l'alidade mobile du cercle, et de l'y attacher latéralement avec de la cire. Les arêtes seront nécessairement verticales. On pourra alors vérifier toutes les conditions de coïncidence que j'ai exposées.

Supposons maintenant, fig. 8, la première surface A B de l'angle dièdre, dirigée de manière que le rayon SI, envoyé par l'objet S sur cette surface, se réfléchisse dans la lunette L, et réponde exactement sous le fil. Admettons de plus que cet objet soit si éloigné, que la grosseur du corps dont on mesure les angles soit insensible comparativement à cette distance ; alors on lira sur le limbe du cercle la division à laquelle l'alidade répond. Cela fait, si l'on tourne cette alidade, elle fera tourner aussi la surface A B qu'elle porte, et l'image de l'objet ne répondra plus dans la lunette au centre des fils, ou même elle n'y entrera plus du tout ; mais, à force de tourner, on finira par la revoir par réflexion sur l'autre surface A D de l'angle dièdre. Or, pour cela, de combien a-t-on dû tourner l'alidade ? Pour le savoir, il faut faire attention que, l'objet S restant immobile, ainsi que la direction de la lunette, lorsque la surface A D réfléchit l'objet dans cette dernière, elle a nécessairement une direction parallèle à celle qu'avait la première surface lorsqu'elle produisait le même effet. Tout se réduit donc à ceci : étant

donné un angle BAD, placé dans un cercle, de combien faut-il faire tourner ses branches sur lui-même, pour que AD prenne la direction AB? Maintenant la chose est bien facile, car vous n'avez qu'à supposer que la rotation se fasse autour du point A, qui est le sommet de l'angle, et qu'elle se fasse dans le sens BD; alors, si vous prolongez le côté BA vers D′, il est clair que le côté AD devra décrire l'angle DAD′ pour venir se placer sur cette direction. Cet angle DAD′ est le supplément de l'angle proposé BAD, que nous nommerons A; ainsi 180 — A sera le mouvement de la face AD. Peu importe autour de quel point la rotation se fasse, son étendue sera toujours la même. Donc, quand on aura effectué ce mouvement, si on lit sur le limbe l'arc parcouru par l'alidade, et qu'on le nomme (A), on aura

$$180 - A = (A),$$

ce qui donne

$$A = 180 - (A),$$

et ainsi l'angle dièdre formé par les deux faces du corps sera connu. Supposons que l'on repète la même opération successivement sur les trois angles A, B, C d'un prisme droit triangulaire, à base horizontale; alors, en nommant (A), (B), (C) les trois résultats observés, en faisant toujours tourner l'alidade du cercle dans le même sens, on aura

$$A = 180° - (A),$$
$$B = 180 - (B),$$
$$C = 180 - (C);$$

ce qui donne

$$A + B + C = 540 - (A) - (B) - (C).$$

Mais puisque le corps est un prisme triangulaire droit, ses angles dièdres sont égaux aux angles rectilignes du triangle qui lui sert de base, et ainsi leur somme doit faire 180°; on a donc

$$A + B + C = 180°,$$

et par conséquent

$$(A) + (B) + (C) = 360°;$$

c'est-à-dire que la somme des trois résultats observés doit toujours être égale au tour de la circonférence. Ceci fournit une vérification pour connaître si l'on a bien opéré.

Mais il y a plus; si l'on veut avoir chacun de ces angles avec

une extrême exactitude, on peut appliquer à leur mesure le principe de la répétition des angles si utile en astronomie. Pour cela, quand on a fini la mesure de l'angle A, on fixe l'alidade sur ce point, et on n'y touche plus. Mais on desserre les vis qui retenaient le limbe du cercle immobile; et on le fait tourner en sens inverse, jusqu'à ce qu'il ramène la première face AB, parallèlement à sa première position. Alors on attache de nouveau le limbe qui redevient immobile, et on recommence la mesure de l'angle A par le mouvement de l'alidade, comme précédemment. Mais cette fois, le point de départ de l'alidade n'est pas le même que dans l'opération précédente, parce qu'elle a déjà marché d'une première quantité égale à la mesure du premier angle. Ainsi le point de départ de cette seconde opération est la fin de la première. A cette seconde, on en peut faire succéder une troisième, et ainsi de suite. Alors, si le nombre total des opérations est n, l'arc total parcouru sur le limbe sera égal à n fois 180—A. Ainsi, pour avoir 180—A, il faudra le diviser par le nombre n des mesures successives que l'on aura faites; d'où l'on voit que toutes les erreurs qui peuvent exister dans la division de l'instrument ne porteront que sur la première et la dernière lecture, et se compenseront exactement dans tous les points compris entre les extrêmes. Or, ces erreurs des points extrêmes se trouvant divisées par le nombre n, l'erreur définitive qui en résulte sur l'angle 180 — A, et par conséquent sur A, peut devenir aussi petite que l'on voudra.

Il faut toujours avoir grand soin que la pince qui sert à fixer le limbe dans la répétition des angles le tienne ferme et immobile. Car si elle pouvait glisser, tout ce que le limbe ferait ainsi de mouvement ne serait pas exécuté par l'alidade, et les observations seraient altérées. Pour éviter sûrement cet inconvénient, il serait utile qu'il y eût sous le limbe une seconde lunette à fils qui pût aussi tourner autour de son centre, et être successivement rendue fixe ou mobile, comme dans les cercles répétiteurs. Alors, quand on aurait rendu le limbe fixe, on la dirigerait à travers l'air sur l'objet qui sert de mire; on mettrait cet objet sous le fil du micromètre, et cela servirait à reconnaître si le

limbe se déplace le moins du monde, pendant que l'on fait tourner l'alidade supérieure. D'après cela, on voit que, si l'on a à sa disposition un cercle répétiteur, on peut s'en servir aisément comme goniomètre; car le limbe de cet instrument peut être rendu horizontal, et il porte deux lunettes sur ses faces opposées.

Les procédés que nous venons d'expliquer peuvent servir à mesurer exactement les angles dièdres que les faces des cristaux forment entre elles, ce qui est un des élémens les plus essentiels de la minéralogie. Mais comme ces faces sont ordinairement peu étendues, il faut chercher à les placer aussi près qu'il est possible de l'axe de rotation de l'alidade, c'est-à-dire du centre du cercle, afin que l'image de l'objet qui doit être ramenée dans la lunette sous le fil du micromètre puisse se former sur les deux facettes successivement; ce qui n'aurait pas lieu, par exemple, si l'une des facettes, en se retournant, se trouvait entièrement hors de la direction que le rayon réfléchi doit avoir pour arriver sous le fil.

M. Wollaston a imaginé pour cet objet un instrument d'une grande simplicité, qui est représenté fig. 9; il se compose d'un cercle de cuivre gradué sur son bord, et tournant autour d'un axe horizontal A A, lequel est lui-même porté sur un pied vertical CP. L'axe AA est percé dans toute sa longueur, pour laisser passer un autre axe intérieur *aa*, dont l'extrémité saillante porte plusieurs pièces à mouvemens rectangulaires, sur lesquelles on attache avec de la cire molle le cristal dont on veut mesurer les angles. Pour se servir de cet instrument, il faut se placer en face de quelque édifice qui offre plusieurs lignes horizontales parallèles les unes aux autres. Alors on pose sa base sur quelque plan horizontal, de manière que son limbe devienne vertical, et perpendiculaire, ou à peu près perpendiculaire aux lignes qui doivent servir de mire. Puis plaçant l'œil tout près du cristal, on fait tourner l'axe intérieur *aa* jusqu'à ce qu'une des lignes supérieures de l'édifice y soit aperçue par réflexion sur une de ses surfaces, et au moyen des pièces mobiles qui le portent, on le tourne jusqu'à ce que cette image réfléchie

coïncide avec une des lignes inférieures vues directement. Quand on a obtenu cette condition, l'on fait tourner de nouveau l'axe intérieur *aa* jusqu'à ce que la même coïncidence s'observe de même sur l'autre face dont on veut mesurer l'angle dièdre avec la première; c'est à quoi l'on parvient bientôt par quelques essais. Or, lorsque cette coïncidence peut ainsi s'obtenir successivement sur les deux faces sans changer la place de l'œil, sans toucher au cristal, et par la seule rotation de l'axe *aa*, on est sûr que l'intersection des deux surfaces est elle-même exactement horizontale, et par conséquent parallèle à l'axe *aa*; dès-lors on ne touche plus au cristal; mais partant d'une des positions dans lesquelles la réflexion s'observe sur une des deux surfaces, on tourne le limbe jusqu'à ce que la réflexion et la coïncidence des mêmes lignes s'observe de même sur l'autre. Ce mouvement s'opère au moyen du grand axe AA, qui fait tourner avec lui l'axe *aa*, le cristal et le limbe. L'arc dont celui-ci a tourné est mesuré par la division tracée sur le limbe, et il est évidemment égal au supplément de l'angle dièdre formé par les deux surfaces. Mais la division tracée sur le limbe est écrite de manière à indiquer l'angle même, du moins quand on a d'abord mis l'index sur le point zéro.

Pour que l'application de ce procédé soit facile et sûre, il faut que les dimensions du cristal et sa distance à l'œil puissent être considérées comme fort petites, comparativement à l'éloignement des objets qui servent de mire. Car si cela a lieu, la fixité de l'œil n'est plus une condition nécessaire, pas plus qu'elle ne l'est dans les observations que l'on fait en mer avec les instrumens de réflexion. De plus, la verticalité du limbe sera assurée par la possibilité même d'opérer la coïncidence des lignes réfléchies avec les lignes parallèles vues directement; enfin l'observation de ces coïncidences sur les deux faces attestera de la manière la plus exacte que l'angle mesuré est bien exactement celui qu'elles embrassent. Pour s'habituer au maniement de l'instrument, on peut employer d'abord comme cristal une lame très-mince de chaux sulfatée; car ces lames, lorsqu'elles sont tirées d'un cristal bien pur, ont leurs deux surfaces exacte-

ment parallèles ; de sorte que l'on doit trouver l'angle qu'elles comprennent exactement de 180°. Cela servira donc à la fois d'exercice et de vérification pour la bonté de l'instrument. C'est ce dont on pourra s'assurer aussi avec d'autres cristaux, en répétant plusieurs fois la mesure de leurs angles. Un des avantages particuliers à ce goniomètre, c'est de pouvoir servir à mesurer les angles des plus petits cristaux, auxquels même seuls il est applicable. Or, l'expérience a prouvé que ces petits morceaux sont les seuls dans lesquels on doive chercher une parfaite régularité, les grands cristaux étant presque toujours maclés, c'est-à-dire composés de cristaux plus petits, arrangés dans un ordre qui s'écarte toujours un peu de la forme régulière.

CHAPITRE III.

Des Miroirs courbes.

Pour découvrir et déterminer en général le lieu apparent, la forme et la grandeur des images que réfléchissent les miroirs courbes, quelle que soit leur figure, il suffit de concevoir la réflexion de chaque rayon lumineux comme se faisant sur le plan tangent à la surface au point d'incidence. Alors on peut, par le calcul, étendre à toutes les surfaces les déterminations que nous avons obtenues pour le miroir plan. Mais, dans les usages pratiques, il est inutile de s'élever à cette généralité, car on n'y emploie jamais que des miroirs sphériques concaves ou convexes, les seuls que l'on puisse travailler et polir avec exactitude. Même on n'en obtient d'images nettes que dans le cas où les rayons lumineux tombent presque perpendiculairement sur leur surface. Aussi ce cas sera le seul que nous nous proposons d'examiner.

Pour en fixer les circonstances avec exactitude, concevons dans l'espace un point lumineux lançant ses rayons sur les diverses parties d'une surface sphérique quelconque, concave ou convexe; et, isolant un d'entre eux, cherchons à déterminer la direction du rayon réfléchi qui en résultera. Pour cela, rappelons-nous que la réflexion s'opère toujours dans le plan mené par le point lumineux et par la normale au point d'incidence. Ici cette normale est le rayon même de la sphère; ainsi la réflexion s'opérera dans le plan du grand cercle mené par le point d'incidence et par le point lumineux.

Soit, MAM', fig. 10, l'intersection du miroir par ce plan. Plaçons-y en S le point lumineux, et désignons par SI le rayon incident que nous avons particulièrement considéré. Du point I au centre de la sphère, menons la normale IC, et prenant l'angle CIR égal à CIS, IR sera la direction du rayon réfléchi.

Pour réduire cette construction en formule, menons du centre de la sphère la ligne CA au centre A de figure du miroir, dont je suppose que le contour soit circulaire; et nous servant de cette ligne comme d'un axe de coordonnées, nommons X, X′, V, les angles que forment avec elles le rayon incident IS, le rayon réfléchi IR, et la normale IC. Cela posé, l'angle d'incidence CIS sera exprimé par $V - X$; et l'angle de réflexion CIR le sera par $X' - V$; puisque ces deux angles doivent être égaux, on aura

$$X' - V = V - X; \quad \text{d'où} \quad X' = -X + 2V. \qquad (1)$$

L'angle V est donné dès qu'on se donne le point d'incidence I. Car si l'on nomme y la distance IP de ce point à l'axe du miroir, on aura, en désignant CA ou CI par r,

$$\sin V = \frac{y}{r}.$$

Si donc, outre le point d'incidence, on connaît encore l'un des angles X ou X′, on aura aussitôt l'autre par la relation (1) qui existe entre eux. D'après cela on pourra, étant donné le rayon incident, trouver le rayon réfléchi qui y correspond, et réciproquement.

Cette relation servira de même pour tous les autres rayons lumineux émanés de S et compris dans le même plan d'incidence SAC. Mais il y aura d'autres rayons qui s'écarteront de ce plan au-dessus ou au-dessous, et qui se réfléchiront dans les grands cercles qui les contiennent, ce qui semble devoir rendre leur marche plus difficile à calculer. Heureusement ce calcul n'est point nécessaire, du moins quand on se borne à considérer des incidences très-petites, parce qu'alors les rayons dont il s'agit, s'écartant très-peu du plan SAC, vont concourir aux mêmes foyers que les autres; de sorte que la considération des premiers suffit pour déterminer complètement le lieu et la situation de l'image qui résulte de leur ensemble. Ce cas étant le seul qui nous importe, puisque c'est le seul qui se réalise dans les applications usuelles, nous ne considérerons désormais que les rayons dirigés dans le plan d'incidence SAC, que nous nommerons le *profil du miroir*, et nous supposerons encore que tous

ces rayons forment de très-petits angles avec l'axe central A C, condition indispensable pour que le concours dont nous venons de parler puisse avoir lieu. Ceci nous permettra par conséquent de considérer toujours dans nos formules les angles X, V, X', comme très-petits, quoique pouvant être d'ailleurs positifs ou négatifs.

Commençons par examiner le cas où le point rayonnant S serait situé sur le prolongement même de l'axe A C, à une si grande distance que tous les rayons incidens qui en émanent puissent être censés parallèles à cet axe, fig. 11. Dans ce cas, l'angle X est nul, et, d'après la formule, l'angle X' devient égal à 2V. Par conséquent le triangle C I R est isoscèle, et C R = R I. Or l'angle V devant toujours être supposé très-petit, d'après nos conditions précédentes, il s'ensuit que la somme des deux côtés C R et R I diffère extrêmement peu de C I, et seulement dans les termes de l'ordre du carré du sinus de cet angle. Négligeant donc cette différence, C R sera la moitié de C I ou de C A, c'est-à-dire du rayon de la sphère. Il est évident d'ailleurs que ce résultat n'est pas particulier au point d'incidence I que nous avons considéré, puisqu'il ne renferme rien qui caractérise ce point; ainsi tous les rayons réfléchis viendront également passer par le même point R de l'axe. De là résulte cette conséquence importante : lorsqu'un miroir sphérique, concave ou convexe, d'une petite étendue, reçoit un faisceau de rayons incidens parallèles à son axe, il les réunit par la réflexion en un seul foyer, situé à une distance de sa surface égale à la moitié du rayon de la sphère sur laquelle il est construit. Cet intervalle se nomme la *distance focale principale* du miroir, et le point R où elle se termine sur l'axe, se nomme le *foyer principal.* Lorsque le miroir est concave vers le point rayonnant, fig. 12, le foyer principal est situé du côté de ce point en avant du miroir, et il s'y fait une concentration réelle de lumière. Mais si le miroir est convexe, fig. 13, le foyer principal tombe au-delà de sa surface; les rayons réfléchis ne peuvent donc pas traverser le miroir pour y parvenir, et ainsi le foyer n'indique alors que le point de concours de leurs prolongemens.

Ce cas étant résolu d'une manière générale, rien n'est plus

facile que de trouver le lieu du foyer dans toutes les autres positions possibles du point rayonnant. En effet, soit S ce point, fig. 14. Parmi tous les rayons qui en émanent, menons SI parallèle à l'axe CA du miroir. SI, en se réfléchissant, viendra passer au foyer des rayons parallèles, situé en D, milieu de CA; de sorte que le rayon réfléchi sera ID. Menons encore SA dirigé au centre de figure du miroir, SA se réfléchira évidemment de l'autre côté de l'axe CA, en formant avec lui un angle égal; de sorte que le rayon réfléchi sera AF. Prolongeons ID et AF jusqu'à ce qu'ils se coupent, le point F sera leur foyer, et ce sera aussi le foyer de tous les autres rayons émanés de S.

Pour réduire cette construction en formule, menons des points S, I, F, les ordonnées SH, IP, FQ, perpendiculaires sur l'axe CA, et représentons les deux premières par y, la dernière par Y. Appelons en outre Δ Δ' les abscisses AH, AQ du point rayonnant et du foyer, comptées sur l'axe AC, à partir du centre de figure A du miroir. Si nous exprimons le rayon de celui-ci par r, l'abscisse AD du foyer des rayons parallèles sera $\frac{1}{2}r$, et on pourra la regarder comme sensiblement égale à PD; car l'arc AI étant supposé très-petit, son sinus-verse AP devient négligeable. Par la même raison, Δ et Δ' pourront être censées égales à PH et à PQ. Cela posé, l'égalité des angles HAS et QAF, situés de part et d'autre de l'axe, donnera d'abord

$$\frac{y}{\Delta} = -\frac{Y}{\Delta'};$$

car ce sont là les expressions de leurs tangentes trigonométriques. De même, l'égalité des angles QDF, PDI donnera

$$-\frac{Y}{\Delta' - \frac{1}{2}r} = \frac{y}{\frac{1}{2}r}.$$

De ces deux équations réunies, l'on tire

$$\frac{1}{\Delta'} + \frac{1}{\Delta} = \frac{2}{r} \qquad Y = -y\frac{\Delta'}{\Delta}.$$

La première formule donnera la *distance focale* Δ', quand la distance Δ du point rayonnant au miroir sera connue, ou réci-

proquement. Lorsque Δ et Δ' seront connus, la seconde déterminera Y, c'est-à-dire la distance du foyer à l'axe du miroir. Le signe de Y, comparé à celui de y, indiquera si le point rayonnant et le foyer sont situés du même côté de l'axe, ou l'un au-dessus, l'autre au-dessous. Si, au lieu d'un seul point rayonnant, l'on veut supposer un objet d'une étendue finie, il n'y aura qu'à appliquer successivement ces formules aux divers points qui le composent, et le système de leurs foyers formera l'image de l'objet. Ce calcul peut être abrégé, en remarquant que la première relation entre Δ et Δ' est indépendante de y, c'est-à-dire de la distance des points rayonnans à l'axe du miroir ; d'où il résulte que tous les points de l'objet qui sont situés sur une même ligne droite perpendiculaire à l'axe, ont aussi leurs images à une même distance Δ du miroir.

Pour réaliser de la manière la plus simple tous les cas que nos formules embrassent, il faut employer comme corps rayonnant la flamme d'une bougie, que l'on place successivement à diverses distances d'un miroir concave ou convexe. Alors on se donne la distance Δ de l'objet au miroir, et la formule donne la distance Δ' du miroir au foyer.

Commençons par supposer le miroir concave ; c'est le cas de la figure sur laquelle nos calculs sont établis. D'abord, si la flamme est fort éloignée du miroir, en sorte que Δ soit fort considérable par rapport à r, l'image se forme presqu'au foyer des rayons parallèles, c'est-à-dire au-devant du miroir, à une distance égale à $\frac{1}{2}r$; et on peut rendre ce phénomène sensible en plaçant en ce point un verre dépoli, sur lequel on reçoit les rayons réfléchis. Si au lieu de la flamme d'une bougie on emploie pour objet la lumière même du soleil, il se forme au foyer principal une petite image concentrée du soleil qui y porte une vive chaleur et une lumière éblouissante : c'est le cas de Δ infini. A mesure que Δ diminue, Δ' augmente, comme l'on peut s'en assurer d'après la formule, et l'objet se rapproche de son image, qui est toujours en avant du miroir et renversée. Lorsque $\Delta = r$, on a aussi $\Delta' = r$; l'objet est placé au centre de courbure du miroir, et coïncide avec son image, Δ diminuant

toujours, Δ' le surpasse, et l'image s'éloigne du miroir plus que l'objet, en grandissant et restant toujours renversée. On peut encore la rendre sensible, comme dans les cas précédens, en la recevant sur un verre dépoli, que l'on regarde du côté opposé. Mais lorsque $\Delta = \frac{1}{2} r$, ce qui met l'objet au foyer des rayons parallèles, la distance focale Δ' devient infinie, et l'image s'éloigne indéfiniment; de sorte qu'il devient impossible de l'apercevoir. Enfin Δ continuant toujours à décroître, Δ' devient négatif, c'est-à-dire que l'image reparaît au-delà du miroir du côté opposé à l'observateur. Elle paraît alors droite, agrandie, et se forme à une distance d'autant plus petite, que Δ est moindre; de sorte qu'elle se rapproche du miroir en même temps que l'objet, quoique du côté opposé. Enfin, quand Δ devient nul, Δ' devient aussi nul, et l'objet et son image coïncident sur la surface du miroir.

Les phénomènes produits par les miroirs convexes sont beaucoup plus simples. Pour les obtenir, il faut, dans notre formule, faire le rayon r négatif, afin d'intervertir la direction de la courbure que nous avions supposée dans notre construction. Alors la relation entre Δ et Δ' devient

$$\frac{1}{\Delta'} + \frac{1}{\Delta} = -\tfrac{1}{2} r, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{\Delta'} = -\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{2r}.$$

L'objet étant toujours situé au-devant du miroir, Δ est toujours positif. Δ' est donc constamment négatif, c'est-à-dire que l'image se forme toujours au-delà du miroir. Elle paraît droite, et moindre que l'objet ne paraîtrait à la même distance. D'abord, quand l'objet est infiniment éloigné, Δ' est égal à $-\frac{1}{2} r$, et l'image se forme à une distance du miroir égale à la moitié du rayon de sa courbure. Mais à mesure que l'objet se rapproche du miroir, Δ diminue, et par suite Δ'; ce qui fait que l'image se rapproche du miroir. Enfin, quand Δ est nul, Δ' devient aussi nul, et l'objet coïncide avec son image sur le miroir même.

Lorsqu'on veut se servir de miroirs sphériques pour des expériences qui demandent de l'exactitude, il faut savoir déterminer leur foyer. Si le miroir est concave, on le place dans une chambre peu éclairée, à quelque distance d'une fenêtre, d'où

l'on puisse apercevoir divers objets suffisamment éloignés. On tourne sa concavité vers la fenêtre, en l'inclinant un peu à droite ou à gauche, comme on le voit fig. 15; de manière que le foyer des rayons réfléchis se projette dans la partie obscure de la chambre. Alors on présente dans cette direction un morceau de carton blanc FF, que l'on rapproche ou que l'on éloigne du miroir, jusqu'à ce que les images des objets viennent s'y peindre avec netteté. Quand on a trouvé le point convenable pour cet effet, on mesure sa distance au centre de figure du miroir, et elle est sensiblement égale à la moitié du rayon de sa courbure. Mais cette méthode exige que la surface du miroir n'occupe qu'une très-petite portion de la sphère sur laquelle il est travaillé; sans quoi la réunion des rayons en un seul foyer n'est plus rigoureuse, et les approximations dont nous avons fait usage dans nos calculs ne seraient plus applicables.

Si le miroir est convexe, l'opération est plus difficile. Il faut alors coller sur un de ses diamètres une bande de papier noir DO, fig. 16, en deux points de laquelle on pratique de petites ouvertures circulaires à égales distances du centre de figure. On fait ensuite tomber sur le miroir la lumière du soleil. Les rayons lumineux réfléchis par les deux ouvertures divergent à partir d'un même point qui est le foyer des rayons parallèles. On mesure donc leur écartement à diverses distances de la surface du miroir, et l'on en conclut le point de leur concours, dont la distance à la surface doit être la moitié du rayon de la sphère. Cette méthode est nécessairement susceptible de peu d'exactitude; mais si l'on avait besoin de mesures très-précises, ce qui est fort rare avec cette espèce de miroir, on pourrait les obtenir à l'aide d'un instrument que l'on nomme le sphéromètre, et que nous décrirons plus loin.

Quand on voudra seulement vérifier par l'observation les divers résultats que nous avons déduits des formules, il sera à peu près indifférent d'employer des miroirs métalliques ou des miroirs de verre. Il faut néanmoins remarquer qu'avec ces derniers, on a toujours deux images, l'une réfléchie par la première surface, l'autre réfléchie par la seconde. Celle-ci même est ordi-

nairement la plus lumineuse, parce que, pour augmenter l'intensité de la réflexion, l'on applique sur la surface postérieure du verre un enduit métallique, formé par un amalgame d'étain et de mercure que l'on nomme le *tain;* de sorte qu'à proprement parler, un pareil miroir est réellement composé d'un miroir antérieur de glace, et d'un miroir postérieur métallique. Cette duplication d'images n'a point d'inconvénient grave, lorsqu'on veut simplement observer les résultats généraux de la réflexion; mais elle serait intolérable dans des observations précises, surtout si l'on voulait grossir les images par des loupes placées près de l'œil, comme il est nécessaire de le faire pour l'astronomie. Aussi les miroirs de métal sont-ils alors les seuls dont on fasse usage. On verra dans l'optique analytique la manière dont ils doivent être employés pour former ces instrumens que l'on appelle des *télescopes catoptriques.*

CHAPITRE IV.

De l'Héliostat.

La plupart des expériences d'optique, principalement celles qui ont pour objet l'étude des propriétés physiques de la lumière, se font sur des rayons solaires que l'on introduit dans une chambre obscure par une ouverture très-petite, percée dans le volet d'une fenêtre. Mais cette manière d'opérer présente deux inconvéniens : le premier est l'obliquité des rayons sur l'horizon ; le second est le mouvement continuel du soleil.

L'obliquité des rayons fait qu'après être entrés dans la chambre obscure, ils se dirigent vers le plancher, de sorte qu'on ne peut opérer sur eux que dans une longueur ordinairement fort petite. Il en résulte encore que le rayon ne peut être ainsi introduit que pendant un petit nombre d'heures, ce qui limite la durée et la facilité de ces expériences. Enfin le mouvement continuel du soleil fait que la direction des rayons change sans cesse ; de sorte qu'il faut à chaque instant déplacer les corps qu'on veut leur présenter.

On évite cet inconvénient au moyen d'une machine inventée par S'gravesande, et nommée par lui *héliostat*, parce qu'elle permet de diriger et de fixer à volonté le rayon solaire dans telle direction que l'on veut choisir.

Cette machine, représentée fig. 17, est composée de deux pièces principales, d'un miroir plan métallique MM, et d'une horloge qui fait mouvoir ce miroir de telle sorte, que le rayon solaire réfléchi reste parfaitement immobile, et conserve toujours la même direction.

On fait le miroir en métal, et non pas en glace, afin d'éviter les doubles réflexions. Pour qu'il puisse prendre librement toutes les positions, on le monte de manière qu'il ait deux mouvemens de rotation rectangulaires, l'un autour d'un axe

horizontal A A, l'autre autour d'un axe vertical C P, qui lui sert de support.

Pour que l'horloge puisse le conduire, on adapte derrière sa surface une tige perpendiculaire C Q, que l'on nomme *la queue du miroir*, et dont l'extrémité Q est menée par l'aiguille C R' du cadran, au moyen d'une pièce F F, qui est représentée séparément, fig. 18. Cette pièce, qui a la forme d'une fourche, porte à sa base une queue cylindrique *q q*, qui entre librement dans un tuyau percé à l'extrémité R de l'aiguille, perpendiculairement à sa direction; de sorte qu'en vertu de cette disposition, la fourche F F peut déjà tourner autour de l'axe *q q*. Entre les branches de cette fourche est suspendu un petit tuyau cylindrique *t t*, qui tourne librement autour d'un axe de rotation *a a*, perpendiculaire à leur longueur; de sorte qu'en combinant ce mouvement avec celui de la fourche elle-même autour de sa tige *qq*, on voit que le petit tuyau peut prendre dans l'espace toutes les directions imaginables. Cela posé, quand on veut attacher la queue du miroir à l'horloge, on enlève la fourche F F, on fait passer l'extrémité Q de la queue C Q dans le petit tuyau *tt*, qui a justement le même diamètre; on replace la queue de la fourche sur l'extrémité de l'aiguille; alors le mouvement de cette aiguille se communique au miroir. Mais pour que la marche de celui-ci soit telle que le rayon réfléchi reste fixe, il faut que le cadran de l'horloge soit dirigé dans le plan de l'équateur, et qu'il y ait entre la position du miroir et de l'horloge certains rapports de distance que nous allons apprendre à déterminer.

Pour les découvrir, il faut d'abord se rappeler les lois astronomiques du mouvement diurne du soleil. On sait que la terre tourne sur elle-même en vingt-quatre heures; mais comme tous les objets terrestres se déplacent ainsi tous ensemble, nous ne nous apercevons pas de ce mouvement. Nous supposons involontairement la terre immobile, et il nous semble que c'est le ciel qui tourne, avec tous les astres, d'orient en occident. L'axe idéal, autour duquel cette rotation s'opère, étant prolongé indéfiniment dans les deux sens, détermine dans le ciel deux

points opposés qui nous semblent constamment immobiles, et que l'on appelle les *pôles*. A mesure que les astres sont plus éloignés de ces points, le cercle diurne qu'ils nous semblent décrire s'agrandit. Il est le plus grand possible pour les astres situés dans un plan mené par le centre de la terre perpendiculairement à l'axe de rotation. Ce plan se nomme *l'équateur*, parce que, sous le rapport du mouvement diurne, il divise le ciel en deux parties égales. Nous avons considéré jusqu'ici les astres comme réellement fixes dans le ciel; mais plusieurs ont des mouvemens qui leur sont propres, et qui sont indépendans du mouvement diurne. De ce nombre est le soleil. Les observations prouvent que la marche propre de cet astre se fait d'occident en orient, dans une orbite presque circulaire, oblique à l'équateur, et dont l'inclinaison sur ce plan est dans ce siècle d'environ 23° 28'. Cette orbite se nomme l'*écliptique :* le temps que le soleil emploie à la décrire forme ce que nous appelons l'*année*. L'écliptique étant oblique à l'équateur, on voit que le soleil, en la parcourant, s'approche du plan de l'équateur et s'en éloigne tour à tour; mais ce mouvement, qui lui fait parcourir dans le ciel une seule circonférence par année, est très-peu considérable comparativement à la rotation diurne qui semble lui faire décrire chaque jour une circonférence entière parallèlement à l'équateur. C'est pourquoi, dans toutes les applications physiques où l'on emploie des constructions mécaniques, comme l'héliostat et les cadrans solaires, on peut supposer que le soleil reste sensiblement à la même distance de l'équateur pendant toute la durée d'un même jour, et que le mouvement diurne lui fait alors décrire un *cercle parallèle* à ce plan; mais chaque jour il faut le placer sur un parallèle différent. Ces distances diverses se mesurent par les arcs d'un grand cercle mené par l'axe de rotation perpendiculairement à l'équateur; et les divers parallèles se distinguent les uns des autres par les nombres de degrés compris sur ce grand cercle entre eux et l'équateur. C'est ce que l'on nomme les *déclinaisons* des parallèles. Les deux parallèles les plus éloignés de l'équateur, que le soleil atteint chaque année, se nomment *tropiques*, et les

instans où il s'y trouve s'appellent *solstices*. Cette dernière dénomination vient de ce que le mouvement en déclinaison étant alors sur le point de changer de direction, il est pendant quelques jours très-faible et presque insensible ; ce qui fait que le soleil, considéré relativement à l'équateur, paraît stationnaire. Il y a encore deux autres instans de l'année qui sont distingués par des dénominations particulières ; ce sont ceux où le soleil traverse le plan de l'équateur : on les appelle les *équinoxes*, parce qu'alors, par toute la terre, la durée du jour est égale à celle de la nuit.

Pour donner à ces définitions une rigueur géométrique, soit, fig. 19, C le centre de la terre et de la sphère céleste ; EMQ l'équateur, et PCP′ l'axe de rotation diurne, dont l'extrémité P désigne le pôle boréal, et P′ le pôle austral. Dans la figure, il faut supposer cet axe élevé sur le plan du cercle QME. Supposons qu'à un instant quelconque, CS représente un rayon visuel mené du centre de la terre au soleil S, considéré comme un point. Pour déterminer la position de ce rayon dans l'espace, nous commencerons par le projeter perpendiculairement sur le plan de l'équateur, suivant la ligne CM ; et ensuite nous le rapporterons à deux coordonnées angulaires, dont l'une sera l'angle SCM, formé par le rayon lui-même avec le plan de l'équateur ; c'est la déclinaison du soleil. Nous la représenterons par d. L'autre sera l'angle MCE, formé par la projection du rayon avec une ligne fixe CE, menée dans le plan EMQ, parallèlement au méridien du lieu où l'on observe. Alors l'angle MCE, que nous nommerons h, sera ce que l'on nomme *l'angle horaire*, parce qu'étant la mesure de l'angle dièdre, formé par le méridien PCE avec le plan horaire PCS où le soleil se trouve, il indique à chaque instant l'heure qu'il est. Cela posé, prenons sur la direction du rayon solaire une longueur quelconque CS ; puis abaissant de ce point sur l'équateur la perpendiculaire SM, et du point M menant la perpendiculaire MN sur la méridienne CE, nous aurons évidemment

$$SM = CS \cdot \sin d \qquad CM = CS \cdot \cos d$$
$$MN = CM \cdot \sin h \qquad CN = CM \cdot \cos h.$$

Or, les lignes CN, NM, MS forment un système de coordonnées rectangulaires, que nous pouvons désigner par $x\,y\,z$; ainsi, en nommant r la distance arbitraire CS, nous aurons, pour les valeurs de ces coordonnées, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} x &= r \cos d \cos h \\ y &= r \cos d \sin h \qquad (1) \\ z &= r \sin d. \end{aligned}$$

Si l'on veut tirer de là les équations du rayon CS sous la forme ordinaire, cela sera très-facile; il ne faut que diviser les deux premières équations membre à membre par la dernière; alors r disparaîtra, et l'on aura

$$x = z \cdot \frac{\cos d \cos h}{\sin d} \qquad y = z \cdot \frac{\cos d \sin h}{\sin d} \qquad x = y \frac{\cos h}{\sin h}.$$

Ce sont les équations des projections du rayon ramenées à la forme ordinairement adoptée dans la géométrie analytique. Pour l'application que nous avons en vue, nous conserverons les équations (1), parce que leur usage sera plus commode.

La terre est si petite comparativement à l'éloignement du soleil, que, vue de cette distance, elle soutendrait à peine un angle de $16''$. Un si petit angle ne peut être apprécié que par des instrumens astronomiques très-parfaits, et il devient tout-à-fait insensible dans des opérations purement graphiques, telles que celles que l'on fait avec l'héliostat. De là il résulte que, dans ces opérations, la terre entière peut être regardée comme un point unique, ou, en d'autres termes, les rayons visuels menés de ses différens points au centre du soleil, peuvent être censés parallèles. Ainsi les équations (1) peuvent être employées pour un point quelconque de la terre, considéré comme origine des coordonnées.

Concevons que, EMQ représentant toujours le plan de l'équateur, on élève en C un style CP d'une longueur donnée, qui soit perpendiculaire à ce plan, et qui coïncide, par conséquent, avec l'axe de rotation diurne; ce style, éclairé par le soleil, projettera son ombre sur le plan EMQ. Si, à un instant quelconque, on conçoit un rayon solaire PS, passant

par son extrémité supérieure P, le point H, où ce rayon prolongé perce le plan de l'équateur, sera l'extrémité de l'ombre du style ; et CH, projection du rayon PS, sera la direction de cette ombre. Son équation en $x\,y$ sera donc, comme ci-dessus,

$$x = y\,\frac{\cos h}{\sin h}.$$

Si la longueur CP du style est représentée par l, la longueur l' de l'ombre aura pour valeur

$$l' = \frac{l}{\operatorname{tang} d}.$$

A mesure que l'angle horaire h variera par le mouvement diurne du soleil, l'ombre tournera autour du point C ; et si l'on décrit autour de ce point un cercle divisé en vingt-quatre parties égales, le passage successif de l'ombre sur ces divisions marquera les heures de la journée. Un appareil de ce genre se nomme un *cadran équatorial ;* et l'on verra tout-à-l'heure que le cadran de l'horloge de l'héliostat en remplit précisément la fonction.

Maintenant, pour trouver les conditions qui règlent dans cette machine, le mouvement du miroir, soit, fig. 20, C le centre de ce miroir, que nous pouvons aussi considérer comme le centre de la sphère céleste. Désignons par CA la direction assignée au rayon réfléchi, direction qui doit rester constante. Et enfin représentons par SC la direction du rayon incident, qui, à un certain instant quelconque, se réfléchit ainsi. Rapportons, comme ci-dessus, ces lignes à des coordonnées angulaires d et h, relatives à un plan EQ parallèle à l'équateur, et, par analogie, nommons D, H celles qui appartiennent au rayon fixe CA. Avec ces données, et la loi de la réflexion, on peut déterminer la direction de la queue du miroir. Car, sachant que l'angle de réflexion doit être égal à l'angle d'incidence, si, sur le prolongement de AC et de SC de l'autre côté du plan EQ, on prend deux points A′, S′, également distans de C, qu'ensuite on mène A′S′, et que, par le milieu K′ de cette ligne, on mène CK′, les angles S′CK′, A′CK′ seront égaux et compris dans un même plan, qui est celui du triangle isoscèle

S'CA' ; et puisque c'est là justement la condition de la réflexion, il en résulte que CK' sera la normale à la surface réfléchissante ; ce sera, par conséquent, la queue du miroir. Il ne reste plus qu'à traduire cette construction en calcul ; et cela est très-facile, car, en désignant par $-a$ la longueur arbitraire CA' ou CS', que nous affectons du signe $-$, pour exprimer que les points A', S' sont situés du côté des coordonnées négatives, on aura évidemment

$$\text{Coordonnées du point S'} \begin{cases} x = -a \cos d \cos h \\ y = -a \cos d \sin h \\ z = -a \sin d \end{cases}$$

$$\text{Coordonnées du point A'} \begin{cases} X = -a \cos D \cos H \\ Y = -a \cos D \sin H \\ Z = -a \sin D. \end{cases}$$

De plus, K' étant le milieu de A'S', on aura, en désignant par $x'y'z'$ ses coordonnées,

$$x' = \tfrac{1}{2}(x + X) \qquad y' = \tfrac{1}{2}(y + Y) \qquad z' = \tfrac{1}{2}(z + Z),$$

ou bien

$$2x' = -a \cos d \cos h + X$$
$$2y' = -a \cos d \sin h + Y$$
$$2z' = -a \sin d + Z.$$

Nous avons vu que l'on peut supposer la déclinaison d constante dans l'intervalle d'un jour ; et comme les coordonnées XYZ, prises sur le rayon réfléchi, sont fixes, il s'ensuit que z', est constante, c'est-à-dire que le point K' décrit chaque jour une courbe située dans un plan parallèle à l'équateur EQ. Pour savoir quelle est cette courbe, il faut éliminer l'angle horaire h entre les deux premières équations en $x'y'$. A cet effet, nous les mettrons d'abord sous cette forme

$$x' - \tfrac{1}{2}X = -\tfrac{1}{2}a \cos d \cos h$$
$$y' - \tfrac{1}{2}Y = -\tfrac{1}{2}a \cos d \sin h.$$

Puis élevant les deux membres de chacune d'elles au carré et les ajoutant, h disparaît de leur somme, parce que l'on a

$$\sin^2 h + \cos^2 h = 1,$$

et il vient

$$(x' - \tfrac{1}{2}X)^2 + (y' - \tfrac{1}{2}Y)^2 = \tfrac{1}{4}a^2 \cos^2 d;$$

nous voyons par-là que cette courbe est un cercle dont le rayon est $\frac{1}{2} a \cos d$, et dont le centre est placé au point dont les coordonnées sont $\frac{1}{2}$ X, $\frac{1}{2}$ Y et z'. De plus, le plan de ce cercle est parallèle à l'équateur, comme nous l'avons reconnu précédemment; il sera donc complètement connu et déterminé, dès qu'on se sera donné la distance C A' ou a, qui jusqu'ici est arbitraire. Par exemple, on peut déterminer a par la condition que le rayon de ce cercle ait une longueur assignée et exprimée par R. Alors il faudra prendre a de manière qu'on ait

$$\tfrac{1}{2} a \cos d = \mathrm{R}, \qquad \text{d'où} \qquad a = \frac{2\,\mathrm{R}}{\cos d}.$$

Ce cercle est précisément celui que représente le cadran de l'horloge de l'héliostat. Figurons-le par Q'K'E', et soit C' son centre. Alors son rayon C'K' sera la longueur de l'aiguille de l'horloge que nous représenterons par R. Cherchons quelle doit être la direction de cette aiguille sur le cadran pour qu'elle aboutisse ainsi au point K'; il ne faut que chercher les équations d'une ligne droite qui passe par le centre C' et par le point K', dont les coordonnées sont données. Pour le faire avec simplicité, prenons de nouvelles coordonnées $x'' y''$ parallèles aux précédentes, mais dont l'origine soit au centre C'. Leurs valeurs pour le point K' seront en général

$$x'' = x' - \tfrac{1}{2}\mathrm{X} \qquad y'' = y' - \tfrac{1}{2}\mathrm{Y}.$$

Mettant pour toutes ces quantités leurs valeurs, il vient

$$x'' = -\tfrac{1}{2} a \cos d \cos h \qquad y'' = -\tfrac{1}{2} a \cos d \sin h,$$

d'où l'on tire $$y'' = x'' \frac{\sin h}{\cos h}.$$

C'est l'équation d'une ligne horaire qui serait menée sur le plan du cadran, parallèlement à la projection du rayon solaire CS sur le plan de l'équateur. Cela nous apprend que l'aiguille C'K' doit être dirigée à chaque instant sur le cadran de manière à marquer l'heure qu'il est. Tel est aussi l'effet de l'horloge de l'héliostat, et on la dispose de manière qu'elle remplisse cette condition.

Pour cela, on l'incline de manière que le plan du cadran

$Q'K'E'$ soit parallèle à l'équateur ; l'instrument porte en lui-même tout ce qui est nécessaire pour l'amener à cette position, et nous expliquerons plus bas le détail de cette manœuvre. Ensuite, on oriente le cadran, c'est-à-dire qu'on place la ligne de midi $C'E'$ dans le plan du méridien du lieu où l'on observe. Il y a encore, pour cet objet, des procédés que nous expliquerons. Cela fait, on place au centre du cadran un style $C'P'$ perpendiculaire à son plan, et auquel on pourrait donner une longueur arbitraire, mais qui, dans l'instrument, se trouve déterminé par d'autres conditions, comme nous allons le voir. L'ombre de ce style marque à chaque instant l'heure sur le cadran orienté. Il suffit donc de faire tourner l'aiguille $C'K'$ jusqu'à ce qu'elle coïncide avec cette ombre ; ensuite, en l'abandonnant à elle-même, le mouvement de l'horloge la conduit de manière que cette coïncidence a toujours lieu. Par conséquent si, après l'avoir ainsi dirigée, on y attache la queue du miroir en K', au moyen de la fourche mobile, la condition que nous avons trouvée pour le point K' sera toujours satisfaite ; mais cette condition ne suffit pas à elle seule pour déterminer complètement la direction de la queue CK' ; il faut encore fixer le point C.

Avant de nous en occuper, donnons au style $C'P'$ une longueur l, telle que l'extrémité de son ombre tombe précisément sur l'extrémité de l'aiguille $C'K'$, dont nous avons nommé la longueur R ; cette condition donnera, comme dans la page 180,

$$C'P' = C'K' \text{ tang } d, \qquad \text{ou} \qquad l = \frac{R \sin d}{\cos d}.$$

Mais nous avons vu que le rayon R était assujetti à la condition

$$\tfrac{1}{2} a \cos d = R.$$

Par conséquent, si l'on met pour R cette valeur, il viendra

$$l = \tfrac{1}{2} a \sin d.$$

C'est la longueur qu'il faut donner au style $C'P'$. Or, nous avons vu que la distance z' du centre C' du cadran au plan des x et y avait pour valeur

$$z' = -\tfrac{1}{2} a \sin d + \tfrac{1}{2} Z.$$

Cette distance est négative. Si on lui ajoute l, on aura dans le même sens la coordonnée correspondante du sommet P′ du style qui se réduit alors à $\frac{1}{2}$ Z.
De plus, les deux autres coordonnées de ce sommet, parallèlement à l'équateur, sont les mêmes que celles du centre C′ du cadran, c'est-à-dire qu'elles sont

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{X} \qquad \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Y}.$$

Ce sommet est donc placé alors de manière que ses trois coordonnées sont justement la moitié des coordonnées du point A′ situé sur le prolongement C A′ du rayon réfléchi. Par conséquent, il se trouve aussi sur la direction de la droite C A′ à une distance $\frac{1}{2}a$ du centre C, origine des coordonnées.

Cette nouvelle condition fixe la position du point C, lorsque la direction du rayon réfléchi C A est donnée; par conséquent elle achève de déterminer la direction de la queue du miroir. Lorsqu'on aura réglé la position de l'extrémité K′ de la queue sur l'horloge, on prendra avec un compas, ou de toute autre manière, une distance constante C P′ égale à $\frac{1}{2}a$. Cette quantité sera connue en fonction du rayon de l'horloge; car on a

$$a = \frac{2\,\mathrm{R}}{\cos d}, \quad \text{par conséquent} \quad \tfrac{1}{2}\,a = \frac{\mathrm{R}}{\cos d}.$$

Alors s'étant donné à volonté la direction A C P′ du rayon réfléchi, on portera la longueur $\frac{\mathrm{R}}{\cos d}$ sur le prolongement de ce rayon, à partir du centre C du miroir, et on approchera ou on éloignera l'horloge du miroir jusqu'à ce que le point ainsi déterminé sur le prolongement du rayon aboutisse au sommet P′ du style, dont la longueur aura été prise égale à R tang d. La condition une fois remplie, le mouvement de l'horloge la maintiendra pendant tout le temps que le soleil restera sur l'horizon. Cette détermination primitive se fait très-aisément au moyen d'un instrument auxiliaire auquel S'gravesande a donné le nom de *positeur*. Nous allons l'expliquer en même temps que le reste de l'opération, que l'on comprendra maintenant sans aucune difficulté.

Je supposerai d'abord que le pied du miroir et l'horloge sont

absolument indépendans l'un de l'autre, et peuvent être transportés séparément. Cela était ainsi dans l'instrument de S'gravesande. M. Charles a changé depuis cette disposition, et il a rendu le placement de l'appareil beaucoup plus commode. Nous verrons tout-à-l'heure en quoi consiste cette modification; examinons d'abord le cas le plus simple.

On commence par donner au style C′ P′ porté par l'horloge, la longueur R tang d qui convient au jour de l'observation. R est le rayon de l'aiguille de l'horloge, et d la déclinaison du soleil, que l'on prend dans l'annuaire ou la connaissance des temps. Si l'on regarde les déclinaisons comme positives, quand le soleil est d'un côté de l'équateur, par exemple, vers le pôle boréal, il faut les regarder comme négatives, quand il est de l'autre côté de ce plan. Mais comme on ne pourrait pas faire la longueur du style moindre que zéro, on ne fait pas partir son origine du cadran lui-même; on la compte à partir d'une certaine hauteur arbitraire A au-dessus de ce plan. Alors il faut élever aussi de la même quantité A l'axe du tuyau tt, fig. 21, qui porte la queue du miroir. De cette manière, le plan idéal que nous avons désigné par E′ Q′ est parallèle au cadran, et la hauteur totale du style, comptée du cadran même, est

$$A + R \text{ tang } d;$$

elle peut se calculer et se construire dans toutes les déclinaisons du soleil, pourvu que A surpasse la plus grande valeur négative de R tang d.

Cela fait, on pose le pied du miroir dans l'endroit où l'on veut que le miroir soit placé. Mais au lieu d'établir celui-ci sur son pied, on y substitue le *positeur*, représenté aussi fig. 21. Cet appareil est composé d'une règle YZ à laquelle est adaptée un support VX, qui s'ajuste précisément sur le pied du miroir de manière que le point X répond exactement au centre C de la surface réfléchissante. Ce support peut tourner autour du pied du miroir dans le sens horizontal, et la règle YZ a un mouvement vertical de rotation autour du point X, de manière qu'on peut lui faire prendre dans l'espace toutes les directions et toutes les inclinaisons imaginables. On la tourne dans la direction con-

stante que l'on veut donner au rayon réfléchi; et comme le bras X Z est composé de deux règles mobiles l'une dans l'autre, on lui donne précisément une longueur égale à la distance $\frac{R}{\cos d}$ qui doit exister ce jour-là entre l'extrémité P′ du style C′ P′ de l'horloge, et le point C ou X dans lequel la queue perce la surface du miroir.

La position de l'extrémité Z du positeur étant ainsi déterminée dans l'espace, il ne reste plus qu'à la faire coïncider avec le sommet P′ du style. Pour cet effet, on place l'horloge à côté du positeur, et, autant que possible, de manière qu'elle pose sur un même plan horizontal. Puis, si la distance de l'équateur au zénith dans le lieu de l'observation est Δ, on donne au plan du cadran une inclinaison Δ sur la verticale; après quoi on dirige dans le plan du méridien la ligne de foi F F que l'artiste doit avoir tracée sur le pied de l'horloge, parallèlement à la ligne du cadran qui va de 12^h à 6^h. Cette opération faite, l'horloge est orientée, et le plan du cadran est parallèle à l'équateur. Alors on fait mouvoir l'horloge parallèlement à elle-même, de manière à approcher le sommet P′ du style de l'extrémité Z du positeur, en ayant bien soin que la ligne de foi F F reste toujours parallèle à la méridienne du lieu. Quand ces deux points coïncident, toutes les conditions de distance sont remplies; alors on enlève le positeur, et on y substitue le miroir. On met l'horloge à l'heure, en tournant l'aiguille de manière que l'extrémité de l'ombre du style passe au milieu du tuyau *tt;* ce que l'on vérifie en tournant ce tuyau jusqu'à ce que le rayon solaire passe au travers, et recevant sur un papier l'image du trou au milieu de laquelle la pointe du style doit paraître comme un point noir. Quand cette condition est remplie, on enlève la pièce F F destinée à conduire la queue du miroir; on passe cette queue dans le tuyau *tt,* et l'on replace la queue de la pièce F F à l'extrémité de l'aiguille de l'horloge, dans la cavité qui lui est destinée. Si l'on a bien observé toutes ces conditions, l'horloge guidera le miroir de manière que le rayon réfléchi conservera sensiblement la même direction pendant toute la journée.

Toute la difficulté de l'opération consiste, comme on voit, dans le tâtonnement qu'il faut faire pour amener l'extrémité Z du bras du positeur en contact avec l'extrémité P′ du style : c'est ce tâtonnement que M. Charles a évité de la manière la plus simple, fig. 22. Le pied commun du positeur et du miroir est invariablement uni au pied de l'horloge par un bras horizontal L″ C″, qui peut tourner horizontalement autour du point de jonction C″. La pièce C″ L qui appartient au pied de l'horloge, est parallèle à la ligne méridienne, et de plus, elle est mobile dans le sens de sa longueur, de manière à ce qu'on puisse faire varier la distance du point C″ à la verticale LO, qui passe par le centre du cadran. On détermine chaque jour cette distance par la condition que l'extrémité P′ du style soit verticale au-dessus de C″, quand l'horloge est placée sur un plan horizontal; on se sert pour cela d'une division tracée sur C″ L. La pièce C″ L″ peut également s'allonger ou se raccourcir, et le support du positeur peut se hausser et s'abaisser. Cela posé, quand on a orienté l'horloge, on commence par opérer comme si le rayon réfléchi devait être dirigé dans le plan du méridien qui passe par le style. On tourne donc le bras L″ C″ dans la direction de ce plan, fig. 23, c'est-à-dire qu'on l'amène sur le prolongement de C″ L; puis, après avoir donné au bras XZ du positeur la longueur qu'il doit avoir ce jour-là, et l'inclinaison à l'horizon que l'on veut assigner au rayon réfléchi, on allonge ou on raccourcit C″ L″ jusqu'à ce que l'extrémité Z du positeur se trouve dans la même verticale que le sommet P′ du style; après quoi, il suffit d'élever ou d'abaisser le support du positeur pour que le point Z vienne coïncider tout-à-fait avec le point P′. Telle serait donc la position du pied du miroir et celle de l'horloge, si le rayon réfléchi devait être dirigé dans le méridien. Mais si on veut le diriger dans tout autre plan vertical, sans changer son inclinaison, il n'y a qu'à faire tourner le bras L″ C″ autour du point C″, fig. 22, de manière à l'amener dans ce plan; car dans ce mouvement, le bras XZ du positeur décrit une surface conique circulaire autour du sommet P′ du style, et son extrémité Z ne quitte jamais ce point. Par conséquent, les

conditions de coïncidence qui règlent la queue du miroir et qui rendent le rayon réfléchi immobile, sont toujours satisfaites.

On peut même déterminer chaque jour les longueurs des branches $C''L$, $C''L''$ par le calcul, en supposant qu'on ait tracé sur chacune d'elles une division de parties égales. Commençons par la première. Nous avons nommé A la distance du cadran au sommet du style à l'époque des équinoxes. Supposons que l'artiste projette ce sommet sur la branche $C''L$, et y marque le zéro de la division de cette branche. Maintenant pour tout autre jour déterminé, l'accroissement de longueur du style sera $R \tang d$, R étant le rayon de l'horloge. Or ce style étant perpendiculaire au plan du cadran qui représente l'équateur, il est parallèle à l'axe de rotation diurne du ciel. Par conséquent, l'angle qu'il forme avec l'horizon est précisément égal à la distance de l'équateur au zénith, que nous avons nommé Δ. Ainsi la variation de longueur du style étant $R \tang d$, celle de sa projection horizontale sera $R \tang d \cos \Delta$. Telle est donc la quantité dont il faut faire marcher le point C'' sur la division horizontale $C''L$ pour l'approprier au jour donné.

On aura un résultat semblable pour la division $C''L''$, qui est de même la projection horizontale du bras XZ; mais pour la calculer, il faudra se donner l'inclinaison i du rayon réfléchi sur l'horizon. Alors XZ étant $\frac{R}{\cos d}$, sa projection $C''L''$ sera $\frac{R \cos i}{\cos d}$, ou, ce qui revient au même,

$$R + 2R \frac{\sin \frac{1}{2}(d + i) \sin \frac{1}{2}(d - i)}{\cos d}.$$

Mettons le zéro de la division à une distance R du centre de rotation C''; alors le pied L'' du support devra être placé sur zéro, lorsque d deviendra égal à i; par exemple, à l'époque des équinoxes, si le rayon réfléchi doit être horizontal; après quoi le second terme de la formule exprimera les variations de longueur qu'il faut donner à $C''L''$ pour chaque jour de l'année.

Mais cela ne suffira pas encore pour que l'extrémité Z du positeur coïncide avec le sommet P' du style; il faudra qu'elle

s'élève et s'abaisse en même-temps que lui. Or, puisque le style est incliné sur l'horizon de l'angle Δ, il faut, pour décomposer dans le sens vertical les variations $C'P'$ de sa longueur, les multiplier par $\sin \Delta$; ce qui donne pour leur valeur $R \tang d \sin \Delta$; et l'on voit qu'elles seront successivement positives et négatives, selon la situation du soleil, d'un côté ou de l'autre de l'équateur. Cette expression variable s'ajoute à la hauteur constante $C'\zeta$, que nous nommerons B, et il en résulte $B + R \tang d \sin \Delta$, pour la hauteur verticale de l'extrémité Z du positeur au-dessus du bras horizontal $L''C''$. Si l'on y ajoute $\frac{R \sin i}{\cos d}$, projection du bras XZ du positeur sur la verticale, la somme exprimera la hauteur du centre X du miroir au-dessus de l'horizontale $C''L''$. L'expression de cette hauteur sera donc

$$B + \frac{R(\sin d \sin \Delta + \sin i)}{\cos d}.$$

Ce sera là l'objet d'une troisième division qui sera verticale et adaptée au pied du miroir. Le zéro de celle-ci devra être placé à la hauteur B, qui est celle du centre du miroir, dans les équinoxes, lorsque le rayon réfléchi doit être horizontal; car alors i et d sont nuls.

Au moyen de ces trois divisions, on pourra se passer chaque jour du positeur, et l'on y suppléera par le calcul. Si le rayon réfléchi devait être dirigé dans le méridien, les deux branches $C''L''$, $C''L$ auraient la même direction, et l'on pourrait exprimer les deux variations horizontales par une seule formule, par conséquent les évaluer par une seule division. Mais cela n'aurait plus lieu dans tout autre plan; et alors les trois divisions sont indispensables.

Enfin il faudra aussi que la tige du style soit graduée, et puisse s'enfoncer dans le cadran ou en sortir, afin qu'on puisse lui donner chaque jour la longueur convenable $R \tang d$ à partir du point C'. Mais cette condition n'est nécessaire qu'autant qu'on veut que l'instrument se mette de lui-même à l'heure. Car on pourrait y suppléer, quoique d'une manière plus incommode, en réglant l'aiguille de l'horloge sur un chronomètre.

CHAPITRE V.

Considérations générales sur les forces qui produisent la réflexion de la lumière à la surface des corps.

Lorsqu'on a trouvé les lois expérimentales des phénomènes, il faut tâcher de les ramener à des causes mécaniques, c'est-à-dire d'assigner des systèmes de forces capables de produire les mêmes effets. Car si l'on peut y parvenir, on se trouve élevé à la source même de tous les phénomènes, on en connaît les rapports naturels et nécessaires ; et au lieu de s'embarrasser dans leurs détails, on n'a plus qu'à les envisager dans leurs principes, ce qui est incomparablement plus simple. Essayons d'atteindre ce but dans les phénomènes de la réflexion.

Ces phénomènes, au premier coup-d'œil, semblent n'être que de simples résultats de l'élasticité qui force les molécules lumineuses de se réfléchir à la surface des corps polis, comme une bille d'ivoire se réfléchit sur un plan de marbre, en formant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Mais cette idée, qui se présente la première, et qui a été aussi la première adoptée, ne saurait soutenir l'examen.

Sans connaître les dimensions absolues des molécules lumineuses, nous pouvons aisément comprendre qu'elles doivent être d'une petitesse excessive, et telle que les meilleurs microscopes ne pourraient jamais les agrandir assez pour les faire tomber sous nos sens : s'il en était autrement, comment pourraient-elles traverser, ainsi qu'elles le font, de grandes masses d'eau, de verre, et d'autres substances diaphanes ? Comment pourraient-elles trouver un si libre passage à travers les pores de ces substances, que non-seulement leur vitesse n'en soit pas affaiblie, mais, au contraire, puisse y devenir plus grande, comme nous le prouverons bientôt ? Et enfin quand, avec cette énorme vitesse, elles viennent à chaque instant, par millions,

frapper les membranes si délicates de nos yeux, comment ne les déchireraient-elles pas en mille pièces, et ne nous feraient-elles pas éprouver mille douleurs, si leur excessive ténuité ne rendait leur choc presque insensible? Et quelle ne doit pas être cette ténuité pour qu'elle soit insensible en effet! Mais, d'après cela, je demande quelle proportion il peut y avoir entre la petitesse de ces corpuscules et les dimensions des aspérités qui restent encore à la surface des corps polis par notre art. Je demande si, sous ce rapport, il y a quelque différence entre ceux que nous appelons polis et ceux qui ne le sont pas. Car, pour polir les corps, nous ne faisons que les frotter et les ratisser avec de petites poussières dures qui abattent leurs aspérités les plus fortes, en les sillonnant dans tous les sens. Mais les particules de ces poussières, que nous pouvons aisément apercevoir au microscope, ou même découvrir avec nos yeux, ne sont-elles pas des masses immenses, comparativement aux dimensions des particules de la lumière? et les sillons qu'elles laissent sur les corps ne doivent-ils pas être aussi d'une immense profondeur? Si donc la lumière se réfléchissait à la manière des corps élastiques, en frappant contre la surface même des corps, les petites particules qui la composent devraient se détourner dans tous les sens sur les élévations des corps, et se perdre dans leurs profondes cavités; et la réflexion sur les corps les mieux polis par notre art ne devrait guère être moins grossière que sur les corps les plus raboteux. Mais puisqu'au contraire, elle y est incomparablement plus abondante, plus régulière et plus parfaite, c'est une preuve que les choses ne se passent point comme dans la réflexion mécanique des corps élastiques, et que les particules lumineuses qui se réfléchissent n'arrivent pas jusqu'au contact des corps.

La force qui les repousse agit donc hors de cette surface à distance. De plus, elle agit en général d'une manière inégale sur les diverses molécules d'un même rayon. Car, dans la plupart des cas où la réflexion a lieu, une portion de la lumière incidente est réfléchie, et l'autre transmise, soit que la force répulsive éprouve réellement dans son action des intermittences

qui la rendent tantôt plus énergique et tantôt plus faible; soit, ce qui paraît plus probable, que toutes les molécules lumineuses qui se suivent sur un même rayon ne se trouvent pas, au moment de leur incidence, dans les mêmes circonstances physiques, et également susceptibles d'être repoussées.

Quant à la nature même de la force réfléchissante, elle nous est tout-à-fait inconnue. Nous ne savons pas si elle appartient réellement aux particules des corps, ou à celles de la lumière; si elle s'exerce réellement par répulsion ou par attraction; et, à ne considérer que ses effets généraux, on pourrait imaginer une foule de conceptions mécaniques propres à la représenter. Mais, sans rien prononcer sur ce sujet, nous pouvons toujours l'assimiler à une force répulsive qui s'exerce à partir de la surface d'incidence, et qui tend à repousser un certain nombre des particules dont se composent les rayons incidens.

Figurons-nous donc que la ligne onduleuse AB, fig. 24, représente la surface plane d'un corps hérissé de ses aspérités naturelles ou de celles que ne peut lui ôter l'art, et concevons que tous les points de cette surface, ou, plus généralement, des deux milieux contigus qui la composent, exercent à distance une force répulsive sur les molécules lumineuses qui s'en approchent. Cette force devra être très-énergique à la distance où la réflexion s'opère, puisqu'elle est alors capable de détruire l'énorme vitesse dont les molécules lumineuses sont animées, et de leur faire ensuite rebrousser chemin en sens contraire; mais, comme toutes les autres forces chimiques, elle devra s'affaiblir rapidement, à mesure que la distance augmentera. Car, si l'on diminue l'épaisseur du corps réflecteur, en usant peu à peu sa seconde surface A′ B′ sans toucher à la première, la régularité de la réflexion et la quantité de lumière réfléchie ne sont nullement altérées, à moins qu'on ne réduise le corps à un degré de ténuité extrême, et tel qu'il est très-difficile à l'art de l'atteindre. Ainsi toutes les molécules situées à une profondeur plus grande que cette limite ne peuvent pas étendre leur influence répulsive jusqu'à la surface réfléchissante, ou du moins jusqu'à la distance de cette surface où se fait la réflexion; et,

puisque la force qu'elles exercent, si énergique dans les petites distances, s'affaiblit de cette manière jusqu'à devenir insensible à une petite profondeur, il en résulte nécessairement qu'elle décroît par l'effet de la distance avec une extrême rapidité.

Concevons maintenant qu'un faisceau de rayons lumineux parallèles SM, SM′ arrive dans une direction quelconque sur la surface réfléchissante AB, supposée d'une étendue indéfinie, et considérons ce qui arrive aux particules lumineuses MM′, quand elles en sont assez voisines pour commencer à éprouver l'action répulsive des particules du corps. Si la surface est parfaitement plane, comme AB, fig. 25, ou si ses inégalités sont insensibles par rapport à la distance à laquelle s'étend la force répulsive, l'énergie de cette force sera la même dans toutes les parties de la surface, et par conséquent la réflexion s'opérera de la même manière sur toutes celles des particules lumineuses MM′, dont les directions, les vitesses et les dispositions seront égales. Voilà le cas des corps polis; mais si la surface réfléchissante est hérissée de très-grandes élévations, comme EE′E″, fig. 26, séparées par des cavités profondes FF′, l'intensité de la force répulsive ne pourra pas être égale dans tous ces points. On devra concevoir, par exemple, que les molécules lumineuses qui pénètrent dans les cavités ne se réfléchissent pas dans la même direction que celles qui arrivent sur le flanc incliné des élévations, ni celles qui arrivent sur les flancs, comme celles qui rencontrent les sommets. Bien plus, il pourra encore se faire que celles qui s'engagent dans les cavités ne puissent plus se réfléchir au-dehors, étant repoussées en dedans par les répulsions émanées des sommets. Un tel arrangement ne peut donc produire qu'une réflexion faible et irrégulière, comme celle qui s'opère à la surface des corps non polis; et pour que cela arrive, il n'est pas nécessaire que les inégalités de la surface soient assez grossières pour être aperçues au tact, ou pour porter des ombres sensibles les unes sur les autres; il suffit que leurs dimensions soient sensibles, comparativement à la distance à laquelle les forces répulsives s'étendent. Telle est l'idée que nous devons

avoir, par exemple, des verres plans qui n'ont pas encore reçu le poli. Ils sont plans, si l'on ne considère que la direction générale de leur surface, et l'on ne pourrait ni mesurer la hauteur de leurs aspérités, ni trouver des pointes assez fines pour les enfoncer dans les cavités qui les sillonnent; mais ces inégalités sont encore trop fortes pour la lumière, et les oppositions qui en résultent dans la direction des forces répulsives affaiblissent la répulsion générale de la surface en même temps qu'elles la rendent irrégulière. Pour remédier à cet inconvénient, on tâche d'abattre ces inégalités, ou au moins de les adoucir, en frottant la surface du verre avec des corps dont les aspérités propres puissent aisément être détruites, comme le papier ou le taffetas tendus et rendus lisses par le frottement; mais on arriverait encore au même but, si l'on diminuait la vitesse des molécules lumineuses que la répulsion de la surface est obligée de vaincre pour opérer la réflexion. Or c'est à quoi l'on parvient en rendant la direction des rayons plus oblique sur la surface réfléchissante, de manière qu'ils forment un plus petit angle avec sa direction. Car si l'on conçoit la vitesse des molécules lumineuses décomposée en deux directions rectangulaires, dont l'une soit parallèle à la surface réfléchissante et l'autre lui soit perpendiculaire, il est évident que celle-ci sera la seule que la répulsion de la surface doive surmonter, et il sera facile de voir qu'elle diminue à mesure que les rayons incidens deviennent plus obliques. En cela donc l'obliquité doit favoriser la réflexion; mais elle la facilite encore en ce que les molécules lumineuses pénètrent moins directement dans les cavités de la surface du corps réflecteur, et sont au contraire plus exposées à l'action de ses sommets; lesquels, formant une surface sensiblement plane, puisque le corps a été ainsi travaillé, produisent une force répulsive uniforme dans toute l'étendue de sa superficie. Aussi éprouve-t-on par expérience que la réflexion s'opère sur les verres dépolis comme sur les autres, lorsqu'on y reçoit les rayons lumineux sous de grandes inclinaisons. Pour bien faire cette expérience, il faut regarder ainsi par réflexion la flamme d'une bougie. Quand le verre réflecteur est bien poli, la réflexion

régulière s'opère sous toutes les incidences; s'il est imparfaitement poli, elle est faible, ou même nulle sous l'incidence perpendiculaire; mais elle augmente peu à peu à mesure que les rayons deviennent plus obliques, et elle devient bientôt aussi forte que sur tout autre verre poli. Enfin, si la surface a été simplement *doucie*, mais nullement polie, on n'aperçoit point du tout de réflexion régulière depuis l'incidence perpendiculaire jusqu'à un certain degré d'obliquité; alors on commence à voir par réflexion des images régulières d'une intensité très-faible. Cette intensité s'augmente avec l'obliquité, et la réflexion finit par devenir aussi parfaite que sur les verres du plus beau poli.

La condition de la réflexion que nous venons d'établir sur la destruction de la partie de la vitesse, qui est perpendiculaire à la surface, pourrait donner lieu à un doute qu'il est nécessaire de prévenir. Car cette vitesse étant nulle d'elle-même pour toutes les molécules lumineuses, quand les rayons incidens sont parallèles à la surface du corps, il semble qu'alors toute la lumière incidente devrait être réfléchie; tandis qu'au contraire on sait par l'expérience que, dans ce cas même, une très-grande partie est attirée par le corps, et réfractée, s'il est diaphane, ou absorbée, s'il est opaque. Pour concilier ces deux résultats, en apparence contradictoires, il faut avoir égard à une particularité que nous avons déjà indiquée plus haut, et que nous établirons rigoureusement par la suite; c'est que toutes les molécules qui composent un rayon de lumière rectiligne, quoique ayant une vitesse de translation égale, ne sont pas également disposées à subir la réflexion; parce qu'elles éprouvent dans leurs propriétés physiques elles-mêmes des intermittences périodiquement réglées, qui, comme des aimantations passagères, tantôt les rendent plus propres à être attirées par les surfaces des corps, et tantôt les disposent à en être repoussées. Or, tout ce que nous avons exposé sur les effets de la répulsion ne doit être appliqué qu'aux particules lumineuses qui se trouvent actuellement dans ce dernier état, et qui subissent effectivement la réflexion. Car pour les autres, ou elles échappent entièrement à l'action des forces répulsives, en vertu de la disposition où

••

elles se trouvent, ou elles en sont successivement déviées en deux sens contraires, avant et après leur passage à travers la surface réfringente; car leur direction définitive, dans le milieu qu'elles pénètrent, n'en est nullement affectée, comme nous le prouverons également.

En bornant donc nos considérations aux seules molécules qui sont actuellement réfléchies, essayons de fixer géométriquement les circonstances générales de leur marche, d'après la seule condition de l'existence d'une force répulsive; et pour simplifier la question, supposons la surface réfléchissante plane. Soit alors M, fig. 27, la position d'une particule lumineuse qui, se mouvant dans le vide, arrive vers la surface suivant la direction SI, et commence à en éprouver la force répulsive : représentons la vitesse propre de cette particule par IM, et décomposons-la comme tout-à-l'heure en deux autres rectangulaires, dont l'une IN soit normale à la surface réfléchissante AB, et l'autre MN lui soit parallèle. Or, puisque la surface réfléchissante est supposée parfaitement plane, il est clair que la résultante des forces répulsives qui en émanent sera toujours dirigée perpendiculairement à sa direction, et par conséquent perpendiculaire à MN; car, à cause de la petite distance à laquelle cette force est sensible, on peut, comme dans la théorie de l'action capillaire, supposer qu'elle émane d'un plan indéfiniment étendu, et alors il n'y a aucune raison pour qu'elle soit inclinée sur le plan plutôt d'un côté que de l'autre; elle lui sera donc perpendiculaire, et il n'y aura d'exception à cela que sur les dernières extrémités des bords où la surface se termine; lesquels forment une étendue infiniment petite, qui devra être considérée à part. Or, puisque dans tout le reste de la surface la force répulsive est perpendiculaire à MN, il s'ensuit que, pendant tout le trajet des particules lumineuses, la portion MN de la vitesse qui est parallèle à la surface subsistera toute entière, sans éprouver ni accroissement, ni diminution. Mais il n'en sera pas de même de la vitesse IN qui est normale à la surface. Celle-ci est directement opposée à la force répulsive, et elle en sera immédiatement combattue, d'abord faiblement, lorsque la distance sera telle que la force répulsive

commence d'agir; mais ensuite avec une intensité croissante, jusqu'à ce qu'enfin tout le mouvement de la particule lumineuse dans ce sens soit entièrement détruit. Quand cela aura lieu, la particule lumineuse ne pourra pas aller plus avant, et la force répulsive, agissant désormais seule sur elle, l'obligera de rétrograder, et lui rendra progressivement de distance en distance tous les degrés de vitesse qu'elle lui avait ôtés d'abord, jusqu'à ce qu'enfin la particule, se trouvant assez éloignée de la surface pour que l'action de la force répulsive sur elle soit désormais insensible, continue pour toujours son mouvement en ligne droite avec les vitesses qu'elle a recouvrées.

Ainsi, depuis le premier instant où la particule lumineuse commence à sentir l'action de la force répulsive jusqu'à l'instant où elle parvient à la plus petite distance de la surface réfléchissante, elle est sollicitée par deux vitesses, dont l'une M N est constante et parallèle à la surface, tandis que l'autre, perpendiculaire à cette même surface, est égale à l'excès de M I, sur l'intensité de la force répulsive à la distance où la particule se trouve. Si cette force n'éprouve point d'intermittences dans son mode d'action, la vitesse I N sera perpétuellement retardée. Alors, d'après les principes de la mécanique, la molécule lumineuse décrira une première branche de courbe convexe vers la surface, laquelle aura d'abord pour tangente la direction primitive de la particule, et se terminera au point *s*, où la vitesse perpendiculaire à la surface est entièrement détruite. Mais si la force répulsive éprouve dans son mode d'action des intermittences qui la rendent plus faible à certaines distances plus petites, ce qui n'est pas sans quelque probabilité, la trajectoire décrite par la molécule lumineuse devra être onduleuse, comme le représente la fig. 28, jusqu'à ce qu'enfin son mouvement devienne parallèle à la surface en *s*, où elle n'est plus sollicitée que par la vitesse constante M N. Après cette époque, la molécule, toujours repoussée, commencera à s'éloigner de la surface avec une vitesse continuellement ou périodiquement accélérée; et comme sa vitesse, parallèlement à la surface, est toujours constante, il s'ensuit qu'elle décrira une seconde branche de courbe

convexe ou onduleuse vers la surface comme la première, mais toujours symétrique avec elle, puisque les forces qui sollicitent la particule sont les mêmes à égales distances de la surface de part et d'autre du point s. D'après la symétrie de la courbe, la dernière tangente R′ T′ fera avec la surface réfléchissante le même angle que la première; et comme la distance à laquelle la force répulsive commence et finit d'être sensible est extrêmement petite, la portion curviligne de la trajectoire renfermée dans les mêmes limites sera fort petite également; de sorte que la réflexion semble s'opérer brusquement en un point s à l'intersection commune du rayon incident avec le rayon réfléchi.

Jusqu'ici nous avons considéré le corps réflecteur comme existant seul et isolé dans le vide. Ainsi nous avons pu attribuer toute la réflexion à la seule puissance répulsive de ses particules. Mais si nous le supposons environné d'air ou d'eau, ou de tout autre milieu matériel, nous devrons pareillement concevoir que les particules de ce milieu exercent sur la lumière des actions analogues. Alors que devra-t-il arriver? Pour le savoir, considérons une particule lumineuse parvenue dans le premier milieu, à une certaine distance de la surface commune. Nous pourrons toujours décomposer par la pensée l'action, soit attractive, soit répulsive, des molécules du second milieu en deux parties M et M′ — M, dont l'une M soit égale à celle qu'exercent à pareille distance les molécules du premier milieu, et dont l'autre M′ — M soit l'excès de l'action du second milieu sur celle du premier. Or, si le second milieu ne possédait que la force M, il arriverait la même chose que s'il ne se faisait pas de changement de milieu; et les molécules lumineuses, également sollicitées dans tous les sens, continueraient leur route avec la vitesse qu'elles auraient précédemment acquise. C'est le cas des milieux homogènes, comme l'eau ou le verre, dans l'intérieur desquels il ne s'opère en effet aucune réflexion. L'effet de cette première partie se détruit donc toujours de lui-même, et il ne reste plus à considérer que l'excès de l'action du second milieu, ce qui rentre dans le cas que nous avons d'abord examiné.

Quant à la valeur plus ou moins considérable de cette diffé-

rence, l'expérience prouve qu'elle ne dépend pas de la densité seule; car nous verrons bientôt des milieux aussi denses que d'autres, ou même moins denses, et qui agissent sur la lumière avec plus d'énergie. Tout cela est conforme au cours ordinaire des phénomènes; car si l'action des corps sur la lumière et de la lumière sur les corps est analogue aux affinités chimiques, il est naturel qu'elle dépende de la nature chimique des particules.

D'après ce que nous venons de dire, on conçoit qu'il doit être possible de former artificiellement des milieux hétérogènes, dans l'intérieur desquels il ne se produise pourtant aucune réflexion. C'est ce qui a lieu, par exemple, quand on colle l'un à l'autre deux morceaux de verre au moyen d'une couche d'huile de térébenthine épaissie; car si la jonction est bien faite, on n'aperçoit point du tout la surface de séparation des deux verres, et il ne s'y fait aucune réflexion. L'huile de térébenthine agit donc dans cette circonstance comme le verre lui-même; aussi est-il indifférent que les surfaces par lesquelles les verres se regardent soient polies ou dépolies. Dans ce dernier cas, le liquide remplissant toutes leurs cavités, y remplace les particules de verre qui manquent, et leur donne un poli plus parfait que celui de l'art. On a un autre exemple de cette propriété, en jetant dans de l'huile d'olive des morceaux irréguliers de borax; car ces morceaux, à cause de leurs inégalités et du défaut de poli de leur surface, ne transmettent pas régulièrement la lumière lorsqu'ils sont plongés dans l'air; mais ils deviennent parfaitement limpides quand ils sont plongés dans l'huile d'olive, parce qu'elle compense toutes leurs inégalités; et il se fait si peu de réflexion à la surface commune de ces deux substances, qu'on a peine à distinguer les limites de leur séparation.

On conçoit donc qu'un corps transparent par lui-même pourrait l'être beaucoup moins, et même devenir opaque, si l'on éloignait ses particules les unes des autres, et qu'on insinuât entre leurs interstices un milieu dont l'action sur la lumière fût différente. C'est ce qui arrive, par exemple, dans les liquides diaphanes que l'on fait mousser en y introduisant

de l'air; car il n'y a aucun doute que l'action de l'air et de ces liquides sur la lumière est très-différente; puisque, quand leur surface est recouverte d'air, il s'y produit encore une vive réflexion. Ainsi, en insérant cet air entre les particules du liquide, on produit autant de réflexions successives que l'on forme de vacuoles qui troublent la continuité du liquide; et ces réflexions repoussant enfin toute la lumière incidente ou la disséminant dans l'intérieur du corps, il cesse d'être transparent et devient opaque; mais il redeviendrait transparent de nouveau, si on rétablissait la contiguité de ses parties; et c'est ce qui arrive à l'écume, lorsqu'en perdant son air, elle repasse à l'état d'eau. Cela se voit encore dans une pierre poreuse, nommée *hydrophane*, qui, lorsqu'elle est sèche, est parfaitement opaque; mais qui devient translucide quand elle est imbibée d'eau, parce que son action sur la lumière approche plus de celle de l'eau que de celle de l'air : d'où l'on voit que la transparence et l'opacité des corps ne sont point des qualités propres à la matière même des corps, mais dépendent uniquement de l'arrangement de leurs particules. C'est ce qui sera confirmé d'une manière encore plus frappante quand nous étudierons par l'expérience la manière dont la force répulsive naît et s'augmente avec l'épaisseur des corps, jusqu'à la limite à laquelle l'addition de nouvelles couches cesse d'avoir une influence sensible sur la répulsion.

DIOPTRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Lois générales de la Réfraction simple.

Nous venons d'examiner ce qui arrive à la portion de lumière incidente qui se réfléchit sur la première surface des corps. Suivons maintenant celle qui pénètre dans leur intérieur.

Celle-ci, lorsque l'incidence est oblique, ne continue pas sa route en ligne droite; elle se dévie de sa direction, et ce phénomène s'appelle *la réfraction de la lumière.*

Dans tous les corps non cristallisés, le rayon réfracté est simple et suit le prolongement du plan d'incidence. Quant à l'étendue de la déviation, elle dépend de la différence qui existe entre la densité et la nature du milieu que la lumière quitte, et de celui où elle entre.

Si les deux milieux sont homogènes et de densité égale, la réfraction est nulle, et le rayon continue sa route en ligne droite. S'ils sont de même nature, mais différens par la densité, le rayon lumineux, en entrant dans le plus dense, s'approche de la normale à leur surface commune. Enfin, si la nature et la densité des milieux diffèrent, ces deux élémens concourent au phénomène, et le rayon se rapproche de la normale dans le milieu dont l'action sur la lumière est plus forte. Etablissons d'abord ces faits par l'expérience.

Lorsque l'on place une pièce de monnaie M au fond d'un vase AB, fig. 29, dont les parois sont opaques, on ne peut apercevoir cette pièce que lorsqu'on se place dans le cône de rayons directs RR′ qui en émane, et qui est limité en A et B par les bords du vase. Mais si l'on remplit le vase de liquide, la pièce M devient visible dans un cône beaucoup plus ouvert, tel, par

exemple, que O S O′. Cependant le cône de rayons qui émane du point M est toujours le même que précédemment. Ces rayons se courbent donc en dehors du vase en entrant dans l'air; par conséquent ils s'éloignent de la normale A N menée à la surface commune du liquide et de l'air; mais ils restent toujours dans le même plan vertical qui contient le rayon incident A M et la normale A N.

Voici un autre exemple non moins familier. Lorsque l'on plonge obliquement un bâton droit T T′ dans une eau tranquille dont la surface est A B, fig. 30, ce bâton paraît brisé au point I, où il pénètre le liquide; et la partie plongée, quoique comprise dans le même plan vertical que celle qui est au-dehors, semble se rapprocher davantage de l'horizontalité. Pour développer les conséquences de cette observation, supposons que l'œil soit placé au point T, c'est-à-dire à l'extrémité même du bâton dans l'air. Si les rayons qui partent du liquide lui parvenaient en ligne droite, il devrait voir l'autre bout T′ sur le prolongement de T; au lieu qu'il le voit relevé, par exemple, en T″. Or, nous avons déjà remarqué que nous rapportons les objets sur le prolongement des rayons lumineux qu'ils nous envoient; puis donc que nous voyons le point T′ plus haut qu'il n'est réellement, il faut que le rayon T′ I′ qui nous le rend visible passe au-dessus de T′ I, et suive une direction brisée telle que T′ I′ T. Par conséquent, si l'on mène du point d'incidence I′ la normale N′ I′ à la surface A B, on voit que le rayon lumineux T′ I′, en sortant du liquide pour entrer dans l'air, s'est éloigné de cette normale comme dans l'exemple précédent; mais il est resté dans le même plan vertical qui contenait l'angle d'incidence.

La déviation aurait lieu en sens contraire, si le rayon passait de l'air dans l'eau; alors il se rapprocherait de la normale. Pour le prouver, prenez une cuve de forme rectangulaire, dont les parois soient en verre, et dont A B C D, fig. 31, représente une coupe horizontale; puis, après l'avoir remplie d'eau, faites tomber obliquement sur la paroi A B un rayon de lumière horizontal S I dirigé par un héliostat. Alors, si vous fermez les volets pour rendre la chambre obscure, il vous sera facile

de trouver la direction du rayon réfracté I R. Car il suffit pour cela de promener sur la paroi C D, opposée au point d'incidence, un petit cercle de carton ou de verre dépoli, jusqu'à ce que vous interceptiez le rayon émergent. Quand vous aurez trouvé ce point R, si vous menez R I au point d'incidence, ce sera la direction du rayon réfracté ; et en la comparant à celle du rayon incident S I, vous verrez aussitôt que la réfraction l'a rapproché de la perpendiculaire I N' menée du point I à la surface d'incidence A B.

Le phénomène étant ainsi bien constaté, il importe de savoir quel rapport existe sous chaque incidence entre l'obliquité du rayon incident sur la normale et celle du rayon réfracté, afin que l'on puisse calculer l'une de ces directions, l'autre étant connue. Pour cela, il faut nécessairement mesurer les angles dont il s'agit. En conséquence, on prendra sur la direction du rayon incident une longueur arbitraire I S ou a, à partir du point d'incidence ; puis, menant I N perpendiculaire à la surface réfringente, et S N perpendiculaire à I N, on mesurera la distance S N, que nous nommerons h. Alors le rapport $\frac{h}{a}$ exprimera le sinus de l'angle S I N, que l'on appelle l'*angle d'incidence*, et que nous désignerons par I. En opérant de même sur le rayon réfracté, on connaîtra I R, que nous nommerons a', et R N', que nous nommerons h' ; alors le rapport $\frac{h'}{a'}$ exprimera le sinus de l'angle RIN', que l'on nomme *l'angle de réfraction*, et que nous désignerons par R. Cela posé, on trouve que *le rayon incident et le rayon réfracté sont toujours compris dans un même plan normal à la surface d'incidence ;* de plus, si le milieu réfringent et le milieu ambiant ne changent point, *le sinus de l'angle d'incidence et le sinus de l'angle de réfraction sont entre eux dans un rapport constant,* c'est-à-dire que l'on a toujours

$$\sin I = n \sin R,$$

n étant une constante qui dépend de la nature des deux milieux et de leur densité : on la nomme *le rapport de réfraction.* Lorsque le rayon, en entrant dans le second milieu, doit s'appro-

cher de la perpendiculaire à leur surface commune, l'angle d'incidence I est plus grand que l'angle de réfraction R. Alors n est plus grand que l'unité. Ceci a lieu, par exemple, quand la lumière passe de l'air dans l'eau; mais si le rayon doit s'écarter de la perpendiculaire, l'angle de réfraction devient plus grand que l'angle d'incidence, et n est moindre que 1. Cela a lieu, par exemple, quand la lumière passe de l'eau dans l'air.

La découverte de cette belle propriété est due à Descartes. C'est le principe fondamental de toute la dioptrique. En effet, lorsque la direction des rayons incidens sera donnée, ainsi que la position de la surface réfringente, on en pourra toujours déduire la direction des rayons réfractés, soit immédiatement, si la surface est plane, soit lorsqu'elle sera courbe, en considérant l'incidence comme ayant lieu sur son plan tangent. Après quoi, si la forme du milieu réfringent est donnée, on pourra, en suivant le rayon dans son intérieur, déterminer le point où il se présentera pour en sortir, ainsi que l'angle qu'il formera alors avec le plan tangent; d'où l'on conclura de nouveau l'angle d'émergence et la direction du rayon après sa sortie.

La fécondité de ce principe exige donc que nous cherchions à le constater avec la dernière exactitude, et c'est ce que nous allons faire. Mais auparavant nous devons signaler un phénomène remarquable qui accompagne toujours l'acte de la réfraction.

Ce phénomène consiste en ce que le rayon réfracté se dilate dans le plan de réfraction, et s'y *disperse* dans un espace angulaire dont le sommet est au point d'incidence. Cet angle est alors rempli de rayons de diverses couleurs; car en y plaçant un carton blanc ou un verre dépoli, qui intercepte toute la lumière réfractée, on voit se peindre sur leur surface un spectre oblong, où l'on distingue principalement le violet et le rouge sur les extrémités, le vert et le jaune au milieu, de même que dans les iris qui se forment sur les nuées. Les rayons violets subissent la plus grande réfraction, les rouges la plus petite, et les verts une réfraction intermédiaire. Pour abréger, je désigne ici ces rayons par les couleurs dont ils teignent les corps. Il est évident d'ailleurs qu'ils ne sont en eux-mêmes ni

violets, ni verts, ni rouges, et que ces dénominations expriment seulement les impressions particulières qu'ils produisent en nous.

Ce phénomène se nomme *la dispersion de la lumière;* il est d'autant plus sensible dans un même milieu, que l'angle de réfraction y est plus grand; et dans les différens milieux, il est d'autant plus grand, à incidence égale, que la réfraction y est plus forte. On ne peut pas faire d'expérience sur la réfraction, sans qu'il se produise, et c'est pourquoi j'ai voulu dès à présent l'indiquer Mais nous remettrons plus loin à l'étudier en détail, et dans tout ce qui va suivre, je supposerai que l'on se borne à observer la réfraction des rayons jaunes ou des rayons verts, qui sont à peu près intermédiaires entre tous les autres.

Je dois aussi annoncer qu'il existe des substances dans lesquelles la lumière ne se réfracte pas en un seul faisceau, mais en deux, dont un seul suit la loi découverte par Descartes. La marche de l'autre faisceau est assujettie à une loi beaucoup plus compliquée, qui a été déterminée par Huyghens : nous l'exposerons plus tard. Pour le moment, nous nous bornerons à considérer la première espèce de réfraction qui s'opère dans tous les corps, et que l'on nomme *réfraction ordinaire*. L'autre, que l'on appelle *réfraction extraordinaire*, ne s'observe que dans les corps cristallisés, et encore dans ceux dont la forme primitive n'est ni un cube, ni un octaèdre régulier.

Détermination exacte du rapport de Réfraction dans les substances solides.

La manière dont nous avons tout-à-l'heure mesuré le rapport de réfraction et reconnu sa constance ne peut être considérée que comme une approximation propre à indiquer la loi générale du phénomène. Il faut maintenant l'établir avec exactitude. Le moyen le plus simple d'y parvenir, c'est de construire un prisme droit triangulaire avec la substance diaphane que l'on veut observer, de mesurer ensuite les déviations qu'un rayon lumineux éprouve en traversant ce prisme sous diverses incidences, et de voir si elles peuvent toutes se calculer d'après un rapport constant de réfraction.

Soit ABC, fig. 32, une section faite dans le prisme par un plan perpendiculaire à ses arêtes. Dans ce plan concevons un rayon lumineux SI qui tombe sur la surface du prisme au point I, et se réfracte suivant II′. D'après la première loi de la réfraction, les deux droites SI, II′ doivent être dans un même plan perpendiculaire à la surface réfringente; elles resteront donc dans le plan de la section ABC qui remplit ces conditions. Le rayon réfracté, après avoir traversé la substance du prisme, rencontrera en I′ la seconde surface, et s'y réfractera de nouveau en repassant dans l'air suivant une direction I′O qui sera encore comprise dans le plan de la section ABC. Alors un observateur qui serait placé sur un point quelconque de cette direction, tel que O, recevrait à la fois le rayon réfracté I′O et le rayon direct OS mené à l'objet lumineux. Si la lumière n'éprouvait aucune déviation en traversant le prisme, ces deux rayons se confondraient en un seul. Leur écart SOI′ est donc causé par la réfraction que le premier a éprouvée; ainsi, dans chaque position donnée de l'objet lumineux du prisme et de l'observateur, la déviation SOI′ dépendra directement de la loi de la réfraction; de sorte que, pour éprouver celle qu'a indiquée Descartes, il n'y a qu'à l'employer pour le calcul, et en comparer les résultats à l'observation.

Désignons par φ l'angle que le rayon incident forme avec la surface du prisme *vers sa base*, et par φ_1 l'angle opposé, formé par le rayon réfracté sur la même surface; puis, employant la même notation pour la seconde surface, désignons de même par φ_2 l'angle que le rayon réfracté forme avec elle vers la base du prisme, et par φ_3 l'angle opposé, formé sur la même surface par le rayon émergent; de cette manière, les angles seront comptés alternativement, à partir de la base du prisme, ou à partir du sommet; et la même notation pourrait servir pour un nombre quelconque de surfaces réfringentes planes, disposées à la suite les unes des autres.

Cela posé, puisque nous voulons vérifier la loi de Descartes, il faut admettre que les sinus des angles d'incidence et de réfraction comptés de la normale à chaque surface ont entre eux un

rapport constant que nous pouvons désigner par n. Relativement à la première surface, ces angles seront $90^\circ - \varphi$, et $90^\circ - \varphi_1$, en supposant φ moindre qu'un angle droit; alors on aura $\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1}$ pour le rapport de leurs sinus. Dans le cas où φ serait plus grand qu'un angle droit, l'angle d'incidence compté de la normale serait $\varphi - 90^\circ$; mais aussi l'angle de réfraction aurait pour valeur $\varphi_1 - 90^\circ$. De sorte qu'on aurait encore $\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1}$ pour le rapport de leurs sinus. La même chose arrivera pour la seconde surface, et le rapport des sinus d'incidence et de réfraction y sera toujours $\frac{\cos \varphi_3}{\cos \varphi_2}$, en mettant toujours au numérateur du rapport celui des deux angles qui a lieu dans l'air. Or, puisque ce rapport doit être constant dans toutes les incidences, et le même à l'entrée de la lumière dans le prisme qu'à sa sortie, on devra avoir également

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1} = n \qquad \frac{\cos \varphi_3}{\cos \varphi_2} = n.$$

Jusqu'ici nous n'avons pas encore introduit l'angle réfringent du prisme, c'est-à-dire B A C, que nous désignerons par a. Cependant il est clair qu'il influe sur la déviation du rayon par l'inclinaison qu'il donne à la seconde surface sur le rayon réfracté; aussi est-il lié avec les angles φ_1 et φ_2. Car, dans le triangle I A I′, l'angle φ_2 est extérieur, et l'on a par conséquent

$$\varphi_2 = a + \varphi_1,$$

condition que nous réunirons aux deux autres en cette forme

$$\cos \varphi = n \cos \varphi_1 \qquad \varphi_2 = a + \varphi_1 \qquad \cos \varphi_3 = n \cos \varphi_2. \qquad (1)$$

La première fera connaître φ_1, quand l'incidence φ sera donnée, ainsi que le rapport de réfraction n; φ_1 étant connu, comme l'angle a du prisme est donné, la seconde fera connaître φ_2; et enfin φ_2 étant connu, la dernière déterminera l'angle d'émergence φ_3.

Il faut maintenant lier ce dernier angle avec la déviation S O I′ qui en résulte; car celle-ci, pouvant s'observer, servira

de condition pour déterminer n. Or, cette liaison se présente d'elle-même ; car la figure SII′O étant un quadrilatère, la somme de ses angles intérieurs doit être égale à quatre angles droits. Nommons donc Δ la déviation SOI′, et δ l'angle ISO. Ce dernier étant formé par le rayon direct SO avec le rayon incident SI, est donné d'après la position de l'objet, de l'observateur et du point d'incidence. Les deux autres angles du quadrilatère sont $\phi + 180° - \phi_1$; $\phi_2 + 180° - \phi_3$. On aura donc

$$\delta + \phi + 180° - \phi_1 + \phi_2 + 180 - \phi_3 + \Delta = 360°.$$

Effaçant 360° de part et d'autre, et mettant pour $\phi_2 - \phi_1$ sa valeur a, il vient

$$\delta + \phi + a + \Delta - \phi_3 = 0,$$

ce qui donne $$\phi_3 = \phi + \Delta + \delta + a \qquad (2).$$

Au moyen de cette équation, ϕ_3 sera entièrement connu en fonction des données du problème et de la déviation observée Δ. Il ne restera donc plus qu'à connoître ϕ_2 pour avoir n, qui est égal à $\frac{\cos \phi_3}{\cos \phi_2}$. Or, la détermination de ϕ_2 s'obtiendra de la manière suivante.

Substituons dans la première des équations (1) pour ϕ_1 sa valeur tirée de la seconde, et combinons-la avec la troisième, nous aurons

$$\cos \phi = n \cos (\phi_2 - a),$$
$$\cos \phi_3 = n \cos \phi_2.$$

Retranchant et ajoutant tour à tour ces équations, il viendra

$$\cos \phi_3 - \cos \phi = n [\cos \phi_2 - \cos (\phi_2 - a)],$$
$$\cos \phi_3 + \cos \phi = n [\cos \phi_2 + \cos (\phi_2 - a)].$$

Divisant ces dernières membres à membres, n disparaît, et il reste

$$\frac{\cos \phi_3 - \cos \phi}{\cos \phi_3 + \cos \phi} = \frac{\cos \phi_2 - \cos (\phi_2 - a)}{\cos \phi_2 + \cos (\phi_2 - a)}.$$

Or, on a en général

$$\frac{\cos p - \cos q}{\cos p + \cos q} = - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (p + q) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (p - q).$$

Ainsi l'équation précédente étant transformée de cette manière, deviendra

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\phi_3 + \varphi) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varphi_3 - \varphi) = \operatorname{tang}(\varphi_2 - \tfrac{1}{2}a) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}a.$$

Le premier membre ne renferme plus que des quantités connues. Le second ne contient d'inconnue que tang ϕ_2. Il déterminera donc cette quantité ; mais auparavant remarquons que, d'après la valeur de φ_3 donnée par l'équation (2), on a

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi) = \varphi + \tfrac{1}{2}(\Delta + \delta + a);$$
$$\tfrac{1}{2}(\varphi_3 - \varphi) = \tfrac{1}{2}(\Delta + \delta + a).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation qui donne φ_2, tous les résultats du problème seront renfermés dans les formules

$$\operatorname{tang}(\varphi_2 - \tfrac{1}{2}a) = \frac{\operatorname{tang}[\phi + \frac{1}{2}(\Delta + \delta + a)] \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\Delta + \delta + a)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a};$$

$$\varphi_3 = \phi + \Delta + \delta + a; \qquad n = \frac{\cos \phi_3}{\cos \phi_2}. \qquad (3)$$

La première fera connaître $\varphi_2 - \frac{1}{2}a$, d'après les données de l'observation ; et en y ajoutant $\frac{1}{2}a$, on aura φ_2. Le seconde fera connaître φ_3. Quand ces deux angles seront déterminés, la troisième donnera le rapport de réfraction n. Ces formules ont l'avantage d'être disposées pour le calcul par logarithmes. En les employant, il faut se rappeler que l'angle φ est compté, à partir de la base du prisme, de zéro à 180° ; du reste, il n'y a d'autre précaution à prendre que d'appliquer exactement les signes des lignes trigonométriques, et surtout de se souvenir que la tangente d'un angle est égale à celle de son supplément, prise avec un signe contraire.

Au lieu d'éliminer ϕ_1 entre les formules primitives, on aurait pu éliminer φ_2. Alors, en opérant exactement de la même manière, on trouve

$$\operatorname{tang}(\phi_1 + \tfrac{1}{2}a) = \frac{\operatorname{tang}[\varphi + \frac{1}{2}(\Delta + \delta + a)] \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\Delta + \delta + a)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a};$$

$$n = \frac{\cos \varphi}{\cos \phi_1}. \qquad (4)$$

Ce résultat est évident de lui-même ; car on le déduit du précédent, en mettant au lieu de ϕ_2 sa valeur $a + \varphi_1$. Mais il est

cependant nécessaire de le mettre en évidence, parce que les formules (3) cessent d'être applicables, lorsque l'angle d'émergence φ_3 est droit. Alors φ_2 étant aussi droit, n se présente sous la forme $\frac{o}{o}$. Dans ce cas, les équations (4) feront connaître φ_1, et ensuite n. Ces dernières, à leur tour, cessent d'être applicables, lorsque φ est droit; mais alors on peut se servir des équations (3).

Examinons d'abord, d'après ces formules, ce qui arriverait si a était nul. C'est le cas de la réfraction à travers une lame plane dont les deux surfaces sont parallèles; car une pareille lame peut être considérée comme un prisme dont l'angle réfringent est nul. Il faudra donc supposer $a = o$ dans la première des équations (3); mais la manière dont elles sont disposées introduirait, dans ce cas, des racines inutiles dont il faudrait se débarrasser par des considérations particulières. Il est plus simple d'employer immédiatement les équations (1) et (2). La supposition de $a = o$ dans les premières, donne d'abord $\varphi_2 = \varphi_1$; de sorte que les deux équations en φ et φ_3 deviennent

$$\cos\varphi = n\cos\varphi_1, \qquad \cos\varphi_3 = n\cos\varphi_1.$$

De là on tire $\varphi_3 = \varphi$, ou $\varphi_3 = 360^\circ - \varphi$.

La seconde racine n'est pas admissible, parce qu'elle ferait rentrer le rayon émergent dans l'intérieur du verre, au lieu qu'il doit en sortir : bornons-nous donc à la première, et introduisons-la dans l'équation $\varphi_3 = \varphi + \Delta + \delta + a$, en y faisant de plus a nul : il viendra alors

$$o = \Delta + \delta; \qquad \text{d'où } \Delta = -\delta.$$

L'interprétation de ces résultats devient évidente par leur construction même, fig. 33. D'abord, puisque $\varphi_3 = \varphi$, le rayon émergent I′O et le rayon incident SI font des angles égaux avec les faces d'incidence et d'émergence, ces rayons sont donc parallèles. D'après cela, leur inclinaison sur la ligne OS est égale, mais opposée, cette ligne passant entre les deux rayons. C'est ce qu'indiquent nos formules, en nous donnant $\Delta = -\delta$. Généralement la déviation Δ se trouvera négative toutes les fois que le rayon émergent I′O passera au-dessous du rayon direct OS,

parce que nous l'avons employée comme positive dans le cas contraire, lorsque nous avons établi les formules.

L'angle δ devient nul quand l'objet est assez éloigné pour que les rayons qu'il envoie à l'observateur et au point d'incidence puissent être censés parallèles. Alors Δ devient aussi nul, c'est-à-dire que le rayon émergent I′O coïncide sensiblement avec le rayon direct SO.

Il résulte de cette discussion que, lorsqu'on regarde un point lumineux à travers une glace dont les deux surfaces sont parallèles, l'image de ce point est toujours déviée par la réfraction, et la déviation est égale à l'angle δ, formé par les deux rayons menés de l'objet à l'observateur et au point d'incidence. Si le point lumineux est très-éloigné, cet angle devient nul, et la déviation est insensible.

Voici maintenant un exemple numérique qui servira de guide pour tous les autres cas. Le 10 avril 1811, nous observâmes, M. Cauchoix et moi, la réfraction d'un prisme de flintglass français, de la fabrique de M. d'Artigues. L'angle réfringent de ce prisme, mesuré par la réflexion de la lumière, était de 24° 25′ 30″. L'angle du rayon incident avec la première face du prisme, compté de sa base, était 96° 17′ 10″. Le point lumineux était assez éloigné pour que les rayons menés de ce point à l'observateur et au prisme fussent sensiblement parallèles. Enfin la déviation fut observée de 17° 45′ 9″ pour les rayons verts. D'après ces données, on a

$$\varphi = 96^\circ\ 17'\ 10'' \quad a = 24^\circ\ 25'\ 30'' \quad \delta = 0 \quad \Delta = 17^\circ 45'\ 9''.$$

et le calcul s'achève comme on le voit ici :

$$\tfrac{1}{2}(\Delta + a) = 21^\circ\ 5'\ 20'' \qquad \log \text{tang} = \bar{1},5861878$$

$$\varphi + \tfrac{1}{2}(\Delta + a) = 117^\circ\ 22'\ 30''. \qquad \log \text{tang} = 0,2858402 -$$

$$\bar{1},8720280 -$$

$$\tfrac{1}{2}a = 12^\circ\ 12'\ 45'' \qquad \log \text{tang} = \bar{1},3353295$$

$$\log \text{tang}\,(\varphi_2 - \tfrac{1}{2}a) = 0,5366985 -$$

$$\varphi_2 - \tfrac{1}{2}a = 180^\circ - 73^\circ\ 47'\ 45''$$

$$\Delta + a = 42^\circ\, 10'\, 39'' \qquad \varphi_2 - \tfrac{1}{2} a = 106^\circ\, 12'\, 15''$$
$$\varphi = 96^\circ\, 17'\, 10'' \qquad \tfrac{1}{2} a = 12^\circ\, 12'\, 45''$$
$$\phi_3 = 138^\circ\, 27'\, 49'' \qquad \phi_2 = 118^\circ\, 25'\, 0''$$

$$\log \cos \varphi_3 = \bar{1},8742138 -$$
$$\log \cos \varphi_2 = \bar{1},6774975 -$$
$$\log n = 0,1967163$$

Rapport de réfraction $n = 1,57296$

Pour vérification, on peut aussi calculer n par les angles d'incidence et de réfraction sur la première face, qui donnent

$$n = \frac{\cos \varphi}{\cos \phi_1};$$

En effet, on a $\phi_1 = \varphi_2 - a.$

Or nous venons de trouver

$$\varphi_2 = 118^\circ\, 25'\, 0''$$
$$a = 24^\circ\, 25'\, 30''.$$

Par conséquent

$$\varphi_1 = 93^\circ\, 59'\, 30'' \qquad \log \cos = \bar{2},8426803 -$$
$$\varphi = 96^\circ\, 17'\, 10'' \qquad \log \cos = \bar{1},0393878 -$$
$$\log n = 0,1967075$$

Rapport de réfraction....... $n = 1,57292.$

La petite différence de quatre unités sur la cinquième décimale vient de l'incertitude des parties proportionnelles dans le calcul des logarithmes. Dans le cas actuel, cette seconde manière de calculer est moins sûre que la première ; parce qu'elle emploie de plus petites incidences, et par conséquent de plus petits sinus.

Si l'on répète l'expérience en variant l'incidence φ du rayon sur la surface antérieure du prisme, le calcul donnera toujours pour n des valeurs exactement égales, ou du moins entre lesquelles il n'existera que des différences très-petites et irrégulières, telles qu'on doit les attendre des erreurs inévitables des observations. Cet accord prouve donc, de la manière la moins douteuse, que le rapport de réfraction n est en effet constant, sous toutes les incidences dans la réfraction ordinaire, et par

conséquent la règle annoncée par Descartes se trouve pleinement confirmée.

On peut encore obtenir directement n, ou plutôt $n^2 - 1$ par une formule très-élégante, qui m'a été communiquée par deux jeunes élèves d'une grande espérance, MM. Lévy et Rodriguez, lesquels y étaient l'un et l'autre parvenus séparément. A cet effet, reprenons les deux équations fondamentales

$$\cos\phi = n\cos(\phi_2 - a), \qquad \cos\phi_3 = n\cos\phi_2.$$

Développons la première, et chassons $\cos\phi_2$ et $\sin\phi_2$ au moyen de la seconde, il vient

$$\cos\phi = \cos a\cos\phi_3 + n\sin a\sqrt{1 - \frac{\cos^2\phi_3}{n^2}}.$$

Cette équation ne contient plus que n d'inconnue. En faisant disparaître le radical, on en tire

$$n^2\sin^2 a = \cos^2\phi - 2\cos a\cos\phi\cos\phi_3 + \cos^2\phi_3.$$

Substituez dans le second membre, au lieu des puissances de cosinus leurs valeurs en produits d'arcs différens, le résultat prendra cette forme

$$(n^2 - 1)\sin^2 a = \cos^2 a + \cos(\phi + \phi_3)\cos(\phi - \phi_3)$$
$$- \cos a[\cos(\phi + \phi_3) + \cos(\phi - \phi_3)],$$

ou, ce qui revient au même,

$$(n^2 - 1)\sin^2 a = [\cos a - \cos(\phi + \phi_3)][\cos a - \cos(\phi - \phi_3)].$$

Chacun des facteurs du second membre peut être lui-même transformé en un produit de deux sinus, et cette transformation donne

$$(n^2 - 1)\sin^2 a = 4\sin\tfrac{1}{2}(a + \phi + \phi_3)\sin\tfrac{1}{2}(a - \phi - \phi_3)\sin\tfrac{1}{2}(a + \phi - \phi_3)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(a - \phi + \phi_3).$$

Le second membre est tout entier composé de quantités connues; car d'abord l'incidence ϕ est donnée, ainsi que l'angle a du prisme; ensuite, avec ces données et la déviation observée, on a ϕ_3 par la formule

$$\phi_3 = \phi + \Delta + \delta + a.$$

Si, pour plus de simplicité, on suppose

$$\frac{\Delta + \delta}{2} = \mathrm{H},$$

il viendra

$$\tfrac{1}{2}(a+\varphi+\varphi_3)=a+\varphi+\text{H};\ \tfrac{1}{2}(a-\varphi-\varphi_3)=-(\varphi+\text{H});$$
$$\tfrac{1}{2}(a+\varphi-\varphi_3)=-\text{H};\ \tfrac{1}{2}(a-\varphi+\varphi_3)=a+\text{H};$$

et ces substitutions étant introduites dans la formule, il en résulte

$$n^2-1=\frac{4\sin\text{H}\sin(a+\text{H})\sin(\varphi+\text{H})\sin(a+\varphi+\text{H})}{\sin^2 a}.$$

Connaissant ainsi n^2-1, on en déduira n^2. Pour les usages ordinaires, le calcul de cette formule n'est pas plus court que celui des premières formules que j'ai données; mais elle peut, dans certains cas, avoir des applications utiles, et d'ailleurs elle est remarquable par son élégance.

Il me reste à donner sur les détails de l'expérience toutes les indications nécessaires pour la faire avec précision et facilité.

D'abord nous avons supposé que le plan d'incidence était perpendiculaire aux arêtes du prisme; il faut remplir cette condition. Pour cela, on taillera le prisme bien rectangulaire sur sa base, et on posera cette base sur un plan de verre dépoli que l'on aura dirigé de manière que le point lumineux se trouve dans son prolongement. Cela se fera très-commodément si l'on plante dans le lieu de l'observation un poteau solide, tel que T, fig. 34, portant à son sommet trois vis calantes V V V, qui soutiendront le plateau de verre, et qui permettront de diriger celui-ci sur le point lumineux, après quoi on les serrera invariablement.

Il faut maintenant connaître l'incidence φ. Pour cela, on placera le prisme sur le plateau dans la position que l'on voudra choisir. Je suppose que S I soit le rayon incident venu d'un objet infiniment éloigné, et que B A C soit la section faite dans le prisme par le plan d'incidence parallèlement à sa base, il s'agit de déterminer l'angle S I B. Pour cela, on se placera en un point quelconque O sur la direction du rayon réfléchi I O, et on mesurera l'angle I O S formé par ce rayon avec le rayon direct, mené au point lumineux. On prendra cette mesure avec un cercle répétiteur ou tout autre instrument propre à mesurer les angles, dont on placera le centre au point O et le limbe dans

le plan IOS. Pour remplir cette condition indispensable, on dirigera d'abord approximativement le plan de ce limbe, de manière que le point lumineux S et l'image réfléchie I se trouvent dans son prolongement, et on achevera de les y mettre en le haussant ou le baissant d'un côté ou d'un autre, jusqu'à ce que la lunette, en tournant sur le limbe, puisse passer de l'objet à son image, sans que ni l'un ni l'autre quittent le fil horizontal tendu dans son intérieur. Pour voir maintenant les conséquences qu'on peut tirer de cette mesure, supposons d'abord le point lumineux assez éloigné pour que les deux rayons menés à l'observateur et au point d'incidence puissent être censés parallèles, comme le représente la figure. Alors, ayant mesuré l'angle IOS que je nommerai R, on connaîtra son supplément SIO, qui sera $180 - R$. Or, en élevant au point d'incidence la normale IN sur la surface du prisme, la loi de la réflexion donne les angles SIN, OIN égaux entre eux; par conséquent chacun d'eux est la moitié de $180 - R$ ou $90 - \frac{1}{2}R$; si donc à cette valeur qui représente SIN nous ajoutons NIB, c'est-à-dire 90°, nous aurons $180 - \frac{1}{2}R$ pour la valeur de l'angle SIB, compté à partir de la base du prisme. C'est cet angle que nous avons nommé ϕ. On aura donc

$$\phi = 180 - \tfrac{1}{2}R;$$

de sorte que tout se réduit à mesurer l'angle R, compris entre l'image réfléchie et l'image directe.

Si l'objet lumineux n'était pas assez éloigné pour que les deux rayons OS, IS pussent être censés parallèles, il faudrait calculer l'angle ISO, fig. 35, que nous nommerons ϱ. Nous verrons tout-à-l'heure comment on peut l'obtenir. Puis représentant toujours par R l'angle IOS, compris entre l'image réfléchie et l'image directe, menons OS′ parallèle à IS, et désignons l'angle inconnu IOS′ par R′, nous aurons alors

$$R' = R + \varrho.$$

Maintenant nous pouvons raisonner sur R′, comme nous l'avons fait tout-à-l'heure sur R, et nous en déduirons de même la valeur de l'angle SIB, que nous avons nommé ϕ. On aura ainsi $\phi = 180° - \frac{1}{2}R'$,

ou, en mettant pour R′ sa valeur,

$$\phi = 180° - \frac{(R + \varrho)}{2}.$$

Si le point lumineux s'éloigne assez pour que ϱ puisse être censé nul, on retombe sur la première formule. Il y a toujours de l'avantage que cela soit ainsi, parce que l'opération en devient plus facile et le pointé plus exact; mais si on ne peut obtenir cet avantage, il faut du moins que l'objet soit assez éloigné pour que l'angle ϱ soit fort petit. Alors il faudra mesurer la distance O S par une opération trigonométrique ou de toute autre manière; puis, quand on aura observé l'angle I O S ou R, on tendra un fil à partir du point I dans la direction I S, et on mesurera la plus courte distance O P du point O à ce fil. O P sera donc perpendiculaire sur I S, et l'on aura

$$\sin \varrho = \frac{OP}{OS}.$$

Cette opération donnera la valeur de l'angle ϱ, avec une précision suffisante, parce que O S est supposé très-grand comparativement à O P.

Pour que l'objet qui sert de mire puisse être ainsi observé par réflexion et par réfraction, il faut qu'il soit suffisamment lumineux; il faut aussi qu'il ait peu de diamètre, afin que l'on pointe plus exactement à son centre. Rien n'est plus propre à remplir cette condition que la flamme d'une lampe à courant d'air autour de laquelle on place, outre sa cheminée de verre, une autre cheminée ou enveloppe cylindrique de fer-blanc percée d'un trou rond à la hauteur du centre de la flamme. On a ainsi pour point lumineux un petit disque extrêmement brillant, qui peut très-bien s'observer par réflexion et par réfraction à cinq cents toises de distance, quand l'air n'est pas chargé de brouillards. Les observations de réflexion peuvent se faire de jour, en plaçant derrière le prisme un morceau de drap noir pour intercepter les rayons directs venus des objets environnans qui, se mêlant avec l'image réfléchie, l'affaibliraient quelquefois au point de la rendre à peine visible. Pour la réfraction, il n'est pas possible d'employer un moyen semblable,

parce qu'en interceptant les rayons venus des objets extérieurs qui se trouvent dans la direction du point lumineux, on cacherait nécessairement ce point : aussi la mesure de la déviation du rayon réfracté doit elle se faire de nuit.

Pour l'obtenir, on choisira à volonté un point O, fig. 36, sur la direction du rayon réfracté I′ O, et l'on y placera le centre d'un cercle répétiteur, dont on dirigera le limbe de manière que l'image réfractée et l'image directe se trouvent l'une et l'autre dans son prolongement. On y parviendra d'abord par approximation, à la vue simple, et ensuite on rendra la condition rigoureuse en se servant du fil horizontal de la lunette pour vérifier le parallélisme comme nous l'avons dit plus haut. Cela fait, il ne restera plus qu'à mesurer l'angle I′ O′ S, selon l'usage ordinaire de l'instrument. Cet angle sera la déviation que nous avons désignée par Δ. Il faut connaître aussi l'angle δ formé en S par les rayons S O, S I, menés de l'objet à l'observateur, et au point d'incidence. Comme cet angle sera très-petit, puisque nous plaçons le signal à une grande distance, on le déterminera simplement par une opération graphique. Du point O l'on tendra un fil dans la direction O S, et l'on mesurera la plus courte distance I P du point I à ce fil. Comme on est censé connaître la distance O S, on connaîtra aussi P S, et par conséquent l'on aura

$$\text{tang}\ \delta = \frac{IP}{PS};$$

ce qui servira pour calculer δ.

Pour s'épargner la peine de mesurer l'angle d'incidence ϕ à chaque fois que l'on opère sur un nouveau prisme, il faut fixer sur le plateau de verre une règle de verre bien dressée, qui est désignée par R R′ dans la fig. 37, et contre laquelle on appuie invariablement tous les prismes dont on veut observer la réfraction. On mesure une fois pour toutes l'angle S H R formé par le rayon incident avec la direction de cette règle; et c'est ce qui est facile en appuyant contre elle une glace à faces parallèles, sur laquelle on observe par réflexion l'image du point lumineux, comme on ferait pour la première surface d'un prisme. Connaissant cet angle constant S H R, si l'on vient à placer sur

le plateau un prisme A B C, en l'appuyant contre la règle, il est clair que l'angle S I B, que nous avons nommé φ, est égal à S H R — B A C, c'est-à-dire à l'angle constant observé sur la glace, moins l'angle réfringent du prisme que l'on suppose toujours connu et mesuré directement. De cette manière, il suffira d'observer une seule fois pour toutes l'incidence constante S H R. Par exemple, dans l'observation que nous avons calculée page 211, on avait trouvé

$$SHR = 120^\circ\ 42'\ 40''.$$

On avait de plus $\quad ABC = 24^\circ\ 25'\ 30''$;

par conséquent $\quad \varphi = 96^\circ\ 17'\ 10''$,

ainsi que nous l'avons employé dans notre calcul. Comme cet angle constant S H R sert dans toutes les expériences, il faut le mesurer avec un grand soin.

Les procédés que je viens d'indiquer sont ceux dont nous avons fait usage, M. Cauchoix et moi, dans un grand nombre d'expériences que nous avons faites pour déterminer la réfraction de diverses substances solides ou liquides. Ils nous ont paru les plus simples et les plus commodes que l'on pût employer quand on voulait atteindre la dernière exactitude.

J'ai déjà annoncé que les rayons de lumière blanche, en se réfractant dans les corps diaphanes, s'élargissent en un faisceau dont les diverses parties produisent la sensation de couleurs diverses. C'est en effet ce qu'on remarque lorsque l'on observe la réfraction à travers des prismes, comme nous venons de le supposer. Le faisceau émergent paraît coloré d'une infinité de nuances qui se suivent graduellement depuis le rouge le plus vif jusqu'au violet le plus sombre; mais, dans cette dégradation, il est assez facile de distinguer sept nuances plus tranchées que les autres. Ce sont le rouge, l'orangé, le jaune, le vert, le bleu, l'indigo et le violet : puisque ces couleurs sont séparées dans le rayon émergent, il est évident que les parties du rayon incident qui les produisent ont alors des réfrangibilités inégales, et que l'on peut apprécier par l'étendue de leurs déviations. On trouve ainsi que la plus petite réfrangibilité a lieu dans le rouge, et

qu'elle va de là en croissant jusqu'au violet. On trouve même, en variant les incidences, que le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence est constant pour chaque couleur, quoique différent de l'une à l'autre; mais cette constance est difficile à constater par la seule observation des déviations absolues, parce que l'on n'est jamais sûr de ramener la lunette exactement sur la même nuance dans les diverses expériences. C'est pourquoi je me borne à énoncer ici la constance du rapport de réfraction comme une chose très-vraisemblable, et nous chercherons plus tard d'autres moyens pour l'établir rigoureusement.

Néanmoins la seule connaissance de l'inégale réfrangibilité des différentes couleurs nous fournira dès à présent une remarque très-essentielle sur la manière dont elles doivent paraître distribuées quand on regarde un point lumineux à travers un prisme réfringent. Soit, fig. 38, SI un rayon blanc infiniment mince, parti d'un objet infiniment éloigné S, et réfracté par le prisme ABC. Après sa sortie, il se divisera en un faisceau VI′R dont l'extrémité la plus réfractée I′V sera violette, tandis que l'extrémité la moins réfractée I′R sera rouge, les autres nuances se distribuant entre ces deux-là. Or, si un observateur place l'œil quelque part en O sur le prolongement du rayon rouge, il est évident qu'il ne recevra aucun des autres rayons colorés contenus dans le faisceau RI′V. Mais si par le point O vous menez une ligne Oi' parallèle à I′V, l'observateur recevra, suivant cette direction, un rayon violet provenant d'un autre rayon incident Si venu également de l'objet S; et de même que le premier faisceau émané de SI ne lui envoyait qu'un rayon rouge OI′, de même le faisceau émané de Si ne lui enverra que le seul rayon violet i'O. Mais d'autres rayons incidens compris entre SI et Si lui enverront les nuances intermédiaires, et il aura ainsi la sensation de toutes les couleurs du spectre, comme s'il avait reçu sur un carton blanc le faisceau réfracté RI′V. Seulement les rayons les plus réfrangibles seront toujours ceux qui lui paraîtront les plus déviés de leur direction primitive; par conséquent les plus éloignés de la base BC du prisme, et ce caractère, qui règlera pour lui la distribution des couleurs,

sera aussi un indice de leur plus grande ou de leur moindre réfrangibilité.

Cette remarque, quoique fort simple, est cependant très-essentielle à retenir; car elle sert dans une infinité de circonstances où il faut conclure de l'ordre des couleurs la réfraction plus ou moins grande qu'elles ont subie.

Détermination exacte du rapport de réfraction dans les liquides.

Les méthodes que je viens d'exposer s'appliqueraient également aux substances liquides, si l'on pouvait en construire des prismes. Or, c'est ce qui est très-facile en les contenant dans des vases prismatiques dont les parois soient formées de glaces planes et parallèles; car de pareilles glaces ne déviant pas sensiblement les rayons quand le point lumineux est très-éloigné, la réfraction qui se produit, et que l'on observe, est occasionée entièrement par le liquide; aussi de pareils vases, lorsqu'ils sont vides, ne dévient nullement les images des objets, du moins si les glaces sont bien exécutées.

Mais pour ajuster ces glaces ensemble, et former un vase susceptible de contenir des liquides; il faut les attacher ou les luter. Si l'on se borne à les attacher avec des vis, il est difficile que le liquide ne s'échappe pas. Si on les lute, le lut pourra être attaqué par le liquide, et la réfraction s'en trouvera influencée. L'inconvénient augmente, si l'on veut observer des liquides volatils, tels que l'ammoniaque, les huiles essentielles, et la plupart des acides. Heureusement, on peut éluder toutes ces difficultés par un procédé que nous avons imaginé, M. Cauchoix et moi, et qui est de la plus grande simplicité.

On commence par prendre une plaque de verre rectangulaire, épaisse d'environ un centimètre, et large de 4 ou 5. Peu importe que le verre soit pur ou impur, opaque ou transparent. On perce la plaque à son centre, et on y pratique un canal cylindrique d'environ deux centimètres de diamètre; ensuite on achève de la tailler en prisme, comme le représente la fig. 39, et l'on a

soin que ces deux faces soient bien planes et bien polies. Alors, quand on pose sur ces faces des glaces également planes, avec une légère pression, elles s'y attachent et y adhèrent d'elles-mêmes par l'effet de ces attractions à petite distance dont nous avons développé le principe en parlant de la capillarité. On forme donc ainsi un véritable prisme de verre creux, et sans lut, où l'on peut enfermer tous les liquides possibles sans qu'ils y éprouvent aucune altération.

Pour les y introduire avec facilité, et sans être obligé de détacher à chaque fois les glaces, on pratique dans l'épaisseur du prisme un canal latéral *a b*, qui se ferme par un bouchon de verre usé à l'émeri; et enfin, pour que l'adhérence des glaces soit plus parfaite, et qu'elles ne glissent pas sur les faces solides du prisme par les mouvemens qu'on est obligé de lui donner, on les contient par des branches de cuivre triangulaires qui se serrent à vis contre leurs surfaces avec une légère pression.

En supposant que les glaces employées soient bien parallèles, il est évident que cet appareil offre un véritable prisme à liquides, à travers lequel on peut observer la réfraction de ces substances, comme si elles étaient solides, sans craindre qu'elles y éprouvent aucune altération. On taille également ce prisme de manière que ses arêtes soient bien rectangulaires sur ses bases, et on le pose sur le plateau de glace à incidence constante, comme nous l'avons expliqué plus haut; l'observation et les calculs s'achèvent exactement comme pour les substances solides. Voici quelques expériences faites avec cet appareil, auxquelles on pourra appliquer les formules du paragraphe précédent.

Le 30 avril 1811, nous avons observé, M. Cauchoix et moi, la réfraction de l'acide muriatique très-concentré; l'angle réfringent du prisme était 27° 29′ 40″, et l'incidence constante sur la seconde surface 120° 42′ 40″, ce qui donne l'angle du rayon incident égal à la différence de ces deux quantités, ou 93° 13′. La déviation observée au cercle répétiteur a été trouvée de 13° 43′ 30″. L'objet lumineux était assez éloigné pour

que les rayons dirigés au prisme et à l'observateur pussent être censés parallèles. D'après ces données, on aura

$$\varphi = 93^\circ\ 13' \qquad a = 27^\circ\ 29'\ 40'' \qquad \delta = 0 \qquad \Delta = 13^\circ\ 43'\ 30'';$$

et par un calcul semblable à celui de la page 211, on trouvera

$$\begin{array}{rl} \varphi_2 - \frac{1}{2}a = & 90^\circ + 16^\circ\ 1'\ 42'' \\ \frac{1}{2}a = & 13^\circ\ 44'\ 50'' \\ \hline \varphi_2 = & 90^\circ + 29^\circ\ 46'\ 32'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \varphi = & 90^\circ + 3^\circ\ 13'\ 0'' \\ \Delta + a = & 41^\circ\ 13'\ 10'' \\ \hline \varphi_3 = & 90^\circ + 44^\circ\ 26'\ 10'' \end{array}$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{\cos \varphi_3}{\cos \varphi_2} = 1{,}4098.$$

C'est le rapport de réfraction pour cet acide; sa valeur varie avec la température des liquides. Nous examinerons bientôt quelles sont les lois de ces variations.

Détermination exacte du rapport de réfraction dans les substances aériformes.

La réfraction des gaz s'observe comme celle des liquides, en les introduisant dans des vases prismatiques dont les faces sont fermées par des glaces parallèles; mais il faut y joindre quelques modifications dépendantes de la constitution de ces substances.

Les gaz ont beaucoup moins de densité que les solides et les liquides : leur réfraction est beaucoup plus faible à angle égal; il faut donc, pour la rendre sensible, agrandir considérablement l'angle réfringent du prisme où on les observe. Borda en avait fait construire un dont l'angle était de 143° 7′ 28″. C'est celui que nous avons employé, M. Arago et moi, pour faire sur les réfractions des gaz une suite d'expériences dont je donnerai l'extrait dans ce chapitre. Il est construit avec un gros tube de verre cylindrique et creux, dont les deux bouts sont taillés en prisme, et fermés par des glaces à faces parallèles que l'on a soigneusement lutées, fig. 40. Le tube est percé en dessous, et muni d'un robinet R qui peut s'ajuster sur une machine pneumatique ou sur des récipiens; ce qui permet de faire le vide dans le prisme, et d'y introduire les gaz que l'on

veut observer. J'ai déjà annoncé que, pour une même substance, la réfraction n'était pas la même quand la densité changeait; or, la densité des gaz varie dans des proportions considérables par les changemens de pression et de température. Pour réduire toutes les expériences à des termes comparables, il faut observer ces deux élémens.

Pour mesurer la pression, on adapte au prisme un tube vertical TV, qui communique à son intérieur, et qui renferme un baromètre à siphon, dont la branche ouverte est assez longue pour que le mercure puisse s'y élever jusqu'au niveau, lorsque l'on fait le vide dans le prisme. La hauteur à laquelle le mercure de ce baromètre est soutenu par le gaz intérieur détermine la pression. Pour connaître la température, on pourrait insérer aussi dans le prisme un petit thermomètre; mais il faudrait le placer au milieu de sa capacité, ce qui intercepterait la vision; il vaut mieux suspendre deux thermomètres très-sensibles à l'extérieur du prisme, et tout près de ses faces, ou même en contact avec elles. La température de ces faces, indiquée par le thermomètre, peut, sans erreur sensible, être prise pour celle du gaz et de l'air qui les touche en dedans et en dehors; car on sait avec quelle facilité extrême les gaz se mettent à la température des corps environnans. On prend d'ailleurs toutes sortes de précautions pour que la température varie peu dans le lieu de l'expérience, et surtout n'y puisse varier que lentement.

Ce prisme est monté sur un pied perpendiculaire à sa longueur, et qui le tient dans une situation horizontale. Le lieu de l'observation et l'objet qui sert de signal doivent être choisis de manière que ce point se trouve dans le même plan horizontal qui passe par le centre du prisme. On observe la déviation avec un cercle répétiteur, dont on dispose aussi le limbe dans le même plan, d'abord par approximation, ensuite exactement par la condition que la lunette supérieure de son limbe étant transportée de l'objet direct à l'image réfractée, l'un et l'autre se trouvent toujours sur le même fil horizontal. Pour vérifier cette horizontalité des fils, il est bon que le signal soit placé à une des fenêtres de quelque grand édifice, qui puisse offrir

dans sa construction de grandes lignes de niveau sur lesquelles on puisse se régler. Alors la meilleure de toutes les mires est un paratonnerre vertical qui se projette comme une ligne noire sur la voûte du ciel.

Ici, comme avec les solides et les liquides, le mode d'observation consiste toujours à diriger la lunette supérieure du cercle alternativement sur l'objet direct et sur l'image réfractée. Mais comme la déviation produite par les substances gazeuses est toujours extrêmement petite, même avec le grand prisme dont nous avons fait usage, il s'ensuit qu'on ne pourrait pas voir du même point l'objet et son image, parce que le corps même du tube forme un obstacle qui intercepte les rayons, quand on va d'une de ces positions à l'autre ; de sorte qu'il faut faire usage des deux lunettes, supérieure et inférieure, du cercle. La première se dirige constamment sur l'image réfractée, la seconde sur l'objet direct : en quoi on est favorisé par l'excentricité même de cette dernière, qui passe toujours un peu à côté de l'autre, comme le représente la fig. 41.

Supposant donc cette disposition faite, et l'objet assez éloigné pour que ses rayons menés au prisme et à l'observateur fassent entre eux un angle insensible, il est clair que la déviation Δ est égal à l'angle formé par les deux lunettes OL, OL′ ; mais cet angle ne peut pas être mesuré sur le limbe, puisque l'une est au-dessus de son plan, et l'autre au-dessous.

Un moyen se présente pour y parvenir ; c'est d'enlever le prisme et de ramener la lunette supérieure OL sur l'objet direct. L'observation devient possible, le prisme étant ôté. Alors l'arc parcouru par cette lunette sur le limbe sera la déviation Δ, et il n'y aura aucune réduction à y faire, puisque la lunette OL tourne exactement autour du centre du limbe circulaire sur lequel les divisions sont tracées. Pendant ce temps, la lunette inférieure, à laquelle on ne touche point, servira d'épreuve pour savoir si le limbe n'éprouve pas quelque rotation sur son centre par le frottement de la lunette supérieure pendant qu'on la fait mouvoir ; car un pareil mouvement serait autant d'erreur sur l'arc que la lunette supérieure doit parcourir. On regardera donc à travers la lunette inférieure pour voir si elle

reste constamment dirigée sur le signal qui sert de mire ; et si elle s'en écarte, ce sera l'indice d'un mouvement du limbe qu'il faudra corriger par les vis de rappel, jusqu'à ce que la lunette inférieure se trouve replacée ; et l'on voit bien qu'il faut se garder de la toucher le moins du monde pendant cette opération.

On obtiendra donc ainsi la déviation Δ ; mais on ne l'obtiendra qu'une fois. Pour répéter l'observation, il faudrait replacer de nouveau le prisme, ramener la lunette supérieure sur l'image réfractée, sans changer sa position sur le limbe et par la seule rotation de celui-ci. Enfin, pour achever l'opération, il faudrait de nouveau ôter le prisme, puis le replacer encore pour avoir une troisième mesure, et ainsi de suite. Tous ces déplacemens seraient incommodes et pourraient entraîner des erreurs, parce qu'on ne pourrait pas répondre de placer toujours le plan réfringent du prisme avec une égale exactitude, à moins de prendre à chaque fois des précautions longues et minutieuses qui demanderaient beaucoup de temps.

Cependant il faut de toute nécessité multiplier les observations de la déviation Δ, et leur faire parcourir les diverses parties du limbe du cercle ; car cette déviation étant toujours fort petite, et au plus de cinq ou six minutes, on ne peut espérer de l'obtenir avec exactitude qu'en atténuant les erreurs de divisions qui pourraient l'altérer, et cela ne peut se faire que par la répétition de l'angle ; mais, par un artifice très-simple, tous ces avantages peuvent s'obtenir réunis à une facilité extrême dans l'opération.

Pour cela, il faut rendre le prisme mobile sur son pied, de manière qu'il puisse tourner horizontalement. Au moyen de cette disposition, on pourra le retourner point pour point, comme le représente la fig. 42 ; et si le tube qui le compose a seulement trois centimètres de diamètre, cela suffira pour que la même lunette puisse voir à travers dans ces deux positions opposées. Or, en supposant d'abord la lunette supérieure dirigée directement sur le signal, afin de prendre cette première position pour point de départ, si l'on vient à

placer le prisme dans la première direction A A B C, la lunette ne pointera plus sur le signal, puisque l'image de celui-ci sera déviée ; et, pour l'y ramener, il faudrait faire parcourir à la lunette, sur le limbe, un arc égal à la déviation $+\Delta$, en allant, par exemple, de droite à gauche. Cela fait, si vous retournez le prisme de 180°, ce qui l'amènera dans la position ∀∀Ɔᗺ, vous aurez une autre déviation précisément égale à la première; mais, dirigée du côté opposé de l'axe du prisme, celle-ci sera donc $-\Delta$ au lieu de $+\Delta$; et, pour la mesurer en partant de la première position de la lunette supérieure, il aurait fallu faire parcourir à celle-ci un angle Δ, en allant de gauche à droite. Donc si, sans s'embarrasser de la première position, on veut aller tout d'un coup de la seconde à la troisième, il faudra faire parcourir à la lunette supérieure, de gauche à droite sur le limbe, un angle 2Δ, que l'on pourra mesurer sur la division, puisque l'on peut y lire la seconde position de la lunette et la troisième.

Maintenant, retournons de nouveau le prisme à sa première position A A B C; en regardant à travers la lunette, on trouvera le signal dévié de l'angle 2Δ; et si l'on voulait y ramener la lunette supérieure, il faudrait lui faire décrire de nouveau cet arc en sens contraire, ce qui la ramenerait à sa première position, et déferait ce que l'on avait fait d'abord. Mais, au lieu de donner ce mouvement à la lunette, donnez-le au limbe, qui peut aussi tourner sur son centre ; vous pourrez ainsi ramener de même la lunette sur l'image réfractée. Alors, en retournant le prisme, l'image se trouvera déviée de nouveau de l'angle 2Δ, et cette fois vous la rejoindrez encore en faisant mouvoir la lunette supérieure de gauche à droite, comme la première fois. Celle-ci déviera donc une seconde fois l'arc 2Δ, qui se traînera sur le limbe à la suite de celui qu'elle avait décrit dans la première opération ; et en recommençant de la même manière, on pourra multiplier les observations indéfiniment. De plus, comme on ne sera obligé de lire la position de la lunette sur le limbe qu'à la première observation et à la dernière, il s'ensuit que l'erreur totale de l'arc par-

couru portera uniquement sur ces deux lectures ; mais, pour en déduire la valeur moyenne de la déviation, il faudra diviser cet arc par le nombre des observations successives ; de sorte que les erreurs ainsi divisées pourront devenir tout-à-fait insensibles, si l'on a suffisamment multiplié les observations.

Il est presque superflu de répéter que, pendant toute l'opération, la lunette inférieure doit servir de point de repaire pour attester l'immobilité du limbe chaque fois que la lunette supérieure tourne sur son plan. Nous avons déjà expliqué plus haut la nécessité de cette vérification.

Voici donc, en résumant ces remarques, à quoi le procédé se réduit. Le prisme et le cercle étant convenablement disposés, placez la lunette supérieure sur un point quelconque du limbe, que vous prendrez pour point de départ, et lisez sur les verniers la division du limbe à laquelle elle répond ; puis, n'y touchant plus, faites tourner le limbe jusqu'à ce que l'image réfractée vienne se placer sous le fil. Fixez alors le limbe par ses vis de pression.

Cela fait, amenez la lunette inférieure sur l'objet direct, à travers l'air, et fixez-la aussi dans cette position par ses vis de pression. Assurez-vous que ce mouvement n'a pas fait tourner un peu le limbe ; si cela est arrivé, la lunette supérieure n'est plus sur l'image. Faites tourner le limbe avec ses vis de rappel, de manière à l'y ramener ; cela changera aussi la direction de la lunette inférieure. Ramenez-la sur l'objet par ses vis de rappel, et assurez-vous de nouveau que la lunette supérieure n'a pas été dérangée par ce mouvement.

Tout étant ainsi disposé, faites tourner le prisme de 180° ; l'image parcourra l'arc 2Δ. Le fil de la lunette supérieure s'en trouvera donc très-éloigné. Ramenez-l'y en faisant mouvoir la lunette supérieure sur le limbe ; puis assurez-vous, par le moyen de la lunette inférieure, que le limbe n'a pas tourné. S'il a tourné, replacez-le, et fixez la lunette supérieure sur l'image. Quand tout sera ainsi réglé, lisez sur les verniers le point de la division où elle se trouve. Retranchez-en la position de son point de départ, le reste sera l'arc qu'elle a parcouru,

c'est-à-dire 2Δ, et sa moitié vous donnera la déviation simple Δ.

Mais, pour l'obtenir avec plus d'exactitude, retournez le prisme, la lunette ne se trouvera plus sur l'image; ramenez-l'y en faisant tourner le limbe, et fixez-le quand elle y sera arrivée. Ramenez aussi la lunette inférieure sur l'objet direct, en la faisant marcher sur son plan; fixez-la, et vérifiez de nouveau, par la lunette supérieure, l'immobilité du limbe : quand tout sera d'accord, les circonstances se trouveront exactement les mêmes qu'au commencement de l'opération précédente. Seulement le point de départ de la lunette supérieure sur le limbe sera différent; il répondra à la fin de l'arc 2Δ, parcouru dans l'observation précédente. Vous ferez alors une nouvelle observation de l'angle 2Δ, puis une troisième, et ainsi de suite. Soit n leur nombre, vous aurez la déviation simple Δ, en divisant l'arc total parcouru par $2n$.

Il me reste à parler des précautions qu'il faut prendre pour introduire les gaz dans le prisme, sans mélange de vapeur aqueuse, ni d'eau liquide, ni de toute autre matière qui pourrait altérer leur pureté.

La première observation qui se présente à faire, est celle de la réfraction de l'air atmosphérique. Dans ce cas, on extrait l'air du prisme au moyen de la machine pneumatique : cette opération ne procure pas un vide absolument parfait; mais quand la densité de l'air intérieur est extrêmement réduite, de manière à ne plus soutenir la colonne barométrique qu'à une hauteur de quelques millimètres, on l'observe, et on en tient compte dans le calcul, comme nous le verrons bientôt. On a donc ainsi un prisme vide, ou presque vide d'air, plongé dans l'air atmosphérique : les rayons lumineux, en y pénétrant, doivent par conséquent éprouver une déviation déterminée par l'excès de force réfringente de l'air extérieur; c'est en effet ce qui arrive. Si la lunette supérieure du cercle est d'abord dirigée immédiatement sur le signal, à travers l'air, lorsqu'ensuite on vient à interposer le prisme, elle se trouve considérablement déviée; c'est l'effet de la déviation Δ. Si on replace la lunette sur la

mire, en faisant mouvoir le limbe, et qu'on retourne le prisme point pour point, la déviation est double, c'est-à-dire 2 Δ. Dans nos expériences, le prisme était placé dans une des chambres du Luxembourg, en face de l'Observatoire, dont les paratonnerres nous servaient de point de mire. Le retournement du prisme transportait le fil de la lunette d'un bout de cet édifice à l'autre, ou, pour parler plus exactement, la lunette restant immobile, l'édifice semblait se déplacer, à droite et à gauche du fil, de toute cette quantité. J'ajouterai ici que la réfraction des gaz étant toujours très-faible, et leur dispersion insensible, on peut très-bien l'observer de jour, en prenant pour signal un objet terrestre; et l'on y gagne beaucoup du côté de la commodité. Alors l'espèce de signal la plus avantageuse pour l'exactitude est un objet noir et délié, comme un paratonnerre qui se projette dans le lointain sur la surface blanche du ciel.

Si l'on veut observer la réfraction de l'air à diverses densités, le procédé est le même; il faut seulement n'épuiser l'air que jusqu'à la limite que l'on choisit, et qui est indiquée par le baromètre intérieur.

Quand on veut observer d'autres gaz que l'air, il faut d'abord faire le vide dans le prisme, observer la densité de l'air qui y reste, et y introduire ensuite le gaz. On fait cette introduction sur une cuve pneumatochimique, à l'eau ou au mercure, si le gaz est susceptible de se dissoudre dans l'eau. Il faut que le prisme et la cloche qui contient le gaz soient unis l'un à l'autre par un double robinet, comme dans la pesée des gaz, afin d'éviter les bulles d'eau qui pourraient être lancées dans le col de l'instrument.

Si l'on voulait obtenir dans le prisme le vide sec, ou des gaz secs, il faudrait déposer dans le tube de verre qui le surmonte une certaine quantité de potasse caustique, propre à absorber toute humidité. Quand on opère dans le vide, l'effet sera rapide, et l'absorption instantanée; mais dans l'air ou dans un gaz, il faut un certain temps pour que les vapeurs se précipitent et se combinent avec l'alcali. Si l'on voulait, au contraire,

observer la réfraction des vapeurs aqueuses, il faudrait employer tous les moyens pour humecter l'air dans le lieu où l'on observe, en y répandant de l'eau, y suspendant des draps mouillés, et surtout en élevant la température; mais on devrait se garder d'en introduire dans le prisme, où l'eau, en se déposant sur les faces, altérerait la vision.

Dans tout ce que nous avons dit jusqu'à présent, nous avons supposé que les glaces qui forment les faces du prisme avaient leurs deux surfaces exactement parallèles. Il est probable que cette condition sera très-approchée, si l'on a travaillé les glaces avec soin ; mais il est très-peu vraisemblable qu'elle soit rigoureusement satisfaite. Or, comme la réfraction du verre est très-énergique, tandis que celle de l'air est très-faible, on conçoit qu'une erreur de ce genre doit être fort à redouter, par la grande influence qu'elle aurait sur les résultats. Pour la connaître, on ouvrira le robinet du prisme, et même on détachera le tube de verre qui le surmonte, afin d'y donner un libre accès à l'air extérieur. Puis on observera la déviation dans ces circonstances, comme on le ferait avec le prisme vide ou rempli d'un gaz. Si les surfaces des glaces sont exactement parallèles, il ne devra se produire aucun déplacement dans le signal par le retournement, puisque l'air intérieur et l'air extérieur au prisme seront exactement homogènes, et de densité égale ; mais si l'on trouve une déviation $+\Delta$ ou $-\Delta$, elle sera nécessairement l'effet d'un défaut de parallélisme, et cette quantité devra être ajoutée, avec son signe, à toutes les autres observations; car il en est ici comme de toutes les quantités fort petites, dont les effets partiels ne font que s'ajouter les uns aux autres dans l'effet total.

Ayant achevé d'expliquer tout ce qui concerne la disposition des appareils et la manière de faire les observations, il faut maintenant en déduire les rapports de réfraction de l'air et des gaz : ceci n'est plus qu'une simple affaire de calcul.

Afin de ne négliger rien de ce qui peut influer sur les résultats, regardons les deux glaces qui ferment le prisme comme étant elles-mêmes deux prismes de verre, à la vérité d'un très-

petit angle, que nous représenterons par ε, ε_1. Dans notre appareil, ces angles pouvaient être considérés comme dirigés dans le même plan que le grand angle réfringent du prisme intérieur, que je désignerai par a ; car, lorsque nous observions notre signal, le prisme étant ouvert et plein d'air atmosphérique, le fil horizontal de la lunette, placé sur une des lignes horizontales de la façade de l'observation, n'était ni haussé ni baissé par le retournement, de sorte que le déplacement de la mire s'opérait tout entier dans le sens horizontal ; et puisqu'il était alors produit uniquement par la forme un peu prismatique des faces, il en résulte que leur angle réfringent était dirigé sensiblement dans le même sens que celui du grand prisme. Cela était aussi un effet des dispositions que l'on avait prises en taillant les deux glaces dans un même morceau, et les opposant l'une à l'autre. Suivons le sens de leur longueur et de la petite inclinaison que leurs surfaces pouvaient conserver.

D'après cela, le rayon lumineux qui parvenait au cercle peut être considéré comme traversant successivement trois prismes, dont le premier est de verre, le second de vide ou formé par un gaz donné, et le troisième encore de verre, formé par la dernière face de l'appareil. Suivons sa marche à travers ces différens milieux.

Pour plus de simplicité, je supposerai que nos trois prismes ont leur sommet au même point A, comme le représente la fig. 43 ; c'est-à dire que je regarderai ε et ε_1 comme positifs dans cette supposition. S'il arrive qu'un des prismes de verre, ou tous les deux, soient opposés au grand prisme, les valeurs de leurs angles réfringens devront être regardées comme négatives, et seront données comme telles par les observations.

En conservant ici les dénominations que nous avons déjà employées pour la réfraction des autres corps, nommons φ l'angle SIB, que le rayon incident SI forme avec la surface antérieure du premier prisme de verre, cet angle étant compté à partir de la base du grand prisme, comme nous l'avons fait précédemment. Nommons de même φ_1 φ_2 $\varphi_3 \ldots \varphi_7$ les angles

successifs formés par le rayon réfracté avec les autres surfaces réfringentes, dans le sens où ils sont indiqués par la figure. La première réfraction se fera d'abord à la rencontre de la première glace, et en désignant par n le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction, quand la lumière passe de l'air dans le verre, on aura d'abord

$$\cos \phi = n \cos \varphi_1.$$

La valeur de n dépend de la nature du verre et de la densité de l'air extérieur. Sous le premier rapport, elle est constante dans toutes les observations faites avec le même prisme ; sous le second, elle est variable avec les modifications accidentelles de l'atmosphère. Mais on verra, par le calcul, que la petitesse des angles $\varepsilon\ \varepsilon_1$ rend presque nulle l'influence de cette quantité; et cela est facile à concevoir, puisque, si les angles ε, ε_1 étaient tout-à-fait nuls, les deux surfaces de chaque glace seraient exactement parallèles, et leur interposition n'aurait aucune influence sur les déviations observées, quel que fût d'ailleurs leur pouvoir de réfraction.

Le même rayon, continuant sa route dans la glace, vient tomber sur la seconde face avec un angle ϕ_2 ou $\varphi_1 + \varepsilon$, puisque ε est l'angle des deux surfaces : de là il se réfracte dans le gaz intérieur. Si celui-ci était de même nature et de même densité que l'air atmosphérique situé hors du prisme, le rapport de réfraction serait le même que pour la première face, c'est-à-dire égale à n ; mais cette identité n'ayant pas lieu, il sera en général différent de n, et on pourra le représenter par $\frac{n}{1 - \omega}$, expression dans laquelle ω sera positive, nulle ou négative, selon que le gaz intérieur réfracte plus, ou autant, ou moins que l'air extérieur ; car, dans le premier cas, le rapport de réfraction doit être plus grand que n ; dans le second, il doit être égal ; et dans le troisième, il doit être moindre. On aura donc

$$\cos \varphi_3 = \frac{n}{1 - \omega} \cos (\varphi_1 + \varepsilon).$$

Le rayon continuant sa route à travers le gaz, arrive sur la face intérieure de la seconde glace du prisme. Il fait alors avec elle un angle ϕ_4 égal à $\phi_3 + a$, a étant le grand angle réfringent intérieur. Arrivé dans cette glace, il y subit une nouvelle réfraction inverse de celle qu'il avait éprouvée en entrant dans le gaz; et en nommant ϕ_5 l'angle qu'il fait ensuite avec cette même face, on a

$$\cos(\phi_3 + a) = \frac{n}{1 - \omega} \cos \phi_5,$$

où n et ω sont les mêmes que pour la première glace, puisque les substances réfringentes sont les mêmes. Enfin ce rayon, en continuant sa route, tombe sur la surface postérieure de la seconde glace. Il fait alors avec elle un angle $\phi_5 + \varepsilon_1$; et comme il repasse dans l'air sous l'angle ϕ_7, on a de même que pour la première glace,

$$\cos \phi_7 = n \cos(\phi_5 + \varepsilon_1').$$

Toute la marche de ce rayon, depuis son incidence jusqu'à son émergence, se trouve donc ainsi déterminée par les quatre équations précédentes, qui, en partant de l'incidence, laquelle doit être donnée, font successivement connaître

$$\phi_1 \quad \phi_3 \quad \phi_5 \quad \phi_7.$$

Maintenant, si du point O, où l'observateur se trouve, on mène le rayon direct O S à l'objet, l'angle S O I''' sera la déviation, que nous avons appelée Δ. Elle sera telle que la représente la fig. 43, lorsque le système des trois prismes réfractera plus fortement que l'air extérieur; si, au contraire, ce système réfracte moins que l'air, comme cela arrive, par exemple, quand on fait le vide dans l'intérieur du prisme, la déviation se fait en sens opposé, comme le représente la fig. 44. Ce cas étant le plus important, puisque c'est le premier que l'on doit étudier pour connaître la réfraction de l'air atmosphérique, nous y adapterons nos formules, c'est-à-dire que nous représenterons la déviation S O I''' par $+ \Delta$, quand elle rejettera l'image réfractée vers la base du prisme, comme dans la fig. 44; ce qui lui donnera des valeurs négatives, quand l'image

se trouvera rejetée vers le sommet, comme dans la fig. 43. D'après cette convention, la somme des angles intérieurs du polygone OSII′ I″ I‴, fig. 44, sera

$$720^\circ + \delta - \varphi + \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_6 + \varphi_7 + \Delta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$720^\circ + \delta - \varphi - \varepsilon - a - \varepsilon_1 + \varphi_7 + \Delta.$$

Or cette somme doit se réduire à 720°, puisque le polygone a six côtés : il faut donc qu'on ait

$$0 = \delta - \varphi - \varepsilon - a - \varepsilon_1 + \varphi_7 + \Delta;$$

d'où
$$\Delta = \varphi - \varphi_7 + a + \varepsilon + \varepsilon_1 - \delta.$$

D'après cela, pour trouver la valeur numérique de la déviation, quand on connaît les rapports de réfraction et les angles des prismes, il ne faut que résoudre les quatre équations

$$\cos\varphi = n\cos\varphi_1,$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{n}{1-\omega}\cos(\varphi_1 + \varepsilon),$$

$$\cos(\varphi_3 + a) = \frac{n}{1-\omega}\cos\varphi_5,$$

$$\cos\varphi_7 = n\cos(\varphi_5 + \varepsilon_1),$$

desquelles il s'agit de déduire le dernier angle φ_7, sinon exactement, du moins avec un degré suffisant d'approximation.

Ici, l'approximation doit être fondée sur ce que les quantités ε ε_1 et ω sont extrêmement petites ; les premières, parce que les glaces sont presque parallèles ; la dernière, parce que la réfraction des substances aériformes étant toujours fort petite, la différence d'où dépend ω doit être fort petite entre celle du gaz renfermé dans le prisme et celle de l'air extérieur.

En profitant de ces circonstances, on peut obtenir la valeur de φ_7 en une série convergente ordonnée suivant les puissances de ces quantités ε ε_1 et ω ; mais cela exige l'emploi du calcul différentiel. Je n'en rapporterai donc ici que le résultat, qui, en se bornant aux deux premières puissances, est

$$\phi_7 = \varphi + a + \omega\left[\frac{1}{\text{tang}(\varphi+a)} - \frac{1}{\text{tang}\,\varphi}\right] + \frac{\varepsilon\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}{\sin\varphi} + \frac{\varepsilon_1\sqrt{n^2-\cos^2(\phi+a)}}{\sin(\phi+a)}$$
$$-\frac{\omega^2}{1.2}\left[\frac{1}{\text{tang}(\varphi+a)}\left(\frac{1}{\text{tang}(\varphi+a)} - \frac{1}{\text{tang}\,\phi}\right)^2 - \frac{1}{\text{tang}^2\varphi}\left(\frac{1}{\text{tang}(\varphi+a)} - \frac{1}{\text{tang}\,\varphi}\right)\right].$$

Je n'ai porté l'approximation que jusqu'aux premières puissances de ε et ε_1, parce que, dans notre prisme, la déviation due au défaut de parallélisme, de laquelle ces termes dépendent, n'était que de 15 ou 20″ ; et le peu d'influence de ces termes se trouve, en effet, confirmé par l'accord parfait des expériences avec la série ainsi limitée.

Il serait naturel de se demander pourquoi nous cherchons ici à obtenir ϕ_7 en série, tandis que, pour les liquides et les solides, nous nous sommes bornés à résoudre successivement, par le calcul numérique, les équations qui déterminent le dernier angle ; mais on remarquera que les rapports de réfraction étant alors très-sensiblement différens de l'unité, le calcul des angles successifs pouvait s'effectuer, par les tables de logarithmes, avec assez d'exactitude, tandis qu'ici, où les réfractions sont fort petites, le calcul pourrait entraîner dans des erreurs, à cause des grands angles, qu'il faudrait calculer pour avoir, par leurs différences, des réfractions qui sont fort petites ; au lieu qu'on ne court aucun risque en exprimant les résultats par des séries dont les termes successifs sont multipliés par les puissances de fort petites quantités, telles que ε ε_1 et ω. Enfin, sous cette forme, les relations de Δ avec ω deviennent plus apparentes, et sont plus faciles à comparer aux observations.

Parmi toutes les situations que l'on peut donner au prisme, à l'égard des rayons incidens, il en est une principalement avantageuse, en ce que la déviation Δ y est très-peu influencée par les changemens de l'incidence ϕ ; de sorte que si, dans le retournement du prisme, on ne ramène pas ses faces à des positions exactement pareilles, ce qui change nécessaire-

ment l'incidence, on ne laisse pas pour cela d'observer sensiblement la même déviation. Afin de découvrir cette disposition favorable, reprenons l'expression générale de Δ, qui est

$$\Delta = \varphi - \varphi_7 + a + \varepsilon + \varepsilon_i - \delta.$$

Les quatre derniers termes sont constans dans toutes les observations; mais si l'on fait varier φ d'une petite quantité $d\varphi$, φ_7 variera, en conséquence, d'une petite quantité $d\varphi_7$; et le changement total de Δ sera

$$d\Delta = d\varphi - d\varphi_7.$$

Maintenant, pour trouver $d\varphi_7$, il faut faire varier φ dans l'expression de cet angle que nous avons tout-à-l'heure déterminé; et même il suffit d'introduire cette variation dans les seuls termes de φ_7, qui sont multipliés par la première puissance de ω; car les autres sont si faibles, qu'un petit changement de φ y serait tout-à-fait insensible. On trouve ainsi

$$d\varphi_7 = d\varphi - \omega d\varphi \left[\frac{1}{\sin^2(\varphi + a)} - \frac{1}{\sin^2 \varphi}\right];$$

et par suite,

$$d\Delta = \omega d\varphi \left[\frac{1}{\sin^2(\varphi + a)} - \frac{1}{\sin^2 \varphi}\right].$$

On voit donc que l'on peut rendre $d\Delta$ insensible, en déterminant l'incidence φ de manière à rendre nul le coefficient de $\omega d\varphi$ dans le second membre. Pour cela, il faut faire

$$\varphi + a = \pm\varphi, \qquad \text{ou bien } \varphi + a = \pm(180^\circ - \varphi).$$

De ces quatre solutions, deux sont inadmissibles, parce qu'elles supposeraient a nul ou égal à 180°; une troisième l'est également, parce qu'elle donne φ négatif, et qu'il doit être positif, pour que le rayon incident vienne de dehors du prisme. Il reste donc la dernière, qui donne

$$\varphi = 90^\circ - \tfrac{1}{2} a.$$

Celle-ci exige que le rayon incident SI soit perpendiculaire à la ligne AP, qui divise le grand angle réfringent a en deux

parties égales. En l'introduisant dans l'expression générale de φ_7, elle la réduit à cette forme beaucoup plus simple :

$$\varphi_7 = \varphi + a - 2\,\omega \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a + \frac{(\varepsilon + \varepsilon_1)\sqrt{n^2 - \sin^2 \frac{1}{2} a}}{\cos \frac{1}{2} a} + \omega^2 \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} a;$$

et enfin, en substituant cette valeur dans Δ, il vient

$$\Delta = 2\omega \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a - \omega^2 \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} a - \delta + (\varepsilon + \varepsilon_1)\left(1 - \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \frac{1}{2} a}}{\cos \frac{1}{2} a}\right).$$

Nous avons tâché de disposer le prisme et le cercle répétiteur de manière que la condition indiquée par ces formules fût toujours remplie ; pour cela, nous nous sommes d'abord placés de manière que le plan du cercle coïncidât avec le plan de l'angle réfringent, et qu'en même temps la ligne des nœuds de ce plan sur l'horizon fût perpendiculaire au rayon visuel mené à la mire : nous nous sommes assurés d'avoir atteint cette position, quand la mire, une fois placée sous le fil horizontal de la lunette à travers le vide ou à travers l'air, n'a plus été déviée verticalement, lorsque l'on faisait tourner le prisme de deux angles droits, et ne faisait que s'écarter également à droite et à gauche du fil vertical. Nous avons en même temps déterminé cette mire de manière que la clarté de la vision fût la plus grande possible ; et comme notre prisme est très-long et très-étroit, il n'y a aucun doute que le rayon visuel devait être alors dirigé à très-peu près suivant son axe, conformément à la condition que le calcul vient de nous indiquer. Aussi pouvait-on y reconnaître le caractère particulier à cette position ; car en tournant le prisme à droite ou à gauche dans une étendue de plusieurs degrés, la mire, une fois placée sous le fil de la lunette, n'était nullement déviée par ce mouvement. Si donc, lorsque nous avons mesuré les déviations Δ par la répétition des angles, le prisme, dans ses retournemens successifs, n'a pas toujours été ramené identiquement aux mêmes positions d'incidence, la déviation n'a pas pu en être affectée d'une

quantité sensible, résultat fort important pour la sûreté des observations.

L'expression que nous venons d'obtenir pour Δ renferme deux parties distinctes : l'une dépend de ω et de a, c'est-à-dire de la réfraction du gaz intérieur et de l'ouverture du prisme ; l'autre dépend de $\varepsilon\ \varepsilon_{\prime}$ et δ, c'est-à-dire du défaut de parallélisme des faces et de l'éloignement de la mire. Ces diverses causes de variations s'ajoutent et se superposent pour produire l'effet total, comme leur petitesse nous l'avait fait prévoir ; mais les termes de la première classe varient avec la nature du gaz intérieur et l'état de l'atmosphère ; au lieu que les termes de la seconde classe sont constans dans toutes les observations. On peut donc les déterminer, en observant la déviation qui subsiste encore lorsque le prisme intérieur est rempli d'air atmosphérique, et communique librement avec l'atmosphère ; ce qui rend ω nul. Si donc on trouve cette déviation égale à $+D$, on aura

$$D = -\delta + (\varepsilon + \varepsilon_{\prime})\left(1 - \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \frac{1}{2} a}}{\cos \frac{1}{2} a}\right).$$

D'après les conventions que nous avons précédemment faites, il faudra attribuer à D le signe $+$, quand la déviation, ainsi observée, rejettera le rayon réfracté vers la base du prisme, dans le même sens que l'air raréfié. Connaissant ainsi D, on aura ensuite pour tout autre gaz

$$\Delta = D + 2\omega \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a - \omega^2 \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} a.$$

Cette équation ne contient plus que deux variables, Δ et ω, dont l'une quelconque, une fois connue, déterminera l'autre. Si l'on se donne la valeur de ω pour le gaz intérieur, on en conclura la déviation apparente Δ qu'elle doit produire. Si, au contraire, Δ est observé, l'équation déterminera ω, et l'on aura, par le retour des suites,

$$\omega = \frac{(\Delta - D)}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} a} + \frac{(\Delta - D)^2}{8}.$$

Dans cette expression, $\Delta - D$ représente évidemment la déviation corrigée du défaut de parallélisme des faces, telle qu'on l'observerait sur un signal infiniment éloigné, et à travers un prisme où $\varepsilon\ \varepsilon_1$ seraient nuls. Il faut toujours se souvenir que les déviations observées, Δ et D, doivent se prendre positivement, quand elles s'exercent dans le sens de l'air raréfié, et négativement, quand elles sont dans le sens de l'air condensé. Enfin, comme ω doit être un nombre abstrait, il faudra substituer dans la formule, au lieu de l'arc $\Delta - D$, son sinus ; ce qui est permis dans le degré d'approximation que nous avons adopté.

Il est temps d'examiner de plus près ce que représente physiquement la variable ω ; car jusqu'ici nous l'avons simplement employée d'une manière analytique. Pour cela, supposons qu'après l'avoir déterminée relativement à un certain gaz, nous remplissions de ce même gaz un nouveau prisme, en conservant exactement les mêmes degrés de pression et de température. Si nous voulons calculer la marche d'un rayon visuel à travers ce nouveau prisme, le trajet dans la première glace donnera d'abord

$$\cos\varphi = n\cos\varphi_1 \qquad \cos\varphi_3 = \frac{n}{1-\omega}\cos(\varphi_1+\varepsilon).$$

Mais rien ne nous oblige à supposer cette glace prismatique. Prenons-la, au contraire, à surfaces rigoureusement parallèles ; alors ε sera nul, et il viendra

$$\cos\varphi = n\cos\varphi_1 \qquad \cos\varphi_3 = \frac{n}{1-\omega}\cos\varphi_1,$$

d'où l'on tire $\qquad \cos\varphi = (1-\omega)\cos\varphi_3.$

Cette relation, ne contenant plus n, se trouve absolument indépendante de l'action que la glace exerce sur les rayons lumineux. Elle subsisterait donc encore quand même n serait égal à 1 ; ce qui arriverait si la substance de la glace ne déviait point du tout la lumière, ou si elle était assez amincie pour

que son action sur les rayons lumineux fût insensible. Or, il est évident qu'alors $\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_3}$ serait le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, pour un rayon qui passerait directement de l'air extérieur dans le gaz intérieur. Telle est donc en général la signification de la quantité $1 - \omega$. Aussi trouve-t-on qu'elle est constante pour un même gaz, quel que soit l'angle du prisme dans lequel on l'enferme, et quelle que soit l'incidence sous laquelle on le présente aux rayons lumineux, pourvu que la densité de ce gaz et celle de l'air extérieur soient toutes deux constantes.

Pour donner un exemple de ces calculs, je les appliquerai à une observation faite par M. Arago et moi, le 26 janvier 1805. Le gaz intérieur au prisme était de l'air raréfié par la pompe pneumatique, au point de ne plus avoir qu'une tension de $0^m,003$. La température de l'air extérieur était celle de la glace fondante. Le baromètre s'y tenait à $0^m,7664$, et l'hygromètre à 81°; ce qui indique une saturation presque complète. La déviation apparente observée dans les circonstances se trouve de 5′ 48″,1 dans le sens de l'air raréfié. La déviation constante due au non-parallélisme des faces était de 16″,6 dans le sens de l'air condensé; enfin l'angle réfringent du prisme intérieur, mesuré par la réflexion de la lumière, était de 143° 7′ 28″. Les données de l'expérience sont donc

$$\Delta = +5' 48'',1 \qquad D = -16'',6 \qquad a = 143^\circ 7' 28''.$$

De là on tire

$$\Delta - D = 6' 4'',7 \qquad \log \sin(\Delta - D) = \bar{3},2475100$$

$$\tfrac{1}{2} a = 71^\circ 33' 44'' \qquad \log \tang \tfrac{1}{2} a = 0,4770498;$$

et avec ces élémens, on trouve

$$\omega = 0,000294734 + 0,000000391 = 0,000295125;$$

par conséquent

$$1 - \omega = 0,999704875 = \frac{3388}{3389}.$$

Tel était donc le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, lorsque les rayons lumineux passaient de l'air atmosphérique dans le vide imparfait du prisme, sous les diverses circonstances désignées plus haut. Nous verrons bientôt de quelle manière ce rapport varie avec la densité de l'air extérieur et intérieur, comme aussi avec la nature du gaz contenu dans le prisme.

La petitesse de la déviation D, produite par le défaut de parallélisme des glaces, montre que l'inclinaison de leurs surfaces était extrêmement petite, ou que leur effet prismatique était presque exactement compensé par leur opposition. On peut rendre ce résultat plus évident encore, en calculant la somme des angles $\varepsilon + \varepsilon_1$ d'après la déviation D observée. En effet, dans la position où nos observations sont faites, nous avons vu que l'on avait

$$(\varepsilon + \varepsilon_1)\left(1 - \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \frac{1}{2} a}}{\cos \frac{1}{2} a}\right) = D.$$

Ici nous trouvons, par l'expérience, $D = -16'',6$; d'ailleurs, le rapport de réfraction n, pour le verre ordinaire, est égal à $\frac{3}{2}$; et enfin l'angle a du prisme est de $143^\circ\ 7'\ 28''$. Avec ces données, le coefficient de $\varepsilon + \varepsilon_1$ peut se réduire en nombres, et il devient $-2,67373$. On a donc

$$\varepsilon + \varepsilon_1 = \frac{-16'',6}{-2,673} = 6'',209.$$

Telle était alors la somme des deux angles prismatiques formés par les faces des glaces. Quel que soin qu'on eût apporté pour rendre chacune d'elles parallèles, il est vraisemblable qu'elles ne l'étaient pas avec ce degré d'exactitude ; mais on avait affaibli l'influence de l'erreur en prenant les deux glaces dans un même morceau bien travaillé, que l'on coupait dans le sens du petit angle, qui pouvait rester encore ; car alors, en opposant les deux morceaux l'un à l'autre dans la construction du grand prisme de gaz, les effets de leurs angles s'entre-détruisaient mutuellement, l'un agissant comme positif, l'autre comme négatif.

CHAPITRE II.

Des Lentilles sphériques.

Les méthodes que nous avons employées pour calculer les déviations que les rayons lumineux subissent en traversant des prismes terminés par des faces planes, peuvent s'appliquer au cas général où le milieu réfringent est terminé par des surfaces courbes quelconques. Car ici, comme dans la réflexion de la lumière, on peut assimiler les rayons à des lignes droites mathématiques, dont la réfraction sur chaque point d'une surface s'opère exactement de la même manière qu'elle se ferait sur le plan tangent. Il suffit donc de calculer la position de ce plan, à chaque point d'incidence, pour déterminer la déviation que le rayon lumineux doit éprouver; et ce calcul est toujours possible, quand la forme de la surface est donnée.

Dans les applications usuelles de l'optique, il n'est nullement nécessaire de s'élever à cette généralité; car on n'y emploie jamais que des verres sphériques, parce que ce sont les seuls qui puissent s'exécuter avec exactitude et facilité; il suffit donc d'analyser et de calculer les réfractions qu'ils produisent. Pour le faire avec toute la simplicité possible, et même pour bien comprendre les résultats que l'analyse peut nous indiquer, il faut prendre d'abord une connaissance générale de cette espèce de verres, et se mettre au fait de leurs propriétés principales.

Si l'on conçoit une ligne droite, ou *axe*, menée par les centres des deux surfaces sphériques qui terminent un pareil verre, et qu'ensuite on dirige un plan coupant suivant cet axe, on aura le *profil* du verre, qui, selon la direction des courbures que l'on peut donner aux deux surfaces, aura nécessairement l'une des formes représentées dans les fig. 45, 46, 47, 48, 49, 50.

On distingue ces diverses formes par des dénominations qui sont adoptées généralement :

1°. Verre doublement convexe, fig. 45. La ressemblance de cette espèce de verre avec une lentille lui en a fait donner le nom, qui s'est étendu ensuite à tous les autres verres sphériques.

2°. Plan convexe, fig. 46. La concavité et la convexité est toujours considérée relativement aux objets situés hors du verre.

3°. Concave, convexe, fig. 47 et 48. Ces deux formes diffèrent l'une de l'autre en ce que la première est plus mince au bord qu'au centre, et que la seconde, au contraire, est plus mince au centre qu'au bord. Nous verrons bientôt les particularités qui résultent de cette dissemblance dans la construction.

4°. Plan concave, fig. 49.

5°. Doublement concave, fig. 50.

Toutes ces formes de verres s'accordent en ce point, que les plans tangens aux deux surfaces sphériques qui les terminent sont d'abord parallèles entre eux aux points A_1 A_2 où la lentille est percée par son axe; de là jusqu'aux bords du verre, l'angle des deux plans tangens va toujours en augmentant de plus en plus, et symétriquement de chaque côté de l'axe. Un rayon lumineux qui traverse un pareil verre se réfracte précisément comme il ferait dans un prisme qui serait formé par les deux plans tangens aux points d'incidence et d'émergence. Une lentille sphérique, quelle que soit sa forme, peut donc être considérée comme un assemblage de pareils prismes, ou comme un prisme d'ouverture variable, dont l'angle réfringent, d'abord nul sur l'axe $A_1 A_2$ de la lentille, va ensuite en augmentant jusqu'à ses bords.

D'après cela, toutes les formes de verres sphériques que nous avons décrites peuvent se partager en deux classes, selon que la base ou la pointe des prismes réfringens est tournée vers l'axe A_1 A_2 de la lentille. La première classe comprendra les fig. 45, 46, 47; la seconde, les fig. 48, 49, 50.

Il est facile de concevoir l'influence de cette différente disposition des prismes sur la marche des rayons lumineux. Car si l'on imagine un faisceau de rayons incidens parallèles entre eux et à l'axe A_1 A_2 des lentilles, il est évident que toutes celles de

la première classe réfracteront ces rayons vers l'axe $A_1 A_2$, tandis que celles de la seconde classe, au contraire, les en écarteront. Ainsi les premières feront converger la lumière du faisceau incident, et les autres la feront diverger; aussi a-t-on donné à ces deux classes de lentilles le nom de *verres convergens* et *verres divergens*.

Examinons de plus près la manière dont ces phénomènes se produisent, et commençons par la première espèce de lentille dont le type général est représenté par la fig. 51. Dans le nombre des rayons qui composent le faisceau incident parallèle à l'axe $A_1 A_2$, il en est un $S A_1$ qui coïncide avec cet axe lui-même. Celui-là traverse la lentille aux points où les deux surfaces qui la terminent sont parallèles. De plus, son incidence et son émergence se fait perpendiculairement à ces deux surfaces. Il n'en éprouve donc absolument aucune déviation, et il passe en conservant sa direction primitive $S A_1 F$. Mais il n'en est plus ainsi pour les rayons incidens situés à une petite distance de l'axe. Ceux-ci éprouvent une réfraction, à la vérité fort petite, parce que l'angle réfringent du prisme qui les courbe est peu considérable. Ils vont donc couper le premier rayon quelque part en F. A mesure que les rayons incidens s'éloignent de l'axe, la déviation qu'ils subissent est plus forte; ils se coupent donc successivement les uns les autres en F_1 F_2..., et l'ensemble de toutes ces intersections supposées infiniment rapprochées les unes des autres forme en général deux branches de courbe qui commencent au point F, où se coupent les rayons très-voisins de l'axe, et se terminent en F_2 sur le prolongement du dernier rayon qui traverse la lentille à ses bords. Ces courbes se nomment des *caustiques*. Mais lorsque les surfaces de la lentille ne comprennent qu'un très-petit nombre de degrés sur les sphères suivant lesquelles elles sont travaillées, l'expérience montre qu'il se rassemble beaucoup plus de rayons au point F qu'en tout autre: de sorte que la courbe $F F_1 F_2$ s'y concentre alors presque entièrement; aussi donne-t-on à ce point le nom de *foyer*. Quant à la manière de déterminer sa position, nous la tirerons bientôt de la théorie.

En raisonnant de même sur les lentilles divergentes dont le

type général est représenté par la fig. 52, on concevra de même qu'elles doivent former deux branches de courbe FF_1F_2 également symétriques au-dessus et au-dessous de l'axe; mais le foyer principal F des rayons voisins de l'axe tombe du même côté de la lentille que les rayons incidens; de sorte qu'il ne se fait pas une concentration réelle de lumière en ce point, non plus que sur tout autre point de la courbe des intersections. Alors cette courbe indique seulement le lieu où concourent les directions des rayons émergens.

Dans toutes les figures que nous avons jusqu'ici considérées, les lentilles sont représentées comme parfaitement symétriques autour de l'axe A_1A_2; en sorte que cet axe contient aussi le centre de figure de leur contour extérieur. Quand cela a lieu, on dit que le verre est *exactement centré;* et cette condition est très-importante pour les usages optiques, comme on le concevra bientôt. Lorsqu'elle n'est pas satisfaite, l'épaisseur de la lentille à ses bords est nécessairement inégale, comme le montre la fig. 53, dans laquelle A_1A_2 est réellement l'axe commun des deux surfaces sphériques, tandis que B_1B_2 est l'axe apparent mené par les centres des deux cercles qui forment le contour extérieur du verre.

Il suit de là que les lentilles convergentes sont nécessairement centrées, lorsqu'elles sont tranchantes par les bords; car leurs épaisseurs sur ces bords étant nulles sont égales partout. Au reste, lorsque nous aurons appris à reconnaître par expérience la position des foyers, nous verrons qu'on peut s'en servir avec beaucoup d'exactitude pour vérifier le centrage dans toute espèce de lentille.

D'après ce que nous avons dit plus haut sur la formation des caustiques, on doit comprendre que, pour les verres comme pour les miroirs, la concentration des rayons se fera toujours d'autant plus exactement qu'ils passeront plus près de l'axe des lentilles qu'ils traversent : aussi dans les instrumens d'optique est-on souvent obligé de couvrir les bords des lentilles et une portion de leurs surfaces avec des anneaux circulaires opaques que l'on nomme *diaphragmes.* Les rayons lumineux

ne tombent plus alors que sur la portion circulaire et centrale de la surface de la lentille qui n'a point été couverte. Le diamètre de cette portion restante se nomme l'*ouverture du verre.*

En général, dans les usages optiques qui demandent de l'exactitude, on ne donne jamais aux lentilles que des ouvertures très-petites, comparativement aux rayons de leurs courbures, et l'on n'y admet que des faisceaux lumineux très-peu inclinés sur l'axe qui joint les centres de leurs surfaces ; ce sont là les seuls moyens d'obtenir de la netteté dans la vision. Il en résulte que, soit dans leur incidence, soit dans leur émergence, les faisceaux rencontrent toujours les surfaces de la lentille presque perpendiculairement ; ce qui affaiblit les déviations qu'ils éprouvent, et facilite singulièrement les calculs par lesquels on peut les déterminer.

Pour fixer les circonstances de cette disposition d'une manière géométrique, considérons d'abord un seul point rayonnant S, fig. 54, placé au-devant de la première surface d'un verre sphérique. Par ce point et l'axe du verre menons un plan qui coupera la lentille suivant un de ses profils $A_1 A_2$; nous devrons toujours supposer que les rayons émanés du point S sont pendant toute leur route très-peu inclinés sur l'axe $A_1 A_2 X$, et que leurs points d'incidence et d'émergence $I_1 I_2$ sont très-peu éloignés de cet axe, comparativement aux rayons des deux sphères dont le verre est formé.

Si plusieurs lentilles sphériques sont placées sur le même axe que la première, et que le faisceau émané du point S les traverse successivement, il est évident que ceux des rayons incidens qui sont compris dans le plan de la figure y resteront toujours, puisqu'il est normal à toutes les surfaces qu'ils traversent. Mais les rayons qui s'en écartent au-dessus ou au-dessous passeront successivement dans différens plans d'incidence et de réfraction ; ce qui semble devoir rendre leur marche plus difficile à calculer. Heureusement ce calcul n'est nullement nécessaire lorsque les incidences et les émergences sont très-petites, comme on doit toujours le supposer dans les instrumens d'optique ; car ces rayons sont alors ramenés précisément aux mêmes foyers que les

autres; de sorte qu'il suffit de considérer les premiers pour trouver le lieu où se forme l'image de chaque point rayonnant; et l'exactitude de ce concours n'est pas seulement de l'ordre des quantités que nous considérons ici comme très-petites; elle subsiste même dans les termes du troisième ordre, et ce n'est que dans les termes plus éloignés qu'elle cesse d'avoir lieu. La démonstration de cette propriété supposerait un calcul trop long pour trouver place ici; mais on peut la regarder comme certaine, et l'expérience la confirme très-exactement. En l'admettant, nous n'aurons plus à considérer que la marche des rayons compris dans le plan mené par le point rayonnant, et l'axe commun de toutes les lentilles.

Soit donc, fig. 55, MAM'A' l'intersection de la lentille par ce plan, et désignons le point rayonnant par S. Je représente ici les deux surfaces de la lentille comme concaves vers ce point, parce que cette construction rend les formules plus symétriques, sans diminuer la généralité de leurs applications. Cela posé, SI étant un rayon incident quelconque, menons du point I la normale ZIC dirigée au centre de courbure de la première surface; CIS sera l'angle d'incidence dont le sinus devra être au sinus de réfraction en raison constante. Soit n le rapport du premier de ces sinus au second pour l'espèce de verre dont la lentille est faite, en supposant que les rayons y pénètrent en sortant du vide, il n'y aura qu'à mener la ligne I'IR de manière

que l'on ait $$\sin \mathrm{I'IZ} = \frac{1}{n} \sin \mathrm{CIS},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\sin \mathrm{CIR} = \frac{1}{n} \sin \mathrm{CIS};$$

et cette ligne sera la direction du rayon réfracté par la première surface MAM.

Comme nous ne voulons considérer que des incidences très-petites, nous pouvons substituer le rapport des angles CIR, CIS à celui de leurs sinus; ce qui donnera simplement

$$\mathrm{CIR} = \frac{1}{n} \mathrm{CIS}.$$

Conformément à la notation que nous avons employée pour les miroirs, appelons V, X, X′ les angles successifs formés avec l'axe de la lentille par la normale IC, et par les deux rayons incidens et réfractés. Puisque le rayon, en entrant dans le verre, se rapproche de la normale CIZ, il est clair que le point R tombera entre C et S. On aura donc

$$CIS = V - X \qquad CIR = V - X';$$

et en substituant ces valeurs dans la relation trouvée entre les deux angles, il viendra

$$nX' = X + (n - 1)V.$$

Si l'on faisait $n = -1$ dans cette formule, on retomberait précisément sur celle que nous avons trouvée pour la réflexion sur un miroir; et en effet, il est évident que la réflexion peut être considérée comme une réfraction dans laquelle le rapport constant des sinus est -1. Maintenant le rayon réfracté II′, étant prolongé jusqu'à la seconde surface de la lentille, devient incident à son tour, et toutes les considérations précédentes deviennent encore applicables à la seconde réfraction qu'il éprouve; seulement, comme nous supposerons qu'il rentre dans le vide, il faudra changer le rapport de réfraction n en $\frac{1}{n}$; à cela près, la formule restera la même. Désignant donc le rayon émergent par I″I′R′, et par I′C′ la normale à la seconde surface, nous nommerons X″ et V′ les angles que ces deux droites forment avec l'axe de la lentille, et nous aurons

$$\frac{X''}{n} = X' + \left(\frac{1}{n} - 1\right)V', \qquad \text{d'où} \qquad X'' = nX' - (n-1)V'.$$

Si nous éliminons l'angle X′ entre cette équation et la précédente, nous aurons tout de suite la relation qui doit exister entre les angles X X″ que le rayon incident et le rayon réfracté forment avec l'axe; ce sera

$$X'' = X + (n - 1)(V - V'). \qquad (1)$$

Il ne reste plus qu'à calculer les angles V V′, d'après la position donnée du point d'incidence sur la lentille. Pour cela, par ce point, et par le point d'émergence, menons à l'axe les ordonnées IP, I′P′ que nous nommerons y et y', et nommons aussi r, r' les

rayons des sphères sur lesquelles les deux surfaces sont travaillées; nous aurons rigoureusement

$$\sin V = \frac{y}{r} \qquad \sin V' = \frac{y'}{r'}.$$

Il est évident que la seconde ordonnée y' dépend de la premiere y, de l'épaisseur de la lentille et de la direction du rayon réfracté ; mais, sans chercher à calculer cette dépendance, nous remarquerons que, dans les usages ordinaires de la physique, on emploie des lentilles dont l'épaisseur est fort petite, comparativement aux rayons de leurs surfaces ; de sorte que les termes de y' qui dépendraient de cette épaisseur, devant se trouver divisés par r', seront par cela même fort atténués ; et ils le seront bien davantage encore par la petitesse supposée de l'angle X' que le rayon réfracté forme avec l'axe de la lentille ; car si X' était tout-à-fait nul, ce rayon deviendrait parallèle à l'axe, et y' serait rigoureusement égal à y. Par ce double motif, nous pourrons, sans erreur sensible, supposer $y = y'$ dans tous nos calculs.

Enfin, comme ce sont surtout les distances focales qui nous intéressent, nommons Δ la distance A L du centre de figure de la première surface, au point où l'axe est coupé par le rayon incident; et désignons par Δ' la distance analogue A' R', comptée de même pour le rayon émergent, à partir de la seconde surface. En négligeant les sinus verses A P, A' P', qui sont très-petits, du second ordre, nous aurons

$$\text{tang } X = \frac{y}{\Delta} \qquad \text{tang } X'' = \frac{y'}{\Delta'}.$$

Et nous pourrions, par les mêmes motifs que tout-à-l'heure, supposer ici y' égal à y. Or, la petitesse des angles V, V', X, X'', sur lesquels nous opérons, nous permet de substituer à leurs rapports, dans l'équation (1), celui de leurs sinus ou de leurs tangentes; ce qui donne alors

$$\text{tang } X'' = \text{tang } X + (n - 1)\,(\sin V - \sin V').$$

Maintenant, si nous mettons pour ces diverses quantités leurs

valeurs, y disparaît comme facteur commun, et il reste

$$\frac{1}{\Delta'} = \frac{1}{\Delta} + (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right). \qquad (2)$$

La disparition de y nous apprend que cette relation est commune à tous les rayons incidens qui partent du même point S, quel que soit d'ailleurs l'endroit de la lentille où ils tombent. Plaçons le point S sur l'axe même de la lentille; alors Δ sera le même pour tous les rayons qui en émanent. Par conséquent, selon notre formule, Δ' sera aussi le même pour les rayons réfractés. Tous ces rayons, après la réfraction, rencontrent donc encore l'axe en un même point R', situé à la distance Δ' de la seconde surface; distance que l'on pourra calculer par notre formule, lorsque l'on connaîtra $r\,r'$ et Δ, c'est-à-dire les rayons des deux surfaces de la lentille, et la distance du point S de l'axe d'où les rayons lumineux divergent.

Si ce point s'éloigne à l'infini, le faisceau des rayons incidens devient parallèle à l'axe; alors $\frac{1}{\Delta}$ est nul, et la formule se réduit à

$$\frac{1}{\Delta'} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

Δ' s'appelle alors la *distance focale principale* de la lentille; nous la représenterons en général par F.

Le signe de cette distance est uniquement déterminé par celui de la différence $r' - r$. S'il est positif, le foyer principal tombe en avant de la lentille, du côté des rayons incidens, fig. 56. Alors les rayons lumineux ne s'y réunissent pas réellement, et il n'indique que le point où leurs directions concourent; c'est le cas des lentilles divergentes, quelle que soit leur forme.

Au contraire, si $r' - r$ est négatif, la distance Δ' devient aussi négative, c'est-à-dire qu'elle doit se prendre sur l'axe, à partir de la seconde surface de la lentille, en sens contraire de ce que notre première construction supposait. Alors le foyer principal est situé au-delà de la lentille. Les rayons lumineux s'y réunissent réellement, et il s'y forme une concentration

effective de chaleur et de lumière; c'est le cas des lentilles convergentes, fig. 57.

Toutes les variétés de formes que présentent ces deux classes de lentilles dépendent, comme on voit, des signes et des grandeurs de leurs rayons. Le signe indique le sens de la courbure. Nous l'avons supposé positif pour les surfaces qui tournent leur concavité vers les points rayonnans. Il faut donc le supposer négatif pour celles qui tournent vers eux leur convexité.

Quand on connaît le foyer principal d'une lentille convergente ou divergente, il est facile de trouver le foyer d'un point rayonnant quelconque situé hors de l'axe. En effet, soit S ce point, fig. 58, et M A M le profil de la lentille, que je représente par une simple ligne, pour indiquer qu'elle est supposée très-mince. Par le point S, menons le rayon incident SI parallèle à l'axe AX de la lentille; ce rayon, après les deux réfractions, viendra passer au foyer principal F; de sorte que IF sera la direction du rayon émergent qui en résulte. Menons maintenant un autre rayon incident SA, dirigé au centre de figure de la lentille; celui-ci la traversera sans se dévier, puisque l'épaisseur étant supposée infiniment petite, et les deux surfaces en A parallèles, la lentille fait en cette partie l'effet d'un verre plan infiniment mince. Il n'y aura qu'à prolonger SA en ligne droite, jusqu'à ce qu'il coupe le premier rayon émergent en f, et le point f sera le foyer commun de ces deux rayons; il le sera aussi de tous ceux qui émanent du même point rayonnant S. La fig. 59 représente l'effet de cette construction pour une lentille divergente, et la fig. 58 pour une lentille convergente. De plus, à cause de la petitesse de l'angle SAX et des incidences sur le miroir, il se trouve que les distances AS, Af des points rayonnans et du foyer à la lentille, ont entre elles la même relation que si elles étaient comptées sur l'axe même, c'est-à-dire celle qu'exprime l'équation (2). D'après cela, si, au lieu des résultats d'une construction graphique, on veut avoir numériquement les coordonnées rectangulaires du foyer f, rapportées à l'axe, c'est-à-dire AQ et fQ, leur détermination sera bien facile; car si l'on abaisse aussi du point rayonnant S

l'ordonnée SP sur l'axe, le point Q se trouvera être le foyer du point P; de sorte qu'en représentant AP par Δ, AQ par Δ', cette dernière distance pourra se calculer d'après la formule donnée plus haut. AQ étant connu, on mènera la ligne indéfinie Qf perpendiculaire sur l'axe, et son intersection par le rayon SA, prolongé s'il est nécessaire, sera le foyer cherché. D'après cela, si l'on nomme y, Y, les distances SP, fQ du point rayonnant et du foyer à l'axe de la lentille, on aura évidemment

$$\frac{1}{\Delta'} + \frac{1}{\Delta} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \qquad Y = y \cdot \frac{\Delta'}{\Delta}.$$

Ces formules détermineront Δ' et Y, quand Δ et y seront donnés. Si Δ' est positif, Y sera de même signe que y; le foyer f tombera du même côté de la lentille et du même côté de l'axe que le point rayonnant S, fig. 60. Si, au contraire, Δ' est négatif, Y sera de signe contraire à y; le foyer et le point rayonnant auront des positions opposées de part et d'autre de l'axe et de la lentille, fig. 61. Ces résultats suffisent pour construire, dans tous les cas possibles, les images des objets, et pour déterminer leur position, leur forme et leur grandeur apparente.

Ici, comme avec les miroirs, on peut, lorsque les images sont réelles, les rendre sensibles, en recevant les rayons sur un verre dépoli, que l'on va regarder du côté opposé; mais la variété des apparences est beaucoup plus grande qu'avec des miroirs.

En mesurant avec soin les distances Δ, Δ' de l'objet et de l'image à la lentille, on peut déterminer sa distance focale principale; car les valeurs de ces distances étant substituées dans l'équation (2), on peut y regarder r et r' comme inconnues, et l'on en tirera

$$(n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = \frac{1}{\Delta'} - \frac{1}{\Delta}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{F} = \frac{1}{\Delta'} - \frac{1}{\Delta}.$$

Comme les deux rayons $r\,r'$ entrent simultanément, et sous une forme pareille, dans la composition de la distance focale F, on voit qu'on ne peut pas, par des observations de ce genre, les déterminer séparément, à moins que l'on n'ait d'ailleurs entre eux quelque autre relation donnée *à priori*.

Supposons, par exemple, que les deux surfaces de la lentille aient été travaillées sur un même bassin sphérique; alors les rayons $r\,r'$ seront nécessairement égaux entre eux, et de signe contraire; ce qui donnera $r'=-r$, et par suite

$$\frac{1}{F}=\frac{2(n-1)}{r}, \qquad \text{d'où} \qquad r=2(n-1)\,F.$$

Le rayon des surfaces pourra donc se déterminer par ces formules, dès qu'on aura mesuré la distance focale principale F; car le rapport de réfraction n doit être censé connu d'avance. L'observation de F se fera ici comme pour les miroirs, en mesurant la distance de la lentille au point où se forment les images distinctes des objets éloignés. Mais cette détermination ne sera possible qu'autant que ces images se formeront réellement par une réunion des rayons lumineux; ce qui limite la méthode aux lentilles convergentes. Alors Δ' sera négatif, ainsi que r.

On trouve dans l'optique de Newton une suite d'expériences très-délicates faites avec une lentille également convexe, dont la distance focale principale F, mesurée en pouces anglais, était $84^{po},25$; le rapport de réfraction n était $\frac{17}{11}$. Avec ces nombres, notre formule donne

$$r=\frac{12}{11}\,.\,84{,}25=91^{po},91.$$

En disposant sur un même axe plusieurs lentilles dont les foyers et les intervalles sont convenablement calculés, on parvient à former des systèmes qui font voir les objets plus distincts et plus grands qu'à la vue simple. C'est en cela que consistent les *lunettes* ou *télescopes dioptriques*. Tout instrument de ce genre peut être considéré comme essentiellement composé de deux systèmes de verres dont les destinations sont différentes. Le premier, que l'on nomme l'objectif est, comme son nom l'annonce, situé du côté de l'objet; et il a pour but d'en projeter derrière lui à une certaine distance une petite image fort nette et fort lumineuse. L'autre système, qui se nomme l'oculaire, est situé du côté de l'œil qui observe; il est destiné à agrandir la petite image formée au foyer de l'objectif, et à la rejeter à une distance de l'œil convenable pour la vision distincte. Aussi la

position de l'oculaire dans chaque lunette doit-elle être modifiée selon les différentes vues. Tous les verres qui composent une lunette doivent être placés dans l'axe d'un tuyau noirci, afin que la lumière des objets situés sur le prolongement de cet axe soit la seule qui puisse parvenir à l'œil ; et même il faut que le tuyau total soit composé de deux parties mobiles l'une dans l'autre, dont l'une renferme l'objectif, et l'autre l'oculaire, afin que chaque observateur ait la facilité d'enfoncer ou de retirer ce dernier système pour l'amener à la position qu'exige la portée plus ou moins longue de sa vue. Je me borne ici à ces indications, qui suffisent pour montrer l'usage des lunettes et la manière de s'en servir. Quant au calcul des foyers et des intervalles que les verres doivent avoir dans chaque cas pour produire l'effet que l'on en désire, on le trouvera dans mon Optique analytique.

CHAPITRE III.

Théorie physique de la Réfraction.

Les méthodes que nous venons d'exposer déterminent le rapport de réfraction qui convient à chaque substance dans l'état où on l'observe. Mais nous avons déjà remarqué que ce rapport change, pour une même substance, en même temps que sa densité. La variation est peu sensible pour les solides et les liquides, parce que les dilatations et les condensations qu'ils peuvent subir sont peu considérables; mais il en est tout autrement dans les substances aériformes, où l'on peut faire varier la densité dans toutes sortes de proportions par le changement de pression et de température. Tant que nous n'aurons pas découvert cette liaison qui existe entre la densité de chaque substance et la réfraction qu'elle produit sur la lumière, nous ne pourrons pas ramener les observations faites sur cette substance à des termes comparables; elles seront toutes isolées les unes des autres, puisque les circonstances ne seront pas pareilles.

Il en sera de même, si nous voulons comparer entre elles les réfractions exercées par diverses substances, et nous ne saurons pas davantage y démêler ce qui tient à la densité et à la nature chimique des particules ou à leur arrangement.

On voit donc que, pour pénétrer plus intimement dans ces phénomènes, il faut, d'après les mouvemens du rayon lumineux, découvrir les forces qui agissent sur lui, et chercher ensuite par le calcul comment ces forces déterminent les résultats particuliers.

Soit AB, fig. 62, la première surface d'un corps ou milieu réfringent de nature quelconque. Considérons un rayon lumineux SI qui, se mouvant d'abord dans le vide suivant une direction presque parallèle à la surface du milieu, vienne enfin la

rencontrer au point I : dès-lors ce rayon ne continuera pas sa route en ligne droite ; il se réfractera suivant IR. Pour connaître la direction de IR, il n'y a qu'à nommer θ l'angle d'incidence NIS, et θ' l'angle de réfraction N'IR, comptés l'un et l'autre à partir de la normale NN' ; puis, désignant par n le rapport constant qui, selon l'observation, existe entre les sinus de ces angles, on aura $\sin\theta = n \sin\theta'$,

et par conséquent

$$\sin\theta' = \frac{\sin\theta}{n}.$$

Ceci a lieu en général, quels que soient θ et θ'. Mais puisque nous supposons l'angle NIS droit, ou infiniment peu différent d'un angle droit, il faut faire $\theta = 90°$, ce qui donne $\sin\theta = 1$,

et par suite $\sin\theta' = \frac{1}{n}$.

Par exemple, si le milieu réfringent est de l'eau distillée à la température de 18°, l'observation donne

$n = 1,33129$, d'où l'on tire $\sin\theta' = \frac{1}{1,33129}$,

et par suite $\theta' = 48° \, 41' \, 24''$.

Telle est donc la valeur de l'angle N'IR dans ce liquide, lorsque l'angle d'incidence NIS est droit. Ainsi, les molécules lumineuses qui composent le rayon incident SI se trouvent alors détournées de leur direction primitive de tout le complément de cet angle, c'est-à-dire de 41° 18' 36", valeur de l'angle BIR ; et comme un corps qui se meut ne peut être dévié de sa route que par une force inclinée sur sa direction, nous devons en conclure que les molécules lumineuses, en approchant de la surface du milieu, sont sollicitées par des forces qui tendent à les y faire entrer ; et ces forces sont dirigées perpendiculairement à la surface ; car le cas de l'incidence perpendiculaire est le seul dans lequel elles ne changent pas la direction du rayon.

Il est évident que ces forces ne doivent être sensibles qu'à de très-petites distances de la surface, tant en dedans qu'en dehors. Car le rayon lumineux doit commencer à se courber du moment où elles commencent à agir sur lui, et il doit

reprendre une direction constante et rectiligne, quand elles cessent de le solliciter ; or l'espace dans lequel cette inflexion s'opère est si petit, qu'il n'est pas appréciable à nos sens, et que le rayon semble se briser brusquement au point d'incidence : l'action des forces réfringentes n'est donc pas sensible plus loin.

Tous ces résultats concourent à nous montrer que la réfraction des rayons lumineux est produite par l'affinité des molécules des corps pour les molécules de la lumière ; affinité analogue à l'action capillaire, et qui, comme elle, ne devient sensible qu'à des distances très-petites. Cette conclusion, à laquelle nous conduisent les phénomènes, semble, au premier coup-d'œil, contradictoire avec celle que nous avons déduite des expériences sur la réflexion. Car alors les molécules lumineuses semblaient être repoussées par le corps réflecteur, au lieu d'en être attirées, comme nous le voulons ici. Mais il faut remarquer que les molécules qui se réfléchissent ne sont peut-être pas dans le même état physique, ou dans les mêmes circonstances de mouvement que celles qui se réfractent ; or, il suffit que cette différence soit possible pour qu'il n'y ait point de contradiction nécessaire dans les deux conséquences opposées que nous tirons des phénomènes relativement à ces deux états des particules ; car quand un corps A agit sur un corps B d'une manière quelconque, cette action ne dépend pas seulement de l'état de A et de sa nature, mais encore de l'état et de la nature de B. Nous verrons plus tard cette différence d'état des molécules lumineuses confirmée par une foule de preuves, et nous connaîtrons en quoi elle consiste.

Fixons maintenant, d'après les phénomènes, les conditions auxquelles les forces attractives sont assujetties; considérons une molécule lumineuse M, fig. 63, placée hors du milieu réfringent à une distance quelconque, et modifiée de manière qu'elle échappe à l'action des forces répulsives. Elle sera attirée par le milieu, perpendiculairement à la surface AB, comme nous l'avons démontré plus haut; mais, de plus, elle le sera avec la même intensité à distances égales sur toute l'étendue de cette

surface, soit que la molécule se trouve en M, ou en m, ou en μ. Car, comme ce genre d'action n'est sensible qu'à des distances très-petites, chacune des molécules M, m, μ, qui ne se trouve pas infiniment près des extrémités A et B du milieu, est attirée par lui avec autant de force que s'il était indéfiniment étendu. De plus, les intensités de ces attractions doivent être partout égales, car on suppose le corps homogène; et de plus, il n'est pas besoin d'avoir égard à la figure de ses particules, puisqu'on les suppose arrangées confusément, de manière que les modifications dépendantes de leur figure se détruisent. Ainsi, en supposant que la distance a A soit celle à laquelle l'attraction du milieu commence à dévier les molécules lumineuses, la ligne ab, parallèle à AB, donnera la limite extérieure à laquelle le rayon lumineux commence à se courber. Il est clair qu'il ne faut pas regarder cette limite comme rigoureuse et mathématique; car, mathématiquement parlant, l'action attractive du milieu doit s'étendre à toute distance; mais comme, au-delà d'une très-petite distance, elle devient si excessivement faible, que son effet est insensible, nous exprimons graphiquement cette circonstance en fixant près de la surface une certaine distance très-petite, comme la limite à laquelle le rayon commence à se courber sensiblement.

Supposons maintenant que la particule lumineuse M, ayant dépassé cette limite, s'approche davantage du milieu; alors elle en sera plus fortement attirée, et l'attraction augmentera ainsi jusqu'à ce que la molécule lumineuse arrive à la surface même du corps.

Mais lorsqu'elle aura traversé cette surface, l'attraction du milieu commencera à diminuer, et diminuera ainsi progressivement à mesure que la particule s'enfoncera dans l'intérieur du milieu. En effet, supposons-la parvenue à une profondeur quelconque, par exemple, en M'. Pour connaître le degré de force qui la sollicite alors, menons par le point M' la ligne $c'd'$ parallèle à la surface AB, et au-dessous de cette ligne, menons une autre parallèle A' B' qui soit aussi éloignée de M' que la surface AB elle-même. Alors les deux portions égales du milieu,

qui sont limitées par la ligne $c' d'$, et par A B, A' B', attireront la molécule M' en sens contraire, et l'attireront également. Ces deux parties se feront donc mutuellement équilibre, et la molécule ne se trouvera plus sollicitée que par la portion du milieu qui est située au-delà de A' B', et qui est éloignée d'elle d'une quantité $c' A'$ égale à $c' A$. Si l'épaisseur de ce reste excède la limite à laquelle les forces attractives sont sensibles, l'intensité de l'attraction sera la même que lorsque la molécule se trouvait hors du milieu, et aussi éloignée de lui qu'elle y est maintenant enfoncée. Car, à cause de la petite distance à laquelle l'attraction est sensible, la portion du milieu, qui est retranchée par le plan A' B', est toujours infiniment mince, et le reste du milieu, dès qu'il excède la sphère d'activité des forces, peut être considéré comme indéfini.

Il résulte de ce raisonnement, que les limites des attractions intérieures et extérieures sont également éloignées de la surface. Lorsque la molécule lumineuse se trouve parvenue à cette profondeur, si l'on retranche du milieu les portions qui se sont mutuellement équilibrées au-dessus et au-dessous d'elle, le reste du milieu est trop éloigné pour pouvoir l'attirer sensiblement.

En résumant les résultats auxquels nous venons de parvenir, on voit que le rayon incident SI conserve sa direction rectiligne jusqu'à la première limite $a b$, où les forces attractives commencent à être sensibles; à partir de ce terme, l'action naissante des forces commence à le plier suivant une ligne courbe, tangente en I à sa direction primitive. Cette courbe se continue jusqu'à la limite inferieure $a_i\, b_i$, où la variabilité des forces attractives devient de nouveau insensible. Alors le rayon reprend la direction rectiligne qui lui est définitivement donnée par la réfraction, et qui est le prolongement de la dernière tangente de la courbe qu'il a décrite. L'étendue de cette courbe est trop petite pour être appréciable à nos sens, mais la pensée l'agrandit, et il est nécessaire de la considérer pour lier la direction du rayon incident avec celle du rayon réfracté.

Pour le faire d'une manière complète, il faudrait connaître

la loi suivant laquelle la force attractive augmente à mesure que les molécules lumineuses s'approchent de la surface réfringente. Nous ne savons rien de cette loi, sinon qu'elle produit un accroissement très-rapide, et égal à distances égales sur toute l'étendue de la surface. Heureusement ces données générales suffisent pour arriver aux résultats qu'il nous importe le plus d'obtenir.

Pour représenter l'accroissement de la force attractive de la manière la plus générale, partageons l'espace où elle est sensible en une infinité de zones très-minces, par des lignes *cd*, *ef*, *gh*, etc. parallèles à la surface du milieu et à la première limite *ab*, fig. 64. Puis supposons que dans chacune de ces zones l'intensité de la force attractive soit sensiblement constante, en sorte qu'elle ne croisse qu'en passant de chaque zone à la suivante. Continuons cette construction dans l'intérieur même du milieu jusqu'à la seconde limite, où la force attractive cesse d'être sensible. Cela posé, si nous n'établissons absolument aucune relation entre les valeurs successives de la force pour ces diverses zones, il n'y aura point de loi si générale qui ne puisse être ainsi représentée; la similitude sera d'autant plus parfaite, que l'on multipliera davantage les zones, et on la rendrait tout-à-fait exacte, en supposant leur nombre infini. Nous pourrons donc employer cette fiction pour représenter les progrès des forces attractives; et si nous en déduisons des résultats qui soient indépendans du nombre des zones, nous pouvons être certains qu'ils appartiennent aussi aux forces attractives elles-mêmes, quelle que soit leur loi.

Tout se réduit donc à considérer ce qui arrive lorsqu'une molécule infiniment petite, lancée dans le vide avec une certaine direction et une certaine vitesse, traverse une zone comprise entre deux plans parallèles, entre lesquels elle est sollicitée par une force accélératrice constante, que nous désignerons par g. Car, si nous résolvons ce problème pour la première zone, nous saurons calculer la direction que la molécule lumineuse y aura acquise, aussi-bien que l'accroissement de sa vitesse. Nous n'aurons donc qu'à recommencer le calcul avec ces

données pour la seconde zone, de là à la troisième, et ainsi de suite, dans toute l'épaisseur où les forces attractives sont sensibles.

Soit SI, fig. 65, la direction primitive du rayon dans le vide, et v la vitesse de translation des particules qui le composent. Cette vitesse reste constante jusqu'à ce que le rayon arrive en I sur la ligne *ab*. Alors les molécules sont sollicitées par la force accélératrice g, qui agit constamment avec la même intensité, jusqu'à ce que la molécule parvienne à la ligne *cd*. A ce terme, la force accélératrice cesse d'agir, et le rayon s'échappe par la tangente I′R : on demande sa direction et sa vitesse.

Ce problème est précisément celui du mouvement des projectiles dans le vide, en les supposant animés par la seule pesanteur. Appelons θ l'angle d'incidence SIN, compté de la normale, et décomposons la vitesse primitive du rayon en deux autres, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la ligne *ab*. La première aura pour valeur $v \sin \theta$, la seconde $v \cos \theta$; car on démontre en mécanique que, pour décomposer une force suivant une direction donnée, il faut la multiplier par le cosinus de l'angle que cette direction fait avec la sienne, et c'est ce que nous venons de faire ici. De plus, en comptant le temps t, à partir de l'instant où la molécule lumineuse est arrivée en I, on voit que les espaces décrits dans le temps t, en vertu des deux vitesses primitives, seront $v \sin \theta \,.\, t$ suivant *ab*; et $v \cos \theta \,.\, t$ suivant IN′. C'est-à-dire que, si les molécules lumineuses étaient abandonnées à leur impulsion primitive, leur abscisse x, parallèle à *ab*, et leur ordonnée y, parallèle à IN′, croîtraient l'une et l'autre pendant le temps t, des quantités exprimées par ces valeurs; ce qui placerait continuellement la molécule sur le prolongement du rayon incident SI.

Mais l'influence de la force accélératrice g modifie ces résultats. A la vérité, cette force ne change rien à la vitesse $v \sin \theta$ dirigée suivant *ab*, parce que, lui étant perpendiculaire, elle ne la diminue, ni ne l'augmente; mais elle s'ajoute continuellement à la vitesse $v \cos \theta$, qui est dirigée comme elle sui-

vant IN′. Elle l'augmente pendant le temps t d'une quantité gt proportionnelle au temps, et elle ajoute ainsi à l'espace $v\cos\theta.t$, ou à l'ordonnée y une quantité $\frac{gt^2}{2}$ proportionnelle au carré du temps. Ce sont là les lois connues des forces accélératrices constantes. Par cette composition, les coordonnées x et y de la molécule, après le temps t, deviennent

$$x = v\sin\theta\,.\,t$$

$$y = v\cos\theta\,.\,t + \frac{gt^2}{2},$$

et les vitesses de translation ont pour valeur

parallèlement à la ligne ab. . . . . $v\sin\theta$

parallèlement à la normale IN′. . . . . $v\cos\theta + gt.$

Maintenant, pour calculer la direction et la vitesse du rayon, lorsqu'il sera arrivé en I′ à la seconde limite de la zone, il faut connaître le temps t après lequel il y parviendra. Nommons e l'épaisseur de la zone; il faudra que l'on ait alors $y = e$, ce qui donne la condition

$$e = v\cos\theta\,.\,t + \frac{gt^2}{2},$$

d'où l'on tire

$$t = -\frac{v\cos\theta}{g} \pm \frac{1}{g}\sqrt{v^2\cos^2\theta + 2ge}.$$

Il ne faut prendre que le signe supérieur du radical, parce que le temps t doit être positif, ainsi que la vitesse v, dans le cas que nous examinons. Cette valeur de t donne

$$gt + v\cos\theta = \sqrt{v^2\cos^2\theta + 2ge},$$

et par conséquent les expressions des vitesses de la particule, à son arrivée en I′, seront

parallèlement à ab. . . . . $v\sin\theta$

parallèlement à IN′. . . . . $\sqrt{v^2\cos^2\theta + 2ge}.$

On voit donc que le carré de cette dernière, qui était primitivement $v^2\cos^2\theta$, s'est trouvé augmenté de la quantité $2ge$ par l'action de la force accélératrice, et cet accroissement ne

contenant ni θ, ni v, est indépendant de l'inclinaison du rayon; ainsi que de la vitesse initiale des particules lumineuses.

Rien ne nous empêche d'étendre tout de suite ce résultat au mouvement du rayon dans la seconde zone; car il s'y trouvera sollicité par une autre force accélératrice g_1 différente de la précédente, mais qui sera constante comme elle dans l'étendue de cette seconde zone. De plus, nous connaissons les vitesses initiales du rayon en entrant dans cette zone; ce sont là les seules données dont nous ayons besoin. La vitesse $v \sin \theta$, étant toujours perpendiculaire à la direction de la force accélératrice, restera encore constante. Quant à l'autre, qui a pour valeur $\sqrt{v^2 \cos^2 \theta + 2ge}$, nous savons que son carré sera augmenté d'une quantité $2g_1 e_1$ par l'action de la force accélératrice g_1. Ainsi, en sortant de la seconde zone, les vitesses des molécules lumineuses seront

parallèlement à ab.... $v \sin \theta$

parallèlement à IN'... $\sqrt{v^2 \cos^2 \theta + 2ge + 2g_1 e_1}$.

Ces résultats s'étendront de même à un nombre quelconque $\nu + 1$ de zones consécutives, dont les épaisseurs seront $e_2 e_3 \ldots e_\nu$, et les forces attractives $g_2 g_3 g_\nu$; les vitesses de la molécule lumineuse, après les avoir traversées, seront

parallèlement à ab.. $v \sin \theta$

parallèlement à IN'. $\sqrt{v^2 \cos^2 \theta + 2ge + 2g_1 e_1 + \ldots 2g_\nu e_\nu}$.

Par exemple, si ces $\nu + 1$ zones embrassent tout l'intervalle compris entre la limite extérieure des forces attractives et la surface réfringente AB, les expressions précédentes représenteront les vitesses de la molécule lumineuse en arrivant à cette surface.

De là, en s'avançant vers la limite intérieure $a_1 b_1$, la molécule lumineuse éprouve la même série d'actions que de l'autre côté de la surface, c'est-à-dire d'abord la force g_ν, puis $g_{\nu-1}$, et ainsi de suite; de sorte qu'en arrivant à cette seconde limite, le carré de sa vitesse perpendiculaire à sa surface se trouve encore augmenté de $2ge + 2g_1 e_1 + \ldots 2g_\nu e_\nu$;

et ainsi à cet instant l'on a

vitesse parallèle à AB.. $v \sin \theta$

perpendiculaire à AB.. $\sqrt{v^2 \cos^2 \theta + 4ge + 4g_1 e_1 + \ldots 4g_v e_v}$.

Nous voilà maintenant en état de calculer la direction du rayon réfracté I′R, fig. 66, lorsqu'il a traversé la limite intérieure des forces attractives; car, puisqu'à partir de cette époque, il n'est plus sollicité par aucune nouvelle force, il continuera de se mouvoir avec les vitesses que nous venons de calculer. Ainsi, en nommant $x'y'$ les coordonnées de la particule lumineuse après le temps t' compté depuis son arrivée en I′, nous aurons

$$x' = t' v \sin \theta$$

$$y' = t' \sqrt{v^2 \cos^2 \theta + 4ge + \ldots 4g_v e_v};$$

expressions dans lesquelles nous ferons, pour abréger,

$$2ge + 2g_1 e_1 + \ldots 2g_v e_v = u^2,$$

ce qui donnera

$$x' = t' v \sin \theta$$

$$y = t' \sqrt{v^2 \cos^2 \theta + 2u^2}.$$

Ayant ainsi l'équation de ce rayon, nous pouvons calculer l'angle de réfraction θ' qu'il forme avec la normale I′N′ menée à la seconde limite des forces; car on aura évidemment

$$\sin \theta' = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

ou en mettant pour x' et y' leurs valeurs

$$\sin \theta' = \frac{v \sin \theta}{\sqrt{v^2 + 2u^2}}.$$

Le temps t disparaît donc de cette expression, ce qui est tout simple, puisque le rayon poursuit sa route en ligne droite. Mais de plus, le rapport $\frac{\sin \theta}{\sin \theta'}$, étant égal à $\frac{\sqrt{v^2 + 2u^2}}{v}$, se trouve indépendant de θ et de θ'; il est donc constant sous toutes les incidences, ce qui est la propriété découverte par Descartes.

Il est également facile de connaître la vitesse de translation des molécules lumineuses dans le rayon réfracté; car le carré de cette vitesse est égal à la somme des carrés de ses composantes rectangulaires, c'est-à-dire à

$$v^2 \sin^2 \theta + v^2 \cos^2 \theta + 2u^2,$$

ou simplement $\qquad v^2 + 2u^2,$

et par conséquent sa valeur est

$$V = \sqrt{v^2 + 2u^2}.$$

Cette vitesse V sera donc constante et indépendante de l'incidence. Si l'on veut y introduire le rapport de réfraction $\frac{\sin \theta}{\sin \theta'}$ ou n, il n'y a qu'à remarquer que nous avons trouvé plus haut

$$n = \frac{\sqrt{v^2 + 2u^2}}{v},$$

ce qui donnera $\qquad V = nv;$

d'où l'on voit que le rapport de réfraction est égal au rapport des vitesses des particules avant et après leur entrée dans le corps réfringent.

Cette théorie ne nous montre pas seulement les causes intimes des lois que nous avions observées; elle nous permet d'aller beaucoup plus avant, et de remonter jusqu'à la comparaison des forces attractives elles-mêmes, en nous permettant de déterminer l'accroissement u^2 du carré de la vitesse qui en dépend immédiatement. En effet, supposons que l'on ait observé dans une substance donnée la valeur du rapport de réfraction n,

on aura aussitôt $\qquad n = \frac{\sqrt{v^2 + 2u^2}}{v},$

d'où l'on tire $\qquad \frac{2u^2}{v^2} = n^2 - 1.$

En considérant la succession complète des forces attractives depuis leur limite extrême jusqu'à la surface, nous avons trouvé

$$u^2 = 2ge + 2g_1 e_1 + \dots 2g_v e_v.$$

Nous pouvons encore suivre telle loi que nous voudrons dans les épaisseurs $e\, e_1\, e_2 \dots e_v$ des zones successives. Nous ne sommes astreints qu'à la seule condition de les rendre extrêmement

petites, et l'indétermination des forces $g g_{1} \ldots g_{v}$, suffira pour représenter tous les progrès de l'attraction. Supposons donc toutes ces épaisseurs égales entre elles et à la première; il viendra

$$\frac{2 u^2}{v^2} = \frac{4 e}{v^2} (g + g_1 \ldots + g_v) = n^2 - 1,$$

et par conséquent le nombre $n^2 - 1$ que l'on pourra calculer d'après les observations, sera proportionnel à la somme des forces attractives exercées par la substance réfringente pendant que le rayon y pénètre. Ce nombre pourra donc servir de mesure pour comparer l'intensité de cette somme de forces dans différens corps.

Mais auparavant il faut séparer dans les effets d'un même corps ce qui tient à sa nature, ce qui tient à sa densité. Cela est bien facile, maintenant que nous raisonnons sur les forces elles-mêmes; et il est clair que, tant qu'on négligera l'action réciproque des particules du corps les unes sur les autres, l'attraction sera proportionnelle au nombre des particules qui peuvent agir sur la molécule lumineuse dans une sphère d'une étendue donnée; par conséquent, elle sera proportionnelle à la densité du corps. Soit donc ϱ cette densité, et G un coefficient constant pour chaque corps, lequel représente la somme de ses forces attractives $g g_1 \ldots$ pour une densité égale à 1. On pourra supposer en général $g + g_1 + \cdots g_v = G \varrho$,

ce qui donnera $\frac{2 u^2}{v^2} = \frac{4 G \varrho e}{v^2} = n^2 - 1$,

et par conséquent

$$\frac{2 u^2}{v^2 \varrho} = \frac{4 G e}{v^2} = \frac{n^2 - 1}{\varrho}.$$

Alors la quantité $\frac{n^2 - 1}{\varrho}$, étant égale à $\frac{4 G e}{v^2}$, ne dépendra plus que de l'intensité des forces attractives et de la vitesse de la lumière incidente; car l'épaisseur e des zones élémentaires, étant absolument arbitraire, peut être supposée la même pour tous les corps. Cette quantité $\frac{n^2 - 1}{\varrho}$, étant proportionnelle à l'inten-

sité des forces attractives, pourra leur servir de mesure; c'est ce que Newton a nommé *le pouvoir réfringent des corps*, et l'on voit par son expression même comment on peut le calculer.

Considérons maintenant ce qui arrive à la molécule lumineuse lorsqu'elle approche de la seconde surface du milieu, que pour plus de simplicité nous supposerons d'abord parallèle à la première : fig. 67. Les forces attractives exercées par le corps près de ces deux surfaces auront la même étendue d'action, et nous représenterons de même par les parallèles $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, les limites où elles cessent d'être sensibles. Cela posé, tant que la molécule lumineuse n'atteindra pas la limite intérieure $a_2 b_2$, elle continuera de se mouvoir en ligne droite avec la vitesse constante $V = \sqrt{v^2 + 2u^2}$; mais quand elle aura dépassé cette limite, elle commencera à être sollicitée successivement par les forces $g g_1 \ldots g_v$, selon les zones successives qu'elle traversera. Pour calculer les effets que ces forces produiront sur elle, il n'y a qu'à décomposer sa vitesse V en deux autres, l'une parallèle à la surface d'émergence $A_2 B_2$, l'autre perpendiculaire. Si l'on nomme θ'' l'angle d'incidence du rayon réfracté sur la seconde face, la première de ces composantes aura pour valeur $V \sin \theta''$, et la seconde $V \cos \theta_2$; mais à cause du parallélisme des surfaces, l'angle θ'' sera le même que l'angle de réfraction θ', et ces expressions se réduiront à $V \sin \theta'$, $V \cos \theta'$. Maintenant il est clair que l'action des forces attractives ne changera rien à la première vitesse qui est perpendiculaire à leur direction; mais elles tendront sans cesse à diminuer la seconde, à laquelle elles sont parallèles et opposées, puisque cette vitesse tend à faire sortir la molécule lumineuse hors du corps, tandis que les forces attractives tendent à l'y faire rentrer. D'après cela, on aura dans une couche quelconque,

vitesse parallèle à $A_2 B_2$... $V \sin \theta'$

perpendiculaire à $A_2 B_2$.. $\sqrt{V^2 \cos^2 \theta' - 2gc - 2g_1 c_1 - .}$

La première reste donc constante, ce qui est tout simple; la seconde diminue sans cesse. En déterminant sa valeur à la surface

d'émergence, et voyant si elle est réelle, nous saurons si la molécule lumineuse doit ou ne doit pas sortir du milieu réfringent. Pour cela, il ne faut que continuer la série des forces jusqu'à g_v ; ce qui donne, pour la vitesse perpendiculaire,

$$\sqrt{V^2 \cos^2 \theta' - 2ge - 2g_1 e_1 - \ldots\ldots 2g_v e_v},$$

ou simplement $\sqrt{V^2 \cos^2 \theta' - u^2}$,

en mettant pour u^2 la valeur que nous lui avons assignée plus haut. Or, V étant la vitesse du rayon réfracté dans l'intérieur du corps, et θ' l'angle de réfraction sur la première surface, nous avons trouvé

$$V = \sqrt{v^2 + 2u^2}; \quad \sin\theta' = \frac{v \sin\theta}{\sqrt{v^2 + 2u^2}};$$

d'où l'on tire

$$\cos^2\theta' = \frac{v^2 \cos^2\theta + 2u^2}{v^2 + 2u^2} \quad \text{et} \quad V^2 \cos^2\theta' = v^2 \cos^2\theta + 2u^2;$$

ce qui donne, pour la vitesse perpendiculaire à la surface d'émergence,

$$\sqrt{v^2 \cos^2\theta + u^2}.$$

Elle se trouve ainsi être la même qu'elle était à la surface d'incidence. Comme elle est encore réelle, il n'y a aucun doute qu'elle aura son effet, et que la molécule lumineuse sortira du corps. De là, jusqu'à la limite extérieure des forces attractives, le carré de la vitesse perpendiculaire diminuera encore de la quantité

$$2ge + 2g_1 e_1 + \ldots\ldots 2g_v e_v, \text{ ou } u^2;$$

et ainsi on aura à cette limite,

vitesse parallèle à $A_2 B_2$...... $V \sin\theta'$,

vitesse perpendiculaire ...... $\sqrt{V^2 \cos^2\theta' - 2u^2}$,

qui, en mettant pour V et θ', leurs valeurs, se réduisent à

$$v \sin\theta,$$

$$v \cos\theta.$$

On voit donc qu'après que ces molécules lumineuses ont entièrement traversé la limite extérieure des forces attractives, leurs vitesses se retrouvent exactement les mêmes qu'à l'instant où elles ont commencé à subir l'action de ces forces en s'approchant

de la surface d'incidence. A partir de cette seconde époque, le mouvement de la molécule étant devenu désormais constant, sera donc aussi le même, en s'éloignant de la seconde surface, qu'il était en s'approchant de la première, c'est-à-dire que le rayon émergent sera parallèle au rayon incident et aura la même vitesse ; ce qui est conforme à l'observation. A la vérité, on observe aussi qu'une partie des molécules lumineuses dont le rayon se compose, au lieu de sortir comme les autres, se réfléchissent intérieurement à la surface d'émergence, et rentrent dans le milieu ; mais il sera prouvé plus loin que ces molécules ne sont pas dans le même état physique ou dans les mêmes circonstances de mouvement que celles qui sortent ; ce qui justifie l'exception qu'elles présentent.

Examinons maintenant ce qui arriverait si la face d'émergence, au lieu d'être parallèle à la surface d'incidence, formait avec elle un angle ε. Le calcul sera encore le même que tout-à-l'heure ; seulement l'angle d'incidence θ'' sur les limites de la seconde surface ne sera plus égal à θ', mais à $\theta' + \varepsilon$, ε étant supposé positif lorsque le rayon réfracté s'éloigne de l'intersection commune des deux surfaces, comme dans la fig. 68. Ainsi les vitesses d'incidence de la particule lumineuse, décomposées parallèlement et perpendiculairement à cette face, seront

parallèlement à AC......... $V \sin \theta''$ ou $V \sin(\theta' + \varepsilon)$,
perpendiculairement à AC.. $V \cos \theta''$ $V \cos(\theta' + \varepsilon)$.

Lorsque la particule sera entrée dans les limites des forces attractives, elles deviendront

parallèlement...... $V \sin(\theta' + \varepsilon)$
perpendiculairement $\sqrt{V^2 \cos^2(\theta' + \varepsilon) - 2ge - 2g_1 e_1 \ldots}$

Et si l'on pousse le calcul jusqu'à la surface d'émergence, où $2ge + 2g_1 e_1 \ldots = u^2$, on aura

vitesse parallèle à AC.... $V \sin(\theta' + \varepsilon)$,
vitesse perpendiculaire.... $\sqrt{V^2 \cos^2(\theta' + \varepsilon) - u^2}$.

Ici, il est bien possible que la molécule lumineuse ne puisse

pas sortir du corps. En effet, nous avons trouvé tout-à-l'heure $V^2 \cos^2 \theta'$ plus grand que u^2, ce qui rendait la vitesse perpendiculaire constamment réelle; mais l'angle $\theta' + \varepsilon$ étant plus grand que θ', selon la disposition adoptée dans la fig. 68, $\cos^2 (\theta' + \varepsilon)$ sera moindre que $\cos^2 \theta'$; et par conséquent $V^2 \cos^2 (\theta' + \varepsilon)$ pourra être assez affaibli par ce facteur pour devenir égal à u^2, ou même moindre que cette quantité. Si le premier cas arrive, on aura

$$V^2 \cos^2 (\theta' + \varepsilon) - u^2 = 0;$$

et lorsque la molécule sera arrivée à la surface d'émergence, sa vitesse perpendiculaire deviendra nulle. Dans le second cas, elle sera imaginaire, et, dans l'un comme dans l'autre, la molécule ne pourra pas aller plus loin.

En effet, si la molécule, en arrivant à la surface d'émergence, a perdu, par l'attraction du corps, toute la vitesse qui tend à l'en faire sortir, elle se mouvra pendant un instant avec la seule vitesse $V \sin (\theta' + \varepsilon)$, parallèlement à la surface d'émergence. Or, comme, dans cette position, elle est continuellement attirée en dedans par les forces attractives du milieu que rien ne contrebalance, il est nécessaire qu'elle y obéisse, et qu'elle rentre dans le milieu, où les mêmes forces qui avaient retardé sa marche agissent alors pour l'accélérer; et comme sa vitesse parallèle à la surface est toujours la même, elle décrira, en rentrant dans le milieu, et s'éloignant de la surface d'émergence, une courbe exactement pareille à celle qu'elle avait décrite en s'en approchant. Mais cette courbe étant trop petite pour être aperçue, le rayon semblera se réfléchir brusquement sur la surface intérieure, en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.

Cela aura lieu ainsi lorsque $V^2 \cos^2 (\theta' + \varepsilon)$ égalera u^2; mais s'il est moindre, il y aura nécessairement dans les couches antérieures un point où l'effet accumulé des forces attractives suffira pour l'égaler; car la somme des termes $2ge + 2g_1 e_1 \ldots$, qui dépendent de ces forces, augmente depuis la limite intérieure où elle est nulle, jusqu'à la surface d'émergence où elle est égale à u^2. Ainsi, dans la couche où cette égalité aura lieu, la marche de la molécule lumineuse deviendra parallèle à la direction des couches; elle ne pourra

donc aller plus loin, puisque les attractions des couches tendent toujours à la ramener dans le corps ; et voilà pourquoi, dans ce cas, la vitesse perpendiculaire aux couches devient imaginaire quand on veut calculer sa valeur à la surface d'émergence. Alors le rayon se réfléchit intérieurement, en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence ; et sa réflexion s'opère avant que les molécules lumineuses soient arrivées à la surface d'émergence, quoiqu'à cause de la petite distance où s'étendent les forces, ce rayon semble se réfléchir sur la surface même.

Les angles sous lesquels ces phénomènes se produisent, sont donc compris entre les limites

$$\cos(\theta' + \varepsilon) = 0, \qquad \text{qui donne} \quad \theta'' = 90^\circ$$

$$\cos^2(\theta' + \varepsilon) = \frac{u^2}{V^2}, \qquad \text{qui donne} \quad \cos^2\theta'' = \frac{u^2}{V^2}.$$

La première suppose que le rayon réfracté est, dans son incidence intérieure, parallèle à la surface d'émergence ; la seconde détermine l'angle qu'il doit faire avec cette surface pour parvenir jusqu'à elle et s'y réfléchir entièrement. Cette seconde limite peut se calculer d'avance, quand on connaît le rapport de réfraction n pour la substance dont on fait le prisme. En effet, en nommant v la vitesse primitive de la lumière dans le vide, nous avons trouvé

$$\frac{v^2 + 2u^2}{v^2} = n^2 \qquad V^2 = v^2 + 2u^2;$$

de là on tire

$$u^2 = \frac{v^2(n^2 - 1)}{2} \qquad V^2 = n^2 v^2,$$

valeurs qui, étant substituées dans la dernière des équations précédentes, donneront

$$\cos^2\theta'' = \frac{n^2 - 1}{2n^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \cos 2\theta'' = -\frac{1}{n^2}.$$

Il suit de là que, lorsqu'un rayon réfracté se réfléchit ainsi, exactement à la surface d'émergence, son incidence θ'' sur cette surface, comptée de la perpendiculaire, est toujours plus grande que 45°, puisque $\cos 2\theta''$ est négatif.

Supposons θ'' moindre que cette limite ; alors le rayon se rap-

prochant davantage de la perpendiculaire à la surface d'émergence, sa vitesse de sortie ne sera plus complètement détruite quand il y parviendra. $V^2 \cos^2 \theta''$ surpassera u^2, et la molécule sortira du corps. Les forces attractives continuant d'agir sur elle, les composantes de ses vitesses deviendront

parallèlement à la surface d'émergence..... $V \sin(\theta' + \varepsilon)$,

perpendiculairement. $\sqrt{V^2 \cos^2(\theta'+\varepsilon) - u^2 - 2ge - 2g_1 e_1 \ldots}$

En poussant le calcul jusqu'à la limite extérieure des forces attractives, la somme des termes $2ge + 2g_1 e_1 \ldots$ deviendra de nouveau égale à u^2, et l'on aura

parallèlement à la surface d'émergence...... $V \sin(\theta' + \varepsilon)$

perpendiculairement à cette surface. $\sqrt{V^2 \cos^2(\theta'+\varepsilon) - 2u^2}$.

Puisque la molécule est sortie de la surface, l'angle $\theta' + \varepsilon$ ou θ'' doit être tel que $V^2 \cos^2(\theta' + \varepsilon)$ ait surpassé u^2; mais il est possible qu'il ne surpasse pas $2u^2$, et qu'au contraire il soit égal à cette quantité, ou moindre qu'elle. Dans l'un et l'autre cas, la vitesse perpendiculaire à la surface d'émergence devenant nulle ou imaginaire, on voit que la molécule lumineuse ne pourra pas s'éloigner hors de cette surface indéfiniment.

Lorsque l'on aura

$$V^2 \cos^2(\theta' + \varepsilon) - 2u^2 = 0,$$

la vitesse ne deviendra nulle qu'à la limite extérieure des forces attractives. La molécule lumineuse s'avancera donc jusque-là ; mais une fois qu'elle y sera arrivée, elle sera ramenée par les forces attractives, comme dans le cas précédent, et elle rentrera de nouveau dans le corps, en décrivant une courbe pareille à celle qu'elle avait suivie pour en sortir. Comme toutes ces inflexions se passent à une très-petite distance de la surface d'émergence, dans les limites des forces attractives, la réflexion semblera se faire à cette surface même.

La valeur de l'incidence nécessaire pour ce phénomène est donnée par l'équation même qui exprime l'évanouissement de la vitesse ; on en tire

$$\cos^2(\theta' + \varepsilon) = \frac{2u^2}{V^2}, \qquad \text{c'est-à-dire}, \qquad \cos^2 \theta'' = \frac{n^2 - 1}{n^2}.$$

L'angle θ'' est donc moindre que celui qui produisoit la réflexion sur la surface d'émergence même, puisque le carré de son cosinus est deux fois plus grand. Cela signifie que le rayon réfracté s'approche davantage de la perpendiculaire à la surface d'émergence ; et en effet, il faut bien qu'il en soit ainsi, puisqu'ayant toujours la même vitesse dans l'intérieur du corps, sa tendance à sortir devient plus forte. Si le produit $V^2 \cos^2(\theta' + \varepsilon)$, que nous supposons toujours plus grand que u^2, est moindre que $2u^2$, il se trouvera nécessairement, entre la surface réfringente et la limite extérieure des forces, une couche où l'accumulation des quantités $-2ge - 2g_1e_1 \ldots$, ajoutée à $-u^2$, égalera $V^2 \cos^2(\theta' + \varepsilon)$. Alors la vitesse perpendiculaire devenant nulle, le rayon retournera dans l'intérieur du corps avant d'avoir atteint la limite extérieure des forces attractives ; mais, à cause du peu d'étendue de ces limites, il paraîtra encore se réfléchir brusquement à la surface même.

En rassemblant ces résultats, nous aurons

Depuis $\cos^2\theta'' = 0$	jusqu'à $\cos^2\theta'' = \frac{n^2-1}{2n^2}$	Réflexion intér. avant la surface d'émergence.
	$\cos^2\theta'' = \frac{n^2-1}{2n^2}$	Réflexion sur la surface d'émergence même.
Depuis $\cos^2\theta'' = \frac{n^2-1}{2n^2}$	jusqu'à $\cos^2\theta'' = \frac{n^2-1}{n^2}$	Réfl. entre la surface d'émerg. et la limite extér. des forces attractives.
	$\cos^2\theta'' = \frac{n^2-1}{n^2}$	Réflexion à la limite extérieure des forces.

Ainsi, généralement, toutes les fois que l'angle θ'', compté de la normale à la surface d'émergence, sera plus grand que cette dernière limite, le rayon se réfléchira intérieurement ; et, au contraire, quand il sera moindre, la molécule lumineuse sortira des limites des forces attractives du corps avant d'avoir perdu sa vitesse perpendiculaire ; et désormais, abandonnée à elle-même, elle continuera de se mouvoir en ligne droite avec une vitesse constante.

La dernière limite de θ'' est précisément celle à laquelle l'angle d'émergence devient droit ; en sorte que, pour des valeurs plus grandes de θ'', il ne peut plus y avoir d'angle d'émergence, en conservant le rapport constant des sinus. En effet, puisque

$$\cos^2 \theta'' = \frac{n^2 - 1}{n^2},$$

on aura $\sin^2 \theta'' = \frac{1}{n^2}$, et $\sin \theta'' = \frac{1}{n}$,

qui est précisément le sinus de l'angle de réfraction, quand l'angle d'incidence compté de la normale est droit. Ainsi la seule considération de la loi des sinus pouvait faire prévoir la nécessité de la réflexion au-delà d'une certaine limite d'incidence intérieure, d'après l'impossibilité d'obtenir un angle d'émergence convenable.

Continuons maintenant à suivre la molécule lumineuse après qu'elle est sortie des limites des forces attractives. Pour savoir quelle direction elle prendra alors, il n'y a qu'à partir de l'expression connue de ses vitesses, et désignant par x'' y'' ses coordonnées, parallèlement et perpendiculairement à la surface de sortie, en mettant leur origine commune au point d'émergence sur la limite extérieure des forces attractives, nous aurons

$$x'' = t \text{V} \sin \theta'' \qquad y'' = t \sqrt{\text{V}^2 \cos^2 \theta'' - 2u^2}.$$

Nommons de plus θ''' l'angle que la direction de son mouvement forme alors avec la surface d'émergence, nous aurons encore

$$\sin \theta''' = \frac{x''}{\sqrt{x''^2 + y''^2}}, \quad \text{par conséquent} \quad \sin \theta''' = \frac{\text{V} \sin \theta''}{\sqrt{\text{V}^2 - 2u^2}}.$$

Or, en nommant v la vitesse de la lumière dans le vide, et n le rapport de réfraction pour la substance dont est fait le prisme, nous avons trouvé

$$\text{V}^2 = n^2 v^2 \qquad u^2 = \frac{v^2 (n^2 - 1)}{2};$$

de là on tire $\sin \theta''' = n \sin \theta''$.

Ainsi, malgré tous les changemens de direction et de vitesse que le rayon a éprouvés sur sa route, il sort du corps en observant

le même rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence avec lequel il y était d'abord entré.

La vitesse qu'il reprend dans le vide est aussi la même qu'il avait avant d'avoir éprouvé l'action du corps; car la somme des carrés des vitesses composantes est

$V^2 \sin^2 \theta'' + V^2 \cos^2 \theta'' - 2u^2$, ou simplement $V^2 - 2u^2$;

quantité qui se réduit à v^2, quand on y substitue pour u et V leurs valeurs en fonction de n.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir, touchant la réflexion intérieure du rayon sous certaines incidences, sont parfaitement confirmés par l'observation. Avant de chercher à les rendre sensibles, calculons leurs limites pour le verre ordinaire dans lequel la valeur moyenne du rapport de réfraction n est environ $\frac{3}{2}$ ou 1,5; nous aurons alors :

Commencement de la réflexion intérieure

$$\cos \theta'' = 0 \qquad \theta'' = 90^\circ.$$

Réflexion sur la surface d'émergence même,

$$\cos^2 \theta'' = \frac{\frac{9}{4} - 1}{2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{5}{18}; \qquad \theta'' = 58^\circ\ 11'\ 38''.$$

Sur la limite extérieure des forces attractives,

$$\cos^2 \theta'' = \frac{\frac{9}{4} - 1}{\frac{9}{4}} = \frac{5}{9}; \qquad \theta'' = 41^\circ\ 48'\ 37''.$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, ce phénomène ne peut pas se produire sur des plaques à faces parallèles, telles que AB, AC, fig. 69. En effet, dans ce cas, l'angle θ'' est toujours égal à l'angle θ'. Or, la plus grande valeur possible de θ' est justement $41^\circ\ 48'\ 37''$, qui répond au cas où le rayon incident SI est parallèle à la surface d'incidence AB. Ainsi, dans ce cas même, θ'' sera seulement égal à cette valeur, qui est la plus petite de celles où le phénomène peut avoir lieu.

Mais la chose deviendra possible, si la seconde surface AC s'incline le moins du monde sur la première AB, comme le représente la fig. 70. En effet, dans ce cas, θ'' sera plus grand que θ' de tout l'angle ε compris entre les deux surfaces; de sorte qu'en supposant, par exemple, θ' égal à $41^\circ\ 48''\ 37''$, ce

qui rend le rayon incident SI parallèle à la surface d'incidence, l'angle θ'' ou $\theta' + \varepsilon$ surpassera cette quantité, et par conséquent la réflexion intérieure aura lieu; elle aura lieu même en diminuant l'incidence du rayon SI, parce que la diminution qui en résultera dans θ' pourra être compensée dans θ'' par l'inclinaison ε des deux surfaces; mais la chose cessera d'être possible, lorsque l'angle θ' se trouvera diminué de tout l'angle ε, c'est-à-dire lorsque l'on aura à la première surface

$$\theta' = 41^\circ\, 48'\, 37'' - \varepsilon.$$

Car alors l'angle θ'' qui mesure l'incidence sur la seconde surface, et qui est toujours exprimé par $\theta' + \varepsilon$, ne vaudra plus que $41^\circ\, 48'\, 37''$. Or, c'est là précisément la plus petite incidence intérieure sous laquelle la réflexion totale puisse s'opérer. Si l'on veut savoir quelle est l'incidence extérieure θ sur la première surface qui correspond à cette limite, il n'y a qu'à faire

$$\sin\theta = \tfrac{3}{2} \sin(41^\circ\, 48'\, 37'' - \varepsilon).$$

La valeur de θ ainsi calculée donnera la plus petite incidence SIN, fig. 70, qui puisse amener le rayon à se réfléchir en totalité à la seconde surface du prisme. Dès-lors toutes les autres incidences plus grandes, situées du même côté de la normale, produiront également le phénomène, puisqu'elles rendront le rayon réfracté encore plus oblique sur la seconde surface AC; seulement, dans tous ces cas, la réflexion intérieure s'opérera avant que les molécules lumineuses aient atteint la limite extérieure des forces attractives.

Pour étendre ces résultats au cas où n serait quelconque, il n'y a qu'à généralement représenter par A l'angle dont le sinus est $\frac{1}{n}$, angle qui était ici $41^\circ\, 48'\, 37''$; et en désignant toujours par ε l'angle réfringent du prisme, la limite de θ sera fixée par les deux équations

$$\sin A = \frac{1}{n}; \qquad \sin\theta = n \sin(A - \varepsilon).$$

L'incidence θ devient nulle lorsque l'on suppose $\varepsilon = A$; ce qui, dans le verre, donne $\varepsilon = 41^\circ\, 48'\, 37''$, fig. 71. Ainsi, dans ce cas, la reflexion totale commence à s'opérer à la seconde sur-

face du prisme, lorsque le rayon incident est perpendiculaire à la première : à plus forte raison, elle s'opère aussi pour toutes les autres inclinaisons que le rayon peut prendre entre la normale et la surface du prisme, vers le sommet A de l'angle réfringent. Il est clair qu'il n'en serait pas de même si l'incidence se faisait de l'autre côté de la normale IN, parce qu'alors le rayon réfracté, devenant moins oblique à la seconde surface, atteindrait la limite extérieure des forces attractives avant que sa vitesse normale fût nulle, et il s'échapperait dans le vide extérieur.

Néanmoins, en augmentant davantage l'angle ε, on obtiendrait la réflexion totale, même avec des incidences prises vers la base B du prisme ; car, lorsque ε surpasse A, la valeur limite de θ devient négative dans notre formule ; ce qui indique que le rayon incident passe du côté de la normale opposé à celui que nous avions d'abord considéré. Dans ce cas, l'incidence limite $-\theta$ augmente toujours en même temps que ε ; et enfin elle devient égale à 90°, lorsque ε devient double de A ; ce qui, pour le verre ordinaire, répond à 83° 37′ 14″. Ainsi, dans un prisme de verre taillé sous cet angle, un rayon incident SI, fig. 72, qui arriverait parallèlement à la première surface du côté de la normale opposé au sommet A, éprouverait la réflexion totale à la seconde surface AC, et ne parviendrait que jusqu'à la limite extérieure de ses forces attractives. Par conséquent tout autre rayon incident quelconque qui pénétrerait dans ce prisme avec une valeur de θ plus petite, ou se réfléchirait intérieurement à la seconde surface, ou même s'éloignerait d'elle, s'il s'inclinait assez de l'autre côté de la normale. Un pareil prisme serait donc complètement imperméable à tous les rayons lumineux, et quoique formé de verre transparent, semblerait tout-à-fait opaque. Dans tout ceci, nous considérons les rayons incidens comme ayant tous le même rapport de réfraction n ; mais puisque nous avons remarqué que ce rapport est un peu différent pour les différentes couleurs, il s'ensuit que, si l'on a calculé l'angle A avec sa valeur moyenne, l'imperméabilité du prisme dans les incidences extrêmes pourra n'être pas absolue, et alors quelques-

unes des couleurs se réfléchiront intérieurement, tandis que d'autres seront transmises. C'est une conséquence du phénomène de la dispersion que nous examinerons plus tard.

Pour vérifier commodément par l'expérience les principaux résultats que la théorie vient de nous indiquer, il faut prendre un prisme réfringent d'un angle un peu considérable, par exemple, un prisme équilatéral A B C, fig. 73 ; puis, ayant disposé horizontalement une de ses faces A B, placez au-dessous d'elle un carton noir dans lequel vous aurez fait une petite ouverture ; et enfin sous cette ouverture, dans la même verticale, placez à quelque distance un objet F F qui, par cette disposition, ne pourra envoyer à la face A B que des rayons presque perpendiculaires. Alors, si vous placez l'œil au-dessus de l'autre face A C du prisme, il vous sera impossible d'apercevoir l'objet par réfraction à travers cette face, parce que les rayons qu'elle en recevra sous cette incidence se réfléchiront intérieurement.

On peut également vérifier que, dans tout autre prisme, il existe un angle d'incidence où les rayons cessent de se transmettre. Pour cela, il n'y a qu'à regarder un petit objet *s* par réfraction, à travers le prisme, fig. 74, en plaçant la base du prisme du côté de l'œil. Puis, sans remuer le prisme ni l'œil, on fera marcher lentement l'objet vers le sommet A ; en même temps l'image réfractée paraîtra s'approcher de ce sommet, et enfin, sortant des limites du prisme, elle cessera d'être aperçue. Cependant on pourra encore la revoir, en approchant l'œil de la seconde surface A C du prisme, afin de recevoir les rayons qui sortent sous une émergence plus grande. Mais à force d'éloigner l'objet, il viendra un terme où cette émergence sera de 90°. Alors les rayons sortiront parallèlement à la seconde surface du prisme, et en éloignant l'objet un peu davantage, ils se réfléchiront en dedans, de sorte que l'on ne pourra plus les recevoir dans l'œil, de quelque manière qu'on se place. Dans cette expérience, les rayons qui passent vers le sommet du prisme sont toujours les derniers qui disparaissent, parce que ce sont ceux qui rencontrent la seconde surface sous une incidence moins éloignée de la perpendiculaire. Voilà

pourquoi l'image semble toujours reculer vers le sommet de l'angle réfringent.

On peut encore observer l'effet de la réflexion intérieure d'une manière plus frappante, en plaçant un prisme triangulaire A B C, fig. 75, entre la lumière et l'œil, de façon que les rayons incidens S I, entrés par la première face, se réfléchissent sur la base et sortent ensuite par la seconde surface A C. Si l'on veut suivre toutes les gradations du phénomène, il faut d'abord placer l'œil assez haut pour voir par réfraction les objets situés au-dessous de la base B C. Dans cette position, les rayons S I I′, qui viennent des objets extérieurs, se réfractent aussi en I′, et sortent dans l'air. Mais en abaissant un peu plus l'œil, il vient un terme où les objets, placés au-dessous de B C, cessent d'être visibles par réflexion; et, au contraire, les objets extérieurs situés au-delà de A B se peignent sur la base B C, comme sur un miroir. C'est qu'alors les rayons réfractés I I′, devenant trop obliques sur B C pour pouvoir sortir dans l'air, sont réfléchis intérieurement; et comme aucun rayon venu des objets situés sous B C ne peut, en se réfractant dans le prisme, s'écarter autant de la normale I′ N′, aucun d'eux ne peut plus parvenir à l'œil. Aussi une fois que cette réflexion totale a commencé à s'opérer, elle continue d'avoir lieu dans toutes les obliquités plus grandes.

Pour fixer les limites exactes de cette disparition, concevons que N′ I′ I″ soit le plus grand angle de réfraction possible pour les rayons qui entrent dans le prisme par la base B C; et menons le rayon émergent I″ O qui en résulte après la seconde réfraction, à travers la face A C. Si, par le sommet de l'angle C, on mène C O′ parallèle à I″ O, il est clair qu'aucun rayon entré par la face B C ne pourra pénétrer dans l'angle O′ C C′, compris entre cette droite et le prolongement de la base du prisme. Ainsi, tant que l'œil sera situé dans cet espace, tous les objets situés au-dessous de B C lui seront invisibles par réfraction.

Il est utile de remarquer que les phénomènes de la réflexion intérieure ne peuvent jamais être observés en regardant à travers la même face du prisme par laquelle entrent les rayons incidens, comme le représentent les fig. 76 et 77. Car si le prisme

est tourné comme dans la première de ces figures, le rayon réfracté II′ ne pourra jamais se réfléchir sur la seconde surface, l'angle θ'' étant moindre que θ' de toute la valeur de ε; et si au contraire le prisme est tourné comme dans la fig. 77, ce qui donne θ'' plus grand que θ', et θ''' plus grand que θ'', le rayon réfléchi I′I″ cessera de pouvoir sortir par la première surface avant que sa réflexion totale sur la seconde commence à avoir lieu.

J'ai insisté sur ces phénomènes, parce qu'ils se présentent très-fréquemment dans le cours des expériences, et qu'ils sont une confirmation frappante de la théorie. Nous n'avons rendu mesurable de cette manière que l'incidence extrême dans laquelle la réflexion s'opère hors du corps réfringent, et tous les autres cas de cette réflexion se trouvent confondus dans les incidences plus grandes; mais nous verrons bientôt comment on peut vérifier aussi par l'observation l'incidence précise qui détermine la réflexion intérieure sur la surface réfringente elle-même.

Nous avons plusieurs fois remarqué qu'en général, lorsqu'un rayon de lumière rencontre une surface réfringente, une partie des molécules lumineuses se réfléchit partiellement, tandis que le reste passe. Mais lorsque la réflexion intérieure s'opère par réfraction, elle est toujours totale, c'est-à-dire qu'aucune des particules n'y échappe, du moins lorsque l'angle d'incidence intérieur excède les limites qui conviennent à toutes les couleurs dont se compose le rayon réfracté. Cela vient, comme nous le verrons par la suite, de ce que les inégalités d'état et de mouvement qui affectent périodiquement les molécules lumineuses, s'exercent toujours dans le sens de la trajectoire qu'elles décrivent; de sorte que, cette trajectoire devenant parallèle à la surface du corps, elles s'exercent parallèlement à cette surface, et ainsi elles n'empêchent nullement l'effet des forces attractives par lesquelles la trajectoire est pliée et ramenée dans l'intérieur des corps.

Dans toutes les expériences précédentes, nous avons considéré les prismes comme étant dans le vide, quoiqu'ils fussent environnés d'air. C'était en effet le cas de nos formules; et nous pouvions le supposer rempli par l'expérience, parce que l'action

de l'air sur la lumière est extrêmement petite, comme nous le verrons plus loin. Cependant, pour compléter notre théorie, il devient nécessaire de considérer ce qui arrive lorsque la lumière passe d'un milieu réfringent dans un autre contigu avec lui. D'ailleurs ce cas, qui est, rigoureusement parlant, celui de toutes les expériences, nous conduira, comme on va le voir, à un grand nombre de résultats importans.

Pour résoudre ce problème, il ne faut que reprendre nos premiers calculs, en supposant que la lumière n'est pas seulement attirée par le milieu où elle entre, mais par celui d'où elle sort.

Désignant donc par AB, fig. 78, la surface commune des deux milieux, il faudra concevoir parallèlement à cette surface une infinité de zones infiniment minces, dans chacune desquelles l'action propre de chaque milieu pourra être considérée comme une force constante. Alors, quand les particules lumineuses commenceront à éprouver les effets de ces forces à un degré sensible, ce qui arrivera en général pour un des milieux plutôt que pour l'autre, leur vitesse, perpendiculairement aux couches, sera accélérée par les attractions $\gamma\, \gamma_1\, \gamma_2 \ldots$ du milieu vers lequel elles se dirigent, et retardée au contraire par les attractions $g\, g_1\, g_2 \ldots$ de celui qu'elles abandonnent; de sorte qu'en général on pourra les considérer comme accélérées par les différences de ces forces à distances égales, c'est-à-dire par $\gamma - g$, $\gamma_1 - g_1 \ldots$ etc.; et à cela près, le calcul s'achèvera absolument comme nous l'avons fait dans le premier cas que nous avons considéré.

Soit donc V la vitesse constante des particules dans le premier milieu, lorsqu'elles ne sont pas encore entrées dans les limites des forces attractives. Nommons θ l'angle SIN que leur direction forme avec la normale IN à la surface commune des deux milieux; la vitesse V, décomposée parallèlement et perpendiculairement à cette surface, donnera pour composantes,

parallèlement à la surface AB. . . . . $V \sin \theta$

perpendiculairement à cette surface. . . . . $V \cos \theta$.

La seconde seule sera modifiée par les forces attractives, et après

que la molécule lumineuse aura traversé un certain nombre de couches, ses vitesses deviendront

parallèlement à AB.... V sin θ

perpendiculairem. à AB. $\sqrt{V^2\cos^2\theta + 2(\gamma - g)e + 2(\gamma_1 - g_1)e_1 \ldots}$

Si l'on veut la conduire ainsi jusqu'à la surface commune des deux milieux, il n'y a qu'à représenter par ν le rang des couches qui y répondent, et faisant pour plus de simplicité

$$2ge + 2g_1 e_1 + \ldots 2g_\nu e_\nu = u^2$$
$$2\gamma e + 2\gamma_1 e_1 + \ldots 2\gamma_\nu e_\nu = u'^2,$$

on aura à cette surface

vitesse parallèle à AB..... V sin θ

perpendiculaire à AB..... $\sqrt{V^2\cos^2\theta + u'^2 - u^2}$,

selon que u'^2 surpassera u^2 ou sera surpassé par lui, le second milieu agira plus ou moins fortement que le premier sur la lumière. Si le premier cas arrive, $u'^2 - u^2$ étant une quantité positive, la quantité contenue sous le radical sera entièrement positive, et la vitesse perpendiculaire aux couches sera toujours réelle; la molécule lumineuse entrera donc nécessairement dans le second milieu. Mais si u'^2 est moindre que u^2, $u'^2 - u^2$ sera négative, et il y aura toujours certaines incidences où elle surpassera $V^2\cos^2\theta$. Alors la vitesse perpendiculaire aux couches deviendra imaginaire à la surface des deux milieux, et la molécule lumineuse ne pourra pas s'avancer jusque-là; elle s'arrêtera donc auparavant dans la couche où sa vitesse d'émergence aura été tout-à-fait détruite, et de là elle retournera dans le premier milieu, en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Le cas extrême de cette réflexion a lieu quand elle se fait sur la surface même des deux milieux, ce qui exige que la vitesse perpendiculaire y soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait

$$V^2\cos^2\theta + u'^2 - u^2 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \cos^2\theta = \frac{u^2 - u'^2}{V^2},$$

et l'on voit en effet par la valeur de $\cos^2\theta$ que cela ne peut arriver qu'autant que u^2 surpasse u'^2, c'est-à-dire lorsque le premier milieu réfracte plus fortement que le second.

Dans le cas où les attractions des deux milieux seraient identiquement égales, on aurait généralement

$$\gamma - g = 0 \qquad \gamma_1 - g_1 = 0 \ldots$$

et ainsi de suite dans toutes les couches; alors les vitesses composantes se réduisent à $V \sin \theta$ et $V \cos \theta$, comme dans le premier milieu. Il n'y a donc ni réflexion, ni réfraction à leur surface commune.

Si l'on veut exprimer la valeur de $\cos^2 \theta$ en fonction des rapports de réfraction n, n' propres aux deux substances contiguës, il n'y a qu'à substituer au lieu de V^2, u^2 et u'^2 leurs valeurs

$$V^2 = n^2 v^2; \quad u^2 = \frac{v^2(n^2 - 1)}{2}; \quad u'^2 = \frac{v^2(n'^2 - 1)}{2},$$

et on trouvera

$$\cos^2 \theta = \frac{n^2 - n'^2}{2n^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \cos 2\theta = -\frac{n'^2}{n^2};$$

Le signe négatif de $\cos 2\theta$ montre que l'angle θ sera toujours plus grand que 45°.

Admettons comme précédemment que u^2 surpasse u'^2, ce qui rend la réflexion intérieure possible sous certaines incidences. Mais supposons l'incidence θ telle que $V^2 \cos^2 \theta + u'^2 - u^2$ soit encore une quantité positive; alors la vitesse perpendiculaire aux couches ne deviendra pas nulle à la surface commune des deux milieux, et la molécule lumineuse, après l'avoir traversée, pénètrera dans le second. Quand elle s'y sera enfoncée d'une certaine quantité, les expressions de ses vitesses seront

parallèlement à AB. . . . . $V \sin \theta$;

perpendiculairement à AB,

$$\sqrt{V^2\cos^2\theta + u'^2 - u^2 + 2(\gamma_v - g_v)e_v + 2(\gamma_{v-1} - g_{v-1})e_{v-1} \ldots}$$

et enfin à la dernière limite des forces attractives, elles deviendront

parallèlement à AB. . . . . . . $V \sin \theta$

perpendiculairement. . . . . . $\sqrt{V^2 \cos^2 \theta + 2u'^2 - 2u^2}$.

Si u'^2 surpasse u^2, c'est-à-dire si le second milieu réfracte plus que le premier, la vitesse perpendiculaire sera toujours réelle;

par conséquent il ne se fera point de réflexion intérieure, et la molécule lumineuse, passant au-delà de la limite des forces attractives du second milieu, y poursuivra sa route en ligne droite. Mais si, au contraire, le premier milieu agit plus fortement sur la lumière que le second, alors $2u'^2 - 2u^2$ étant une quantité négative, il y aura certaines incidences pour lesquelles elle surpassera $V^2 \cos^2 \theta$; et quand cela arrivera, la vitesse perpendiculaire aux couches devenant imaginaire, on voit que la molécule lumineuse n'atteindra pas la limite des forces attractives du second milieu, mais se réfléchira avant d'y parvenir, et reviendra dans le premier, en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Le cas extrême de cette réflexion aura lieu quand elle s'opérera sur la limite même des forces attractives du second milieu, ce qui exigera que la vitesse perpendiculaire aux couches y soit nulle, et qu'on ait

$$V^2 \cos^2 \theta + 2u'^2 - 2u^2 = 0,$$

d'où l'on tire $$\cos^2 \theta = \frac{2 \cdot (u^2 - u'^2)}{V^2};$$

par conséquent $$\cos^2 \theta = \frac{n^2 - n'^2}{n^2}, \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{n'}{n}.$$

Cette seconde limite de θ répond à des incidences plus petites que la première, puisque $\cos^2 \theta$ y est plus grand.

Nous reviendrons tout-à-l'heure sur ces résultats, et sur les moyens de les réaliser par l'expérience. Pour le moment, considérons ce qui arrive quand la molécule lumineuse poursuit sa marche dans le second milieu, soit que u'^2 surpasse u^2, soit que, $u'^2 - u^2$ étant négative, le double de sa valeur se trouve surpassée par $V^2 \cos^2 \theta$. Dans ce cas, les attractions des deux milieux étant devenues insensibles, les vitesses composantes resteront toujours telles que nous venons de les obtenir. Ainsi, en nommant x' y' les coordonnées de la molécule lumineuse, parallèlement et perpendiculairement à la surface commune, on aura, après un temps quelconque t,

$$x' = tV \sin \theta \qquad y' = t\sqrt{V^2 \cos^2 \theta + 2u'^2 - 2u^2}.$$

De plus, si l'on désigne par θ' l'angle formé dans le second milieu

par lerayon réfracté avec la normale, on aura, comme précédemment,
$$\sin \theta' = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}};$$
par conséquent
$$\sin \theta' = \frac{V \sin \theta}{\sqrt{V^2 + 2u'^2 - 2u^2}}.$$

Enfin, si l'on nomme V' la vitesse constante des particules dans le second milieu, conclue d'après la somme des carrés des composantes, on trouve
$$V'^2 = V^2 + 2u'^2 - 2u^2, \quad \text{et par suite,} \quad \sin \theta' = \frac{V \sin \theta}{V'};$$
ou, en mettant pour V^2, u^2, u'^2 leurs valeurs en n et n',
$$V'^2 = n'^2 v^2 \qquad \sin \theta' = \frac{n}{n'} \sin \theta.$$
Ainsi la vitesse définitive de la lumière dans le second milieu est constante, et la même que si le rayon y eût pénétré immédiatement en sortant du vide. De plus, le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence est aussi constant et inverse des vitesses constantes de la lumière dans les deux milieux.

Revenons maintenant aux phénomènes de la réflexion totale. En rassemblant les limites des angles qui la donnent, nous aurons

Depuis $\cos^2 \theta = 0$ jusqu'à $\cos^2 \theta = \frac{n^2 - n'^2}{2n^2}$	Réflexion intérieure dans le premier milieu, avant que la lumière soit parvenue au second.
$\cos^2 \theta = \frac{n^2 - n'^2}{2n^2}$	Réflexion à la surface commune des deux milieux.
Depuis $\cos^2 \theta = \frac{n^2 - n'^2}{2n^2}$ jusqu'à $\cos^2 \theta = \frac{n^2 - n'^2}{n^2}$	Réfl. entre la surf. comm. des deux mil. et la limite des forces attract. dans le second.
$\cos^2 \theta = \frac{n^2 - n'^2}{n^2}$	Réfl. à la limite des forces attr. dans le second mil.

M. Laplace a le premier fait remarquer ce double genre de réflexion intérieure des milieux qui se touchent, et Malus l'a

rendu sensible par l'expérience, en faisant usage d'un procédé déjà employé par M. Wollaston, mais que cet ingénieux physicien n'avait pas lié avec la théorie.

Commençons d'abord par constater simplement ce phénomène de la réflexion intérieure au contact de deux milieux. Pour le faire d'une manière très-simple, prenez un prisme de verre ordinaire, tel que A B C, fig. 79; et, après avoir déposé une goutte d'eau sur sa base B C, placez-le de manière que les rayons incidens S I, entrés par la face A B, et réfléchis sur la base B C, puissent arriver à l'œil en O. Alors, en tournant lentement le prisme autour de son axe, vous remarquerez que la réflexion totale commence à s'opérer sur toute la partie de la base B C, qui est contiguë à l'air, avant d'avoir lieu au point E où la goutte d'eau se trouve; de façon que celle-ci reste encore long-temps visible par réfraction, au moyen des rayons qui en émanent directement. Peu à peu, en abaissant l'œil vers la base du prisme pour rendre les rayons plus obliques, la réflexion totale s'opère même au point E, et la goutte E disparaît.

Tous ces phénomènes sont des conséquences nécessaires de la théorie. Lorsque les rayons réfractés I E tombent sur la base B C avec une incidence voisine de la perpendiculaire, ils ne sont point réfléchis intérieurement, même dans les points de la base qui sont contigus à l'air. Réciproquement, tout rayon venu des objets extérieurs situés au-dessous de la base du prisme, et qui se présente sous cette incidence, le pénètre, et parvient à l'œil; mais, lorsqu'en en abaissant l'œil, les rayons réfractés deviennent plus obliques sur la base B C, il arrive un terme où l'action de l'air, en contact avec cette base, n'est plus assez forte pour les obliger à se transmettre; ils se réfléchissent donc totalement, après être sortis du prisme, jusqu'à la limite des forces attractives de la couche d'air, et leur incidence intérieure θ sur B C est alors donnée par l'équation

$$\cos^2\theta = \frac{n^2 - n'^2}{n^2},$$

dans laquelle n et n' désignent les rapports constans du sinus d'incidence au sinus de réfraction, pour les rayons qui passent

du vide dans le verre ou dans l'air ; mais la limite est différente pour le point E, où la goutte liquide est adhérente, parce que, relativement à cette goutte, le rapport de réfraction n' est beaucoup plus grand que pour l'air ; ce qui rend la valeur limite de $\cos\theta$ plus petite, et par conséquent l'angle θ lui-même plus grand : aussi faut-il abaisser l'œil davantage pour que la réflexion intérieure s'opère au point E, où se trouve la goutte liquide ; et quand on est parvenu à cette inclinaison, la goutte disparaît entièrement. A cet instant, il y a un certain nombre de rayons SI, émanés des objets extérieurs, qui traversent la goutte à une distance infiniment petite de la base du prisme, et qui ensuite parviennent à l'œil, étant ramenés dans l'intérieur du prisme par la réfraction. Lorsque la goutte est formée d'un liquide diaphane, ces rayons, dans leur court trajet à travers sa substance, n'éprouvent qu'un affaiblissement insensible. Alors leur éclat empêche de distinguer la faible lumière qui est encore envoyée à l'œil par la couche liquide infiniment mince que les forces attractives embrassent. C'est pour cela que la goutte disparaît.

Afin de rendre cette conséquence plus évidente, menons, dans l'intérieur de la goutte, une ligne bc parallèle à BC, et qui désignera la profondeur jusqu'à laquelle est sensible l'excès de force attractive du verre. C'est donc sur cette limite que se fait la réflexion intérieure des rayons, lorsque l'incidence intérieure IEN ou θ est déterminée par l'équation

$$\cos^2\theta = \frac{n^2 - n'^2}{n^2}, \quad \text{d'où l'on tire} \quad \sin\theta = \frac{n'}{n}.$$

Or, par la forme que nous venons de donner à $\sin\theta$, on voit que θ est aussi l'angle de réfraction pour un rayon ri, qui, partant d'un des points de la goutte liquide située sur la limite bc des forces attractives, se dirigerait parallèlement à la surface du verre. Un tel rayon sera donc ramené dans le verre et s'y réfractera en formant l'angle θ avec la normale EN. Mais tous les autres rayons parallèles à celui-là, qui partiraient des autres points de la goutte liquide situés au-delà de bc, n'étant plus attirés sensiblement par le verre, ne pourront plus

s'y introduire. Ces points ne pourront donc faire entrer dans le prisme que des rayons obliques sur la surface BC, lesquels s'y réfracteront suivant la proportion constante des sinus; et comme ces rayons, à cause de leur obliquité, s'approcheront plus de la normale EN que le rayon *r*I′, on voit qu'après leur réfraction, ils seront tous compris dans l'intérieur du cône droit engendré par le rayon *r*I′, en tournant autour de la normale EN. Ils ne pourront donc pas parvenir à l'œil, que l'on suppose situé en O sur la direction du rayon émergent donnée par *r*I′.

Cette exclusion ne s'applique plus à la petite couche de liquide comprise entre la surface du verre et la limite extérieure *bc* des forces attractives. Car, outre le rayon *ri*, les molécules qui forment cette couche pourront en envoyer beaucoup d'autres dans des directions telles qu'ils rentrent dans le prisme, parallèlement à *r*I′, et qu'ainsi ils arrivent avec lui dans l'œil. Conséquemment, lorsqu'on cesse de voir par réfraction toute la partie de la goutte située au-delà de *bc*, on doit voir encore la couche comprise entre *bc* et la surface du prisme. Mais dans les substances liquides qui transmettent beaucoup de lumière, et qui en émettent peu, une couche si mince n'envoie pas assez de rayons pour être aperçue, d'autant mieux que ces rayons se confondent avec la lumière directe, qui, entrant par la face AB, se réfléchit dans les premières couches du liquide, sans perdre beaucoup de son intensité.

Ce mélange n'a plus lieu quand le corps en contact avec le prisme est opaque, parce qu'une couche, même très-mince, de ces corps arrête tous les rayons qui tombent sur elle. En outre, elle en émet directement beaucoup plus qu'une couche liquide de même épaisseur. Alors la petite couche située en-deçà de *bc* devient visible, tant par les rayons directs qui en émanent et qui la montrent avec sa couleur propre, que par opposition avec le reste de la base du prisme où la réflexion totale a lieu. On aperçoit même quelque chose de ce dernier effet avec les corps liquides dont la transparence n'est pas parfaite.

On comprend donc qu'avec les corps opaques, la réflexion

intérieure ne pourra s'opérer que lorsque la trajectoire lumineuse cessera de sortir du verre, et par conséquent elle commencera sur la surface du verre même, lorsque θ sera déterminé par la seconde limite.

$$\cos^2\theta = \frac{n^2 - n'^2}{2\,n^2}.$$

En effet, aucun des points du corps adhérent au prisme, même parmi ceux qui sont compris dans la limite des forces attractives ne pourra émettre de rayons qui se réfractent en formant avec la normale EN un angle aussi grand que celui-là. Quoique cette limite de réflexion ne soit séparée de la précédente que par l'épaisseur excessivement petite où les forces attractives sont sensibles, elle donne cependant une différence très-considérable dans les valeurs de l'angle θ. Pour en voir un exemple, supposons que le prisme soit de crownglass, et que la goutte soit d'eau distillée, on aura $n = 1{,}5$ $n' = 1{,}33$; de là on tire

Réflex. à la limite extér. des forces attractives...... $\Big\}\cos^2\theta = \frac{n^2 - n'^2}{n^2} = \frac{0{,}4811}{2{,}25}$; $\theta = 62^\circ\, 23'\, 25''$.

Réfl. à la surface commune de l'eau et du verre. .... $\Big\}\cos^2\theta = \frac{n^2 - n'^2}{2\,n^2} = \frac{0{,}4811}{4{,}5}$; $\theta = 70^\circ\, 54'\, 51''$.

Il y a donc huit degrés et demi de différence entre les incidences intérieures ; mais la disparition aura lieu sensiblement dès la première, à cause de la transparence de l'eau, et la seconde limite ne pourra pas être remarquée. Si l'on compare ces résultats à ceux que nous avons obtenus plus haut, lorsque le prisme était environné de vide, on verra que les valeurs actuelles de θ sont beaucoup plus grandes, c'est-à-dire que l'action de l'eau a fort étendu le cône intérieur qui comprend tous les rayons réfractés.

Si la goutte adhérente au prisme est formée d'encre liquide, dont la puissance réfringente est plus forte que celle de l'eau pure, l'angle θ où la réflexion commence est encore plus grand. Cet angle augmente à mesure que l'encre se sèche, parce qu'en même temps elle se condense et agit plus fortement sur la

lumière. Enfin quand elle est devenue tout-à-fait opaque, la puissance réfringente des molécules métalliques qu'elle contient l'emporte sur celle du verre, et la tache noire qui en résulte est visible sous toutes les incidences possibles.

Pour que la substance mise en contact avec le prisme exerce ainsi de l'influence sur la réflexion intérieure, il n'est pas nécessaire qu'elle ait d'abord été déposée à l'état liquide sur la surface du verre, et qu'elle s'y soit ensuite solidifiée ; il suffit qu'elle en soit approchée d'assez près pour que ses forces attractives y pénètrent. Par exemple, si l'on prend deux prismes de même matière ABC, A′B′C′, fig. 80, et qu'on presse fortement leurs faces BC, B′C′ l'une contre l'autre, il arrive que, dans les points où les inégalités insensibles des surfaces les rapprochent davantage, le contact devient assez intime pour que la lumière ne puisse plus du tout s'y réfléchir intérieurement. Alors, quand on regarde à travers les prismes, sous des inclinaisons telles que la réflexion totale se produise dans les portions de leurs surfaces qui sont plus écartées, ces points-là font l'effet d'autant de taches noires à travers lesquelles on continue de voir les objets par réfraction, comme on les verrait par un trou percé au travers des prismes superposés. Il est donc évident que, dans ces endroits, la distance des deux surfaces est moindre que la limite à laquelle les forces attractives s'étendent.

Ces phénomènes donnent un moyen de déterminer les rapports de réfraction des corps même opaques, lorsqu'on a un prisme plus réfringent qu'eux. Il ne faut que les mettre en contact avec une des surfaces de ce prisme, et déterminer par expérience l'angle θ au-delà duquel on cesse de les apercevoir par réfraction. En effet, cet angle étant connu, ainsi que le rapport de réfraction n pour le prisme dont on fait usage, n' sera déterminé par la condition de la disparition, qui donne, si le corps est opaque,

$$\cos^2\theta = \frac{n^2 - n'^2}{2n^2}, \quad \text{d'où} \quad n'^2 = n^2 - 2n^2\cos^2\theta; \quad (1)$$

et s'il est transparent,

$$\cos^2\theta = \frac{n^2 - n'^2}{n^2}, \quad \text{d'où} \quad n' = n\sin\theta. \quad (2)$$

Pour trouver θ, suivons le rayon limite EI′, fig. 81, jusqu'à la surface de sortie AC, et nommons θ'', θ''' les angles qu'il forme avec la normale de cette surface, avant et après son émergence. Désignons en outre par a l'angle réfringent ACB, à travers lequel on observe l'objet E; cela posé dans l'arrangement que représente la figure, il est clair que a est égal à la somme des angles $\theta + \theta''$, de sorte que $\theta'' = a - \theta$; or on a en général

$\sin\theta''' = n \sin\theta''$; on aura donc $\sin\theta''' = n \sin(a - \theta)$.

Reste à déterminer θ'''. On y parviendra en posant la base BC du prisme sur une glace horizontale GG, et mesurant l'angle P′OI′ ou b, formé par le rayon émergent OI′ avec la verticale OP′. Car les deux angles P′N′I′ et BCI′ sont égaux entre eux, ayant leurs côtés perpendiculaires; et comme le premier est extérieur au triangle ON′I′, il s'ensuit que $\theta''' = a - b$; ce qui donne $\sin(a - b) = n \sin(a - \theta)$. (3)

Tout étant connu dans cette équation, excepté $a - \theta$, on l'en déduira par les tables trigonométriques, et retranchant le résultat de a, on aura θ. Il ne restera plus qu'à substituer cette valeur dans l'équation (1) ou (2), et l'on en conclura le rapport de réfraction n' pour la substance qu'on a mise en contact avec le prisme. Quoique dans la figure nous ayons représenté le rayon émergent OI′ comme s'élevant au-dessus de la normale, la formule qui donne θ n'en est pas moins applicable à tous les cas possibles, en y mettant pour b sa valeur observée. Seulement, lorsque le rayon émergent OI′ s'abaissera au-dessous de l'horizontale, il arrivera que l'angle b deviendra obtus.

Dans ces formules, l'angle réfringent du prisme semble tout-à-fait arbitraire; il est cependant limité; car il doit toujours être tel, que le rayon limite EI′ puisse sortir par la seconde surface A C. Pour cela, il faut que l'angle θ'' ou $a - \theta$ n'excède pas celui sous lequel la réflexion intérieure s'opère dans la matière dont le prisme est fait. C'est aussi ce que montre l'équation (3). Elle cesse d'être possible lorsque $a - \theta$ surpasse la limite que nous venons d'assigner; car alors le produit $n \sin(a - \theta)$

devient plus grand que 1, et ne peut plus représenter un sinus. Les calculs numériques deviennent un peu plus simples, lorsque la face AC du prisme est perpendiculaire sur sa base. Alors a devenant égal à 90°, l'équation qui détermine θ donne immédiatement

$$\cos\theta = \frac{\cos b}{n};$$

et en substituant cette valeur dans nos formules, on trouve

Pour les corps opaques $n'^2 = n^2 - 2\cos^2 b$ { Réflexion à la surface commune des deux milieux.

Pour les corps transpar. $n'^2 = n^2 - \cos^2 b$ { Réfl. à la limite extérieure des forces attractives.

Dans tous les cas, lorsqu'on aura déterminé n_1, il ne restera plus qu'à mesurer la densité ϱ de la substance employée, et $\frac{n'^2 - 1}{\varrho}$ sera l'expression de son pouvoir réfringent.

Pour confirmer la distinction établie par ces formules entre les deux genres de réflexion, Malus a déterminé de cette manière la valeur de n' relativement à la cire d'abeille, rendue tour à tour liquide et opaque; et quoique les angles de disparition différassent de beaucoup dans les deux cas, il a trouvé que la valeur du pouvoir réfringent qu'on en déduisait par les formules était toujours sensiblement la même. Pour mesurer l'angle b formé par le rayon émergent avec la verticale, il regardait la tache à travers un petit trou rond O, fig. 82, percé dans une plaque de cuivre qui pouvait monter et descendre le long d'une tige OP', fixée perpendiculairement à un plateau de verre sur lequel on posait le prisme, après avoir fait adhérer une goutte de cire sur sa base. Lorsqu'on avait trouvé la hauteur du point O, à laquelle la cire disparaissait, on mesurait cette hauteur OP' sur la tige, qui était exprès divisée. On mesurait aussi la distance P'H, à laquelle allait directement aboutir le prolongement du rayon émergent I'O; et cette distance, divisée par la hauteur OP', donnait la tangente de l'angle P'OI', qui est désigné par b dans nos formules. D'ailleurs, la densité ϱ s'évaluait par les moyens connus. Voici le tableau des expériences faites par Malus de cette manière, avec un prisme rectangu-

laire de flintglass, dont le rapport de réfraction n était 1,60512. Il observa d'abord la cire solide opaque. Dans ce cas, le rapport de réfraction n' était donné par la formule

$$n'^2 = n^2 - 2\cos^2 b.$$

Inclinaison du rayon réfracté sur la verticale b.	Carré du rapport de réfraction pour la cire n'^2.	La densité observée ρ *.	Pouvoir réfringent $\frac{n'^2 - 1}{\rho}$.		Remarques.
66° 57′ 30″	2,270022	0,9670825	1,31325		La cire commence à disparaître.
67 33 30	2,284980	0,9670825	1,32872		La couleur devient insensible.
67 38 28	2,287005	0,9670825	1,33081	1,33081	La cire disparaît. Températ. 14° Réaum.
67 47 17	2,290543	0,9670825	1,334425		La tache incol. commence à s'évanouir.
68 2 3	2,296558	0,9670825	1,34070		La tache incolore disparaît totalement.
67 37 59	2,286800	0,9670825	....	1,33060	La dilatat. n'a pas pu être exactement déterm. Temp. 26° R.
65 7 8	2,222542	0,9130000	....	1,33170	

* La densité ρ est calculée en prenant pour unité celle de l'eau, au maximum de condensation.

L'accord des différentes valeurs trouvées pour le pouvoir réfringent montre que les différentes phases de la disparition ne font osciller ce résultat qu'entre des limites très-peu étendues. Voici maintenant les observations relatives à la même cire devenue liquide. Dans ce cas, le rapport de réfraction n est donné par la formule $n'^2 = n^2 - \cos^2 b$.

Inclinaison du rayon réfracté sur la verticale b.	Carré du rapport de réfraction pour la cire n'^2	La densité observée ρ.	Pouvoir réfringent $\frac{n'^2 - 1}{\rho}$.	Remarques.
46° 32′ 21″	2,103256	0,8289910	1,33085	Cire fondante : tempér. 48° R.
45 50 0	2,090960	0,8197652	1,33082	Température 66 ½ Réaumur.
46 32 39	2,103352	0,8289910	1,33095	Température 48° Réaumur.
46 31 45	2,103110	0,8289910	1,33067	Température 48° Réaumur.
45 7 28	2,078592	0, 8105395	1,33072	Cire au terme de l'ébullition : température 85° Réaumur.

Dans cette seconde série d'expériences, les angles b sont bien moindres que dans la première, parce que la disparition complète commence à des valeurs beaucoup plus petites de θ; ce qui relève le rayon émergent I'O, et le rapproche de la verticale. On peut aisément constater la réalité de cette énorme différence. Il faut appliquer une petite boule de cire solide c, fig. 83, sur la base d'un prisme triangulaire de verre, et placer ce prisme entre la lumière des nuées et l'œil, de manière à observer la réflexion intérieure sur la partie nue de sa base. Quand on est arrivé à l'incidence où ce phénomène commence à se produire, on voit encore parfaitement la petite boule de cire; et si le prisme est de crownglass, on continue de la voir, même sous presque toutes les inclinaisons : mais si l'on approche au-dessous d'elle la flamme d'une bougie, qui l'échauffe et qui la fonde, on la voit subitement disparaître, du moins lorsque l'œil est convenablement abaissé; ôte-t-on la bougie, la cire redevient solide, et on la revoit par réfraction comme auparavant.

Dans ces expériences, la disparition et la réapparition ne se font pas subitement à une incidence fixe, mais graduellement par des périodes successives de décoloration. Cela se voit même par le détail des observations que Malus a rapportées; et d'après ce que nous avons dit plus haut sur la manière dont ces phénomènes s'opèrent, il est facile d'en concevoir la cause. Car la disparition de la cire liquide, par exemple, étant produite par la prédominance de la lumière réfléchie sur la lumière directe qui émane de la dernière couche de sa substance, il peut arriver que cette couche, lorsqu'elle s'étend jusqu'à la limite des forces attractives, intercepte assez de lumière réfléchie pour être encore aperçue; et alors, pour cesser de la voir, il faudra incliner davantage les rayons incidens sur la surface de la cire, afin que leur réflexion dans sa substance s'opère à une moindre profondeur, et qu'ils y perdent moins de leur intensité. Dans ce cas, la trajectoire lumineuse ne s'étendra donc plus jusqu'à la limite extérieure des forces attractives, et la valeur de θ, conclue de la disparition observée, sera plus grande que celle qui conviendrait à un liquide de même force réfringente, mais d'une diaphanéité parfaite. La même cause agira en sens in-

verse, si la substance en contact avec le prisme est solide, comme la cire, avant d'être fondue ; car cette substance, malgré sa solidité, ne sera jamais complètement opaque, puisque tous les corps, excepté les métaux blancs, peuvent, même par des moyens mécaniques, être assez amincis pour laisser passer en partie la lumière. Ainsi, quand les trajectoires lumineuses deviendront très-obliques sur la substance solide adjacente aux prismes, elles pourront, sans s'y éteindre, la pénétrer à une petite profondeur, et s'y réfléchir comme dans un corps diaphane. La lumière qui proviendra de cette réflexion se mêlera donc à la lumière directe de la substance, et commencera par l'affaiblir; après quoi, elle en rendra l'effet insensible avant que la réflexion s'opère dans l'intérieur du prisme, comme le suppose la formule des corps opaques. L'incidence θ, observée à l'instant de la disparition, sera donc plus petite que celle qui conviendrait à un corps solide parfaitement opaque et de même force réfringente que celui qu'on a employé.

Ces considérations donnent lieu de penser que les phénomènes de la réflexion intérieure ne peuvent pas fournir des données rigoureusement fixes et précises pour calculer les forces réfringentes, étant influencés par l'imparfaite transparence des substances, et par leur imparfaite opacité. Cette remarque semble expliquer les différences considérables que M. Brewster dit avoir trouvées entre les indications de cette méthode pour diverses substances, et celles d'un autre procédé qu'il a imaginé, et que nous expliquerons ailleurs. Quoi qu'il en soit, l'ingénieuse idée de M. Wollaston a fourni le premier moyen que l'on ait eu pour mesurer, même approximativement, l'action des corps opaques sur la lumière ; et elle aura eu cet autre avantage, non moins grand peut-être, de faire observer les phénomènes de la réflexion intérieure avec beaucoup plus de soin et de détail qu'on ne l'avait fait auparavant.

Ayant ainsi donné les moyens de trouver les pouvoirs réfringens de tous les corps diaphanes, et même ceux des corps opaques que l'on peut mettre en contact avec des corps diaphanes moins réfringens qu'eux, il faut rapprocher ces résultats

observés dans différentes classes de substances, afin de chercher si l'on peut découvrir quelque rapport entre leur force réfringente et leur composition chimique ; tel est l'objet du tableau suivant, qui a été formé par Newton :

Nature des substances réfringentes.	Rapport du sinus d'incidence au sinus de réfract. pour la lumière jaune... n.	Valeurs de la quantité n^2-1.	Densité de la substance réfringente.	Son pouvoir réfr. $\frac{n^2-1}{\varrho}$ *.
Une fausse topaze (baryte sulfatée).............	23 à 14	1,699	4,27	3979
L'air.................	3201 à 3200	0,000625	0,0012	5208
Le verre d'antimoine.....	17 à 9	2,568	5,28	4864
Une sélénite (chaux sulf.).	61 à 41	1,213	2,252	5386
Le verre commun.......	31 à 20	1,4025	2,58	5436
Le cristal de roche......	25 à 16	1,445	2,65	5450
Le cristal d'Islande......	5 à 3	1,778	2,72	6536
Le sel gemme (soude mur.)	17 à 11	1,388	2,143	6477
L'alun (potasse sulfatée)..	35 à 24	1,1267	1,714	6570
Le borax (soude boratée).	22 à 15	1,1511	1,714	6716
Le nitre (potasse nitrat.)..	32 à 21	1,345	1,9	7079
Le vitriol de Dantzick (fer sulfaté)...............	303 à 200	1,295	1,715	7551
L'huile de vitriol (acide hydro-sulfurique).....	10 à 7	1,041	1,7	6124
L'eau de pluie.........	529 à 396	0,7845	1	7845
La gomme arabique.....	31 à 21	1,179	1,375	8574
L'esprit-de-vin bien rectifié...................	100 à 73	0,8765	0,866	10121
Le camphre............	3 à 2	1,25	0,996	12551
L'huile d'olive.........	22 à 15	1,1511	0,913	12607
L'huile de lin..........	40 à 27	1,1948	0,932	12819
L'esprit de térébenthine..	25 à 17	1,1626	0,874	13222
L'ambre..............	14 à 9	1,42	1,04	13654
Le diamant...........	100 à 41	4,949	3,4	14556

* Tous les nombres contenus dans cette dernière colonne ont été multipliés par 10000, afin de ne point avoir de décimales. Dans la première colonne, j'ai joint les dénominations actuelles à celles dont s'est servi Newton. La grande pesanteur de la pierre qu'il appelle *fausse topaze* indique, sans aucun doute, le sulfate de baryte.

En jetant les yeux sur ce tableau, on voit que des substances de densité très-diverses peuvent avoir des forces réfringentes égales, et l'on voit même qu'une substance moins dense qu'une autre peut cependant posséder un pouvoir réfringent plus fort. Ainsi, comme nous l'avions déjà annoncé plus haut, l'action des corps sur la lumière ne dépend pas seulement de leur densité, mais encore de la nature chimique de leurs particules. On remarque de plus que les substances dont la force réfringente est la plus énergique, sont en général des résines et des huiles; et comme celle de l'eau distillée ne leur est guère inférieure, il est naturel d'en conclure qu'il doit y avoir dans l'eau quelque principe inflammable analogue à celui dont les résines et les huiles sont composées; et la même conclusion doit s'étendre aussi au diamant, dont la force réfringente est beaucoup plus considérable encore. Ces aperçus hardis n'avaient point échappé à la sagacité de Newton, et il n'hésita pas à les indiquer; car ce grand homme, qui mettait la plus grande sévérité dans ses expériences, et la plus grande réserve dans ses conjectures, n'hésitait jamais à suivre les conséquences d'une vérité, aussi loin qu'elle pouvait le conduire.

Quel est donc ce principe commun aux huiles et aux résines, qui leur donne une si grande action sur la lumière ? Pour le découvrir, il n'y a pas de meilleur moyen que de déterminer les pouvoirs réfringens des substances gazeuses; car presque tous les corps dont il s'agit étant composés de pareilles substances combinées ensemble, on aura ainsi l'avantage de les étudier dans leurs élémens les plus généraux; c'est ce que nous avons fait, M. Arago et moi, dans notre mémoire cité plus haut.

J'ai déjà dit comment nos observations étaient faites, et quels en étaient les résultats immédiats; il me faut maintenant expliquer comment on en peut déduire les pouvoirs réfringens des substances gazeuses observées.

Rappelons-nous que, dans ces expériences, le rayon lumineux passait, de l'air extérieur au prisme, dans le gaz intérieur, à travers des glaces dont les surfaces étaient parallèles, ou pouvaient être censées telles, puisque l'observation même four-

nissait le moyen de rectifier les effets de leur inclinaison. Nommons R la déviation ainsi corrigée, et qui se trouvait exprimée par $\Delta - D$ dans nos premières formules, page 239. Cette donnée détermine le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, pour un rayon qui passe de l'air dans le gaz intérieur. Si l'on désigne par θ, θ' ces deux angles, et par a l'angle réfringent du prisme, il faut d'abord calculer une quantité auxiliaire ω par la formule

$$\omega = \frac{R}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} a} + \frac{R^2}{8},$$

après quoi on a $$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = 1 - \omega.$$

Maintenant soit ρ la densité de l'air extérieur au prisme, et n le rapport constant de réfraction pour un rayon qui y pénétrerait en sortant du vide. Soient ρ', n' les quantités analogues pour le gaz intérieur; dénotons par P P' leurs pouvoirs réfringens, nous aurons, d'après leur définition même,

$$P = \frac{n^2 - 1}{\rho} \qquad P' = \frac{n'^2 - 1}{\rho'} \qquad \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{n'}{n} = 1 - \omega.$$

Prenons les valeurs de n, n' dans les deux premières, et substituons-les dans la troisième, il viendra

$$\frac{\sqrt{1 + P'\rho'}}{\sqrt{1 + P\rho}} = 1 - \omega.$$

Lorsqu'un des deux pouvoirs réfringens P P' sera connu, cette équation déterminera l'autre; il ne reste donc qu'à y réduire les deux inconnues à une seule, en déterminant d'abord une fois pour toutes la valeur de P relativement à l'air atmosphérique.

Dans ce cas, on se borne à faire le vide dans le prisme aussi exactement que possible, et on n'y introduit aucun gaz. Ainsi, en supposant qu'on ait absorbé les vapeurs aqueuses, ou que l'on opère à des températures assez froides pour que leur quantité soit insensible, ce qui peut rester encore dans le prisme n'est que de l'air extrêmement raréfié, dont on mesure la force élastique par le baromètre intérieur et dont on connaît par con-

séquent la densité. Pour plier notre formule à ces données, il faut faire $P' = P$, en conservant toujours ϱ et ϱ', pour désigner les densités des deux airs extérieurs et intérieurs. Alors elle devient

$$\frac{\sqrt{1 + P\varrho'}}{\sqrt{1 + P\varrho}} = 1 - \omega.$$

Elle ne contient donc plus que la seule inconnue P, que l'on pourra déterminer en y mettant pour ω, ϱ, ϱ' leurs valeurs tirées de l'expérience.

Mais ce calcul peut être abrégé par la considération du peu de densité de l'air intérieur, et par conséquent de la petitesse de ϱ' comparativement à ϱ. En effet, en élevant les deux membres au carré, et faisant disparaître le dénominateur, il vient $$1 + P\varrho' = (1 - \omega)^2 (1 + P\varrho),$$
ce qui donne

$$P[\varrho - \varrho' - \varrho(2\omega - \omega^2)] = 2\omega - \omega^2,$$

et par suite,

$$P = \frac{2\omega - \omega^2}{\varrho - \varrho' - \varrho(2\omega - \omega^2)}.$$

On peut, dans le dénominateur du second nombre, négliger le carré de ω. De plus, à cause de l'extrême petitesse de ϱ' et de ω, on peut substituer $\varrho - \varrho'$ à ϱ, dans le terme multiplié par ω, au dénominateur. On aura ainsi cette expression plus simple $$P = \frac{2\omega - \omega^2}{(\varrho - \varrho')(1 - 2\omega)}.$$

Elle peut le devenir davantage encore en réduisant le facteur $\frac{1}{1 - 2\omega}$ en série par la division, ce qui passera tous les ω au numérateur; et en négligeant dans tout le calcul les ω^3, qui sont en effet insensibles, il viendra

$$P = \frac{2\omega + 3\omega^2}{\varrho - \varrho'}.$$

Nommons (ϱ) la densité de l'air sec, à la température de la glace fondante, et sous la pression $0^m,76$. Désignons par p et t la pression et la température de l'air extérieur au prisme, par

p' et t' la pression et la température de l'air intérieur, nous aurons

$$\frac{\varrho}{(\varrho)} = \frac{p}{0^m,76\,(1 + t.0,00375)}\quad \frac{\varrho'}{(\varrho)} = \frac{p'}{0^m,76\,(1 + t'.0,00375)}.$$

On peut, sans aucune erreur, admettre que l'air intérieur, resté dans le prisme, est à la même température que celui qui enveloppe les faces; alors $t = t'$. Avec cette supposition qui simplifie les calculs, il vient

$$\frac{\varrho - \varrho'}{(\varrho)} = \frac{p - p'}{0,76\,(1 + t.0,00375)},$$

et par conséquent

$$P = \frac{(2\omega + 3\omega^2).0^m,76\,(1 + t.0,00375)}{(\varrho)\,(p - p')};$$

à quoi il faut joindre la formule

$$\omega = \frac{R}{2\tang\frac{1}{2}a} + \frac{R^2}{8},$$

Dans laquelle R est la déviation du rayon lumineux corrigée du défaut de parallélisme des faces; cette dernière donnera ω d'après l'observation de R; après quoi, la première détermi·nera P. C'est ainsi que nous avons fait tous nos calculs pour déterminer la force réfringente de l'air atmosphérique.

Réciproquement, quand on connaît P, on peut vouloir en déduire R, c'est-à-dire la déviation vraie correspondante aux observations du vide. C'est un genre de vérification direct, et que nous avons aussi employé. Dans ce cas, il faut retourner les formules par la méthode du retour des suites, et l'on en tire

$$\omega = \frac{1}{2}\cdot\frac{P(\varrho)(p - p')}{0^m,76\,(1 + t.0,00375)} - \frac{3}{8}\left[\frac{P(\varrho)(p - p')}{0^m,76(1 + t.0,00375)}\right]^2;$$

$$R = 2\,\omega\tang\tfrac{1}{2}a - \omega^2\tang^3\tfrac{1}{2}a.$$

La première donnera ω, d'après les pressions et les températures assignées : après quoi, la seconde déterminera R, que l'on pourra comparer immédiatement aux résultats des observations. Il faut toujours se rappeler que les pressions p et p' sont censées ramenées à la température de la glace fondante.

Voici un exemple de ces calculs. Le 29 frimaire, le vide étant fait dans le prisme, et l'éprouvette n'y indiquant plus qu'une pression de $0^m,002$, nous observâmes, M. Arago et moi, la déviation apparente Δ égale à $5'\ 45'',8$. La déviation D, due au défaut de parallélisme des faces, était $-\ 16'',6$. Je lui donne le signe négatif, parce qu'elle agissait dans le sens de l'air condensé. La température de l'air était $-\ 1^\circ,5$; le baromètre extérieur marquait $0^m,7563$; sa température était $-,2^\circ\ 75$: nous avons vu d'ailleurs que l'angle réfringent de notre prisme était $143^\circ\ 7'\ 28''$; ainsi, en réduisant les pressions intérieures et extérieures à la température de la glace fondante, nous aurons pour élémens du calcul :

$$t = -1,5 \qquad R = 5'\ 45'',8 + 16'',6 = 6'\ 2'',4$$
$$p = 0^m,7567 \quad p' = 0^m0,002 \quad a = 143^\circ\ 7'\ 28''.$$

Le reste s'achève comme on le voit ici :

$$\begin{array}{ll} \log \sin R = \bar{3},2447624 & \log \sin^2 R = \bar{6},4895248 \\ \log 2 \tang \tfrac{1}{2} a = 0,7780798 & \log 8 = 0,9030900 \\ \hline \bar{4},4666826 & \bar{7},5864348 \end{array}$$

$$\frac{\sin R}{2 \tang \frac{1}{2} a} = 0,0002928752\ ; \qquad \frac{\sin^2 R}{8} = 0,00000038586$$

De là on tire

$$\omega = 0,0002932611\ ; \qquad 2\omega + 3\omega^2 = 0,0005867803$$
$$\log = \bar{4},7684755$$
$$\log 0,76 = \bar{1},8808136$$
$$\overline{}$$
$$t.0,00375 = -0,005625 \qquad \bar{4},6492891$$
$$\log t.0,00375 = \bar{3},7501225 - \qquad \log p - p' = \bar{1},8777743$$
$$\bar{4},7715148 \qquad \overline{\bar{4},7715148}$$
$$\overline{\bar{6},5216373 -}$$

2e terme — 0,0000033238 $\qquad$ 1er terme... 0,0005909009

$$P(\varrho) = 0,0005909009 - 0,0000033238 = 0,0005875771.$$

En calculant ainsi 146 observations faites par M. Arago et moi, à des températures très-basses, nous avons trouvé pour moyenne.......................... $P(\varrho) = 0{,}0005891712$.

252 autres observations faites par moi seul l'été suivant, à une température peu différente de 25°, m'ont donné de même.................. $P(\varrho) = 0{,}0005883641$.

Ces résultats diffèrent si peu l'un de l'autre, que la différence ne ferait pas 0″,08 sur la hauteur du pôle à Paris; le milieu entre elles donne.......... $P(\varrho) = 0{,}0005887676$.

Cet élément peut se déduire encore, quoique d'une manière moins directe, des observations astronomiques. Pour cela, on égale la réfraction totale opérée par l'atmosphère à son expression analytique, fondée sur la disposition des couches atmosphériques, et sur l'intensité de leur pouvoir réfringent, que l'on détermine de manière à y satisfaire. En combinant ainsi un grand nombre d'observations d'après les formules de réfraction de M. Laplace, M. Delambre a trouvé

$$P(\varrho) = 0{,}0005880940.$$

La différence de ce résultat au nôtre ne produirait pas 0″,1 sur la hauteur du pôle à Paris. On ne saurait répondre de quantités si petites; et il est remarquable de voir des méthodes si diverses conduire avec tant de précision au même but.

Si l'on veut prendre pour unité de densité celle de l'air atmosphérique à la température de la glace fondante, (ϱ) deviendra égal à 1, et le nombre 0,0005887676, donné par nos expériences, exprimera le pouvoir réfringent de cet air. Si l'on veut prendre une autre unité de densité, l'expression numérique du pouvoir réfringent P sera différente; mais elle changera dans la même proportion pour les autres substances; et, par conséquent, les rapports des pouvoirs réfringens, seule chose qu'il nous importe de connaître, n'en seront aucunement altérés.

Les formules dont nous venons de faire usage ne pourraient

plus être employées, si la densité ϱ' de l'air resté dans le prisme n'était pas extrêmement petite, parce que nous nous sommes autorisés de cette circonstance pour les approximations. On ne peut donc pas s'en servir pour calculer les observations faites à diverses densités de l'air, et destinées à vérifier la constance du pouvoir réfringent. Mais alors, comme P est connu par ce qui précède, on peut employer sans préparation l'équation rigoureuse entre P et ω; il faut seulement y faire $P' = P$, pour exprimer que le gaz intérieur est encore de l'air atmosphérique : elle donne alors

$$\omega = 1 - \frac{\sqrt{1 + P\varrho'}}{\sqrt{1 + P\varrho}},$$

ou $$\omega = \frac{P(\varrho - \varrho')}{\sqrt{1+P\varrho}\,.\,(\sqrt{1+P\varrho} + \sqrt{1+P\varrho'})}.$$

Ainsi, en se donnant les densités ϱ et ϱ' pour l'air extérieur et intérieur, on pourra calculer ω. Ensuite on en déduira les déviations vraies et apparentes R et Δ par les formules

$$R = 2\,\omega \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a - \omega^2 \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} a; \qquad \Delta = R + D.$$

Connaissant la déviation apparente Δ, on la comparera avec l'observation, et l'on verra si elle s'accorde avec elle. Par-là on saura si la constance supposée du pouvoir réfringent est exacte; car nous l'avons prise pour base de tous ces calculs. C'est ainsi que nous avons formé le tableau suivant :

Jours de l'observ.	Barom. extérieur.	Therm. du Baromètre extérieur.	Barom. intérieur.	Therm. du Baromètre intérieur.	Nombre d'observations d'où la déviation a été conclue.	Déviation observée, affectée du défaut de parallélisme Δ.	Déviation apparente, calculée d'après le rapport des densités Δ = R + D.	Excès de l'observation.
7 mars.	0m,7662	+ 4°5	0m,0050	+ 5°0	10	+ 5′ 43″ 5	+ 5′ 41″ 4	+ 2″ 1
7	0 ,7660	+ 5 0	0 ,0210	+ 6 0	10	+ 5 31 8	+ 5 32 3	— 0 5
7	0 ,7658	+ 5 0	0 ,1200	+ 6 0	10	+ 4 45 8	+ 4 45 8	0 0
9	0 ,7551	+ 4 8	0 ,2425	+ 4 8	20	+ 3 45 0	+ 3 44 3	+ 0 7
7	0 ,7654	+ 5 0	0 ,2830	+ 6 0	10	+ 3 29 2	+ 3 29 2	0 0
9	0 ,7548	+ 4 8	0 ,4055	+ 5 4	14	+ 2 29 2	+ 2 27 5	+ 1 7
7	0 ,7654	+ 5 0	0 ,5260	+ 6 0	10	+ 1 37 1	+ 1 35 7	+ 1 4
9	0 ,7543	+ 4 8	0 ,6130	+ 4 8	20	+ 0 48 6	+ 0 49 7	— 1 1
14 juin.	0 ,7630	+ 22 5	0 ,8007	+ 24 0	20	— 0 34 0	— 0 33 0	— 1 0

Les valeurs de Δ sont toutes calculées, en employant pour D la déviation — 16″,6, observée directement.

L'accord des observations avec le calcul, parmi des densités si diverses, montre bien que le pouvoir réfringent est indépendant des densités comme la théorie l'indique, et comme nous l'avons employé dans nos formules. Mais cette conclusion ne doit pas être étendue indéfiniment; car elle ne pourrait plus subsister, si, par des condensations très-fortes, on rapprochait assez les particules d'air pour changer leur mode d'action sur la lumière, et modifier leur affinité.

Maintenant que nous connaissons une fois pour toutes la valeur de P relativement à l'air atmosphérique qui environne le prisme, il nous est bien facile d'étendre nos calculs à tout autre gaz. Il ne faut que supposer qu'on ait introduit ce gaz dans le prisme à la température t', sous la pression p', et qu'on ait observé la déviation Δ. En effet, reprenons l'équation fondamentale

$$\frac{\sqrt{1+P'\rho'}}{\sqrt{1+P\rho}} = 1 - \omega,$$

et mettons-y pour ρ et ρ' leurs valeurs en fonction des pressions et des températures. Pour cela, il faudra représenter par (ρ') la densité du gaz intérieur, à la température de la glace fondante et sous la pression de $0^{m},76$, de même que nous avons désigné par (ρ) celle de l'air extérieur dans des circonstances analogues. Alors notre équation donnera

$$P' = \frac{0^{m},76(1+t'.0,00375)}{p'(\rho)'}\left[\frac{(1-\omega)^2 P p(\rho)}{0^{m},76(1+t.0,00375)} - 2\omega + \omega^2\right];$$

à quoi il faut toujours joindre la formule

$$\omega = \frac{R}{2\,\text{tang}\,\frac{1}{2}a} + \frac{R^2}{8},$$

qui sert à calculer ω d'après la déviation vraie R. Celle-ci devient négative, quand le gaz introduit dans l'intérieur du prisme réfracte plus fortement que l'air du dehors; alors ω devient aussi négatif, et doit être employé comme tel dans la formule qui donne P'.

Réciproquement, lorsque P' est connu pour un certain gaz, il est facile d'en déduire la déviation vraie R qu'il doit produire

dans le prisme avec une densité donnée, et dans un état donné de l'air extérieur; car, en retournant les formules précédentes, on en tire

$$\omega = 1 - \frac{\sqrt{1 + P'\rho'}}{\sqrt{1 + P\rho}}; \qquad R = 2\,\omega \text{ tang } \tfrac{1}{2} a - \omega^2 \text{ tang}^3 \tfrac{1}{2} a.$$

En comparant la déviation R ainsi calculée avec la déviation observée et corrigée du défaut de parallélisme des faces du prisme, on verra que le pouvoir réfringent P′ est réellement constant sous toutes les densités, comme le supposent nos formules. Nous avons également vérifié ce fait.

On peut encore, connaissant P′, calculer la vitesse V′ que le gaz imprime aux particules lumineuses qui le traversent lorsqu'il a une densité ρ'. En effet, d'après les expressions théoriques de V′ et de P′, obtenues page 266, on a

$$V' = \sqrt{v^2 + 2u^2}; \qquad \frac{2u^2}{v^2 \rho'} = P',$$

ce qui donne $$V' = v\sqrt{1 + P'\rho'}.$$

Jusqu'ici nous n'avons pas déterminé l'unité de densité à laquelle nous voulions rapporter tous nos résultats; aussi les formules auxquelles nous venons de parvenir contiennent encore les valeurs absolues des densités (ρ) $(\rho)'$ pour la température de la glace fondante et la pression de $0^m,76$. Mais nous avons vu que le choix de cette unité influe seulement sur les expressions absolues des pouvoirs réfringens P, P′, et nullement sur leurs rapports.

Prenons, par exemple, pour unité la densité de l'eau à la température de la glace fondante. D'après les calculs que nous avons faits page 389 du premier livre, on aura, relativement à l'air atmosphérique sec, $(\rho) = \frac{1}{769,44}$.

Ensuite, en nommant ϖ' la pesanteur spécifique de tout autre gaz, comparé à l'air atmosphérique, on aura pour ce gaz

$$(\rho)' = \frac{\varpi'}{769,44}.$$

Les pouvoirs réfringens P, P′, calculés d'après ces valeurs, seront comparables à ceux de la table donnée par Newton; car il y a pris la densité de l'eau pour unité, quoiqu'à la vérité il n'ait pas spécifié la température à laquelle il la rapportait.

Appliquons ceci au calcul de P que nous avons fait page 302, relativement à l'air atmosphérique. Nous avons trouvé alors

$P = \frac{1}{(\varrho)} . 0{,}0005887676$; nous aurons donc $P = 0{,}45302$.

Newton a multiplié tous ses résultats par 10000, afin d'éviter les décimales. Il faut donc faire la même chose, si nous voulons comparer nos résultats aux siens. L'expression numérique de P devient alors 4530 : elle ne diffère pas beaucoup de celle que Newton a donnée; néanmoins elle doit être regardée comme plus exacte, parce que Newton n'a pas calculé la sienne sur des observations directes, mais d'après la valeur de la réfraction astronomique, qui n'était pas connue de son temps avec une parfaite exactitude. En outre, il n'a pas indiqué la température de l'eau à laquelle ses densités étaient rapportées. Nous avons vu plus haut que les observations astronomiques perfectionnées sont en ce point exactement d'accord avec les expériences directes.

Quelle que soit l'espèce d'unité de densité que l'on veuille choisir, il est naturel de rapporter les pouvoirs réfringens des gaz à l'un d'entre eux pris pour unité, ce qui rendra leur comparaison plus facile. A cet effet, nommons N, N′, les valeurs numériques des produits $P(\varrho)$, $P'(\varrho)'$, qui sont, comme on vient de le voir, donnés en nombres par les observations, et dont nous supposerons que le premier appartient à l'air atmosphérique; nous aurons alors

$P(\varrho) = N$; $P'(\varrho)' = N'$; par conséquent $\frac{P'}{P} = \frac{N'(\varrho)}{N(\varrho)'}$.

$\frac{(\varrho)'}{(\varrho)}$ est la pesanteur spécifique du gaz observé, prise par rapport à l'air atmosphérique. Nous l'avons nommée ϖ'; en l'introduisant dans la formule, il vient

$$\frac{P'}{P} = \frac{N'}{N\varpi'}.$$

Alors le second membre exprime le rapport du pouvoir réfringent du gaz à celui de l'air atmosphérique. En le réduisant en nombre pour les gaz le plus fréquemment employés, nous avons obtenu le tableau suivant :

Pouvoirs réfringens des gaz pour la température 0 *et la pression* $0^{m},76$, *déduits de l'ensemble des Observations.*

Nature du gaz.	Densité du gaz, celle de l'air atmosphérique étant l'unité.	Valeur de $P'(\rho)'$.	Pouvoirs réfringens des gaz, celui de l'air étant 1.
Air atmosphériq. .	1,00000	0,000589171	1,00000
Oxigène	1,10359	0,000560204	0,86161
Azote	0,96913	0,000590436	1,03408
Hydrogène.	0,07321	0,000285315	6,61436
Ammoniaque	0,59669	0,000762349	2,16851
Acide carbonique.	1,51961	0,000899573	1,00476
Hydrog. carburé. .	0,57072	0,000703669	2,09270
Hydr. plus carburé que le précédent.	0,58825	0,000630300	1,81860
Gaz hydrochloriq.	1,24740	0,000879066	1,19625

Toutes les densités rapportées dans ce tableau sont celles qui résultent de nos propres expériences.

En jetant les yeux sur ce tableau, on voit que la force réfringente du gaz hydrogène surpasse beaucoup celle de tous les autres gaz, et même celle de toutes les autres substances observées jusqu'à présent. Ce principe existe en grande abondance dans les résines, les huiles et les gommes, où il est uni au charbon, à l'oxigène; c'est donc lui surtout qui donne à ces substances cette grande force réfringente que Newton avait si bien observée. Cette influence de l'hydrogène se retrouve éminemment dans l'ammoniaque qui est composé d'hydrogène et d'azote. Le pouvoir réfringent de ce gaz est double de celui de l'air, et surpasse celui de l'eau.

Mais allons plus loin : puisque chaque substance paraît porter

dans ses combinaisons le caractère qui lui est propre, et même y conserver jusqu'à un certain point le degré de force avec lequel elle agissait sur la lumière, essayons de calculer sous ce point de vue l'influence des principes constituans qui entrent dans un mélange ou dans une combinaison donnée.

Si nous tentions de découvrir ces rapports pour toute autre substance que la lumière, nous serions bientôt arrêtés par des obstacles invincibles qui naîtraient de la combinaison même, et du degré de condensation des principes constituans; car, bien que l'action chimique ne s'exerce qu'à de très-petites distances, ces distances sont cependant comparables entre elles; ainsi l'éloignement plus ou moins grand des particules ne peut manquer de faire varier son intensité. Ces variations, encore modifiées par la figure des particules, doivent compliquer extrêmement les rapports des composés avec leurs principes; et sans pouvoir en calculer les effets, on voit bien que c'est pour cela que les uns et les autres n'ont pas les mêmes propriétés. Mais d'après les idées les plus vraisemblables que nous puissions nous former de la lumière, cette influence de la condensation doit être beaucoup moindre dans les actions que les corps exercent sur elle; car la petitesse extrême de ses particules, comparativement aux distances qui séparent les molécules des corps, doit rendre moins sensibles sur elles de faibles changemens dans ces distances. Par conséquent les pouvoirs réfringens des corps doivent différer très-peu de ceux des principes qui les composent, à moins que ces principes n'aient éprouvé des condensations très-considérables.

Maintenant, pour déterminer quelle doit être l'influence de chaque principe, il faut se rappeler que le pouvoir réfringent d'un corps est une quantité proportionnelle à la somme des forces attractives qu'il exerce sur la lumière à diverses distances sous une densité égale à 1, cette somme étant faite depuis l'instant où la molécule lumineuse commence à être attirée sensiblement par le corps jusqu'à l'instant où elle arrive sur sa surface. Or, à chaque distance prise entre ces limites, l'attraction

totale éprouvée par la molécule lumineuse sera la somme de celles qu'exercent sur elle les divers principes qui composent le corps attirant ; et la partie de l'effet, due à chaque principe, sera proportionnelle au produit de son pouvoir réfringent propre P_1 P_2 par sa masse, c'est-à-dire par la quantité pondérale de ce principe qui entre dans la combinaison. Nommant donc ces quantités $x_1\, x_2 \ldots$ et appelant P le pouvoir réfringent total, on aura les deux conditions suivantes :

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 \ldots\ldots = P,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots = 1.$$

Ces équations serviront à déterminer deux des quantités qu'elles renferment, quand les autres seront connues. Par exemple, s'il n'y a que deux principes, et que l'on connaisse P_1 P_2 et P, c'est-à-dire les pouvoirs réfringens partiels et le pouvoir réfringent total, on en pourra déduire les proportions x_1 x_2 de chaque principe dans la masse totale ; car on aura alors

$$P_1 x_1 + P_2 (1 - x_1) = P ;$$

d'où l'on tire

$$x_1 = \frac{P - P_2}{P_1 - P_2}, \quad \text{et} \quad x_2 = 1 - x_1 = \frac{P_1 - P}{P_1 - P_2}.$$

Commençons par éprouver cette loi sur des cas simples, dans lesquels il n'y ait que peu ou point de condensation ; l'air atmosphérique nous en offrira un exemple. On sait que cet air, quand il est sec, contient 0,21 de gaz oxigène en volume ; le reste est un mélange d'azote, d'acide carbonique, et peut-être de quelques autres gaz dans des proportions imperceptibles. Pour plus de simplicité, nous n'aurons égard qu'à l'azote et à l'acide carbonique, et nous supposerons 0,784 du premier, et 0,006 du second, ces quantités étant toujours comptées en volume. J'adopte ces proportions, parce qu'elles s'accordent très-bien avec les analyses de l'air atmosphérique, et qu'elles satisfont aussi, comme on va le voir, aux valeurs des densités déterminées par nos expériences. Maintenant, pour obtenir les quantités pondérales de chaque principe, qui entrent dans le volume 1, il

faut multiplier chaque fraction de ce volume par la densité du gaz dont elle est formée; on aura ainsi

oxigène.........	0,210.1,10359	= 0,231754,
azote...........	0,784.0,96913	= 0,759798,
acide carbonique.	0,006.1,51901	= 0,009114.
		1,000666.

On voit que la somme est presque égale à l'unité; et en effet, cela doit être; car elle doit exprimer la pesanteur spécifique du mélange, c'est-à-dire celle de l'air atmosphérique, que nous avons prise en effet pour unité. L'erreur est de l'ordre de celles dont on ne peut répondre dans les observations. En la négligeant, les poids partiels que nous venons de calculer seront précisément les quantités x_1 x_2 x_3 : il ne restera donc qu'à multiplier chacune d'elles par le pouvoir réfringent qui correspond à sa nature, et l'on trouvera

oxigène....................	$P_1 x_1 = 0,199682$,
azote......................	$P_2 x_2 = 0,785693$,
acide carbonique...........	$P_3 x_3 = 0,009157$,
pouvoir réfringent du composé	$P = 0,994532$.

La somme de ces nombres exprime le pouvoir réfringent de l'air atmosphérique, déduit de ses principes constituans; elle devrait se trouver égale à l'unité pour être parfaitement exacte: l'erreur est donc égale à 0,005469, ou environ 5 millièmes de la valeur totale; elle ne produirait pas 0",3 sur la hauteur du pôle à Paris; et cette différence peut provenir des erreurs presqu'inévitables des expériences; car le résultat précédent dépendant de la pesanteur spécifique des gaz, de leur pureté et des réfractions qu'ils produisent, se trouve lié à un grand nombre d'opérations où les erreurs peuvent s'accumuler.

Des analyses précises et multipliées de l'air atmosphérique, faites dans les divers climats de la terre, et dans les circonstances les plus variées, ont prouvé que ses principes pondérables sont partout les mêmes, et qu'ils y existent toujours dans

les mêmes proportions. Il suit de là que le pouvoir réfringent de l'air atmosphérique est aussi le même par toute la terre, puisqu'il est déterminé par les pouvoirs réfringens partiels de ses principes constituans ; par conséquent, les tables de réfractions calculées pour une latitude peuvent être employées dans tous les climats, en ayant seulement égard aux variations de densité produits par les changemens de pression et de température.

Quant aux différences qui pourraient dépendre de l'humidité répandue dans l'atmosphère, nous prouverons plus tard qu'elles sont nulles, et qu'il est inutile d'y avoir égard.

Considérons maintenant des cas dans lesquels les principes constituans soient unis par une combinaison véritable ; et pour procéder graduellement, cherchons d'abord des affinités qui ne soient pas très-énergiques. Nous en trouverons un exemple très-convenable dans le gaz ammoniaque, composé d'hydrogène et d'azote auxquels leur combinaison n'empêche pas de conserver l'état gazeux.

Ici, puisqu'il n'y a que deux principes, nous pouvons en calculer les quantités pondérales, d'après les pouvoirs réfringens observés ; les données seront

$$P_1 = 6{,}61436, \qquad P_2 = 1{,}03408, \qquad P = 2{,}16851\,;$$

de là on tire

$$x_1 = \frac{P - P_2}{P_1 - P_2} = 0{,}203\,; \qquad x_2 = 0{,}797.$$

Des expériences très-exactes de M. Berthollet donnent 0,200 d'hydrogène et 0,800 d'azote. La différence est encore de l'ordre de celles dont on ne saurait répondre ; et l'exactitude est telle, que, si l'ammoniaque n'eût pas été analysé, mais qu'on eût seulement connu la nature de ses principes, cette méthode eût indiqué exactement sa composition.

Pour passer enfin à des combinaisons beaucoup plus intimes, calculons de la même manière le pouvoir réfringent de l'eau, d'après ses principes constituans, qui sont l'hydrogène et l'oxigène. Selon des expériences très-précises faites par MM. Gay-Lussac et Humboldt, l'eau est formée de deux parties d'hy-

drogène en volume, contre une d'oxigène ; ce qui, étant réduit en fraction du volume total, donne

hydrogène 0,66666.... poids $\frac{2}{3}$.0,07321 = 0,048806,
oxigène 0,33333.... poids $\frac{1}{3}$.1,10359 = 0,367863,

pesanteur spécifique du mélange.... 0,416669.

Ces poids partiels sont ceux des quantités absolues des deux gaz qui forment le volume 1. Pour avoir les proportions qui forment le poids 1, il faut diviser chacune d'elles par le poids total. On trouve ainsi

$$\text{hydrogène } x_1 = \frac{0{,}048806}{0{,}416669} = 0{,}117134,$$

$$\text{oxigène.. } x_2 = \frac{0{,}367863}{0{,}416669} = 0{,}882860.$$

Ce sont les proportions des élémens de l'eau en poids. Reste enfin à multiplier chacun d'eux par le pouvoir réfringent qui lui correspond, et il viendra

hydrogène $P_1 = 6{,}61436$, $P_1 x_2 = 0{,}77476$,
oxigène... $P_2 = 0{,}86161$, $P_2 x_1 = 0{,}76069$.

pouvoir réfringent de la combinaison, celui de l'air étant 1 ..... 1,53545.

Pour comparer ce résultat aux expériences de Newton, il faut en faire disparaître l'espèce particulière d'unité dont nous avons fait usage, en le multipliant par le pouvoir réfringent absolu de l'air atmosphérique, qui est 0,45302, lorsqu'on prend la densité de l'eau pour unité. Cette opération donne 0,69567, ou simplement 6957, en multipliant par 10000, comme le fait Newton. Tel serait donc le pouvoir réfringent de l'eau, conclu de ses principes constituans. Newton, par des expériences directes, trouve 7845 ; et je me suis assuré que ce résultat est exact. Il est plus fort que le premier d'environ $\frac{1}{9}$ de sa valeur totale ; ainsi le gaz oxigène et le gaz hydrogène, combinés et condensés en eau, exercent sur la lumière une action plus énergique qu'ils ne faisaient à l'état de simple mélange. La même épreuve, tentée sur d'autres substances so-

lides, donne des résultats semblables, c'est-à-dire que le passage de l'état gazeux à l'état solide produit toujours une augmentation sensible d'affinité. Mais cela est surtout frappant dans le diamant, qui, d'après l'expérience, a un pouvoir réfringent considérable, quoique la chimie la plus précise le trouve entièrement composé de charbon, substance qui, à l'état de gaz, n'exerce sur la lumière qu'une action assez faible, du moins à en juger par celle de l'acide carbonique, dont elle est un des principes constituans.

Néanmoins, d'après ces épreuves mêmes, le pouvoir réfringent, conclu de la composition chimique, ne sera que fort peu ou point du tout en erreur, quand l'état des corps n'éprouvera que de faibles changemens. Je me suis assuré, en effet, que l'on peut l'employer avec sûreté dans le mélange des liquides, même de ceux qui exercent déjà une action sensible les uns sur les autres, comme l'eau et l'alcool. Nous avons vu que les mélanges des gaz nous ont aussi offert le même accord.

D'après cela, il est probable que le pouvoir réfringent de l'eau en vapeur différera très-peu de celui de l'eau liquide; de sorte qu'en partant de l'expérience de Newton, et la ramenant à nos unités ordinaires, il sera $\frac{0,78450}{0,45302}$, ou 1,73171, celui de l'air étant 1. Donc, en général, si l'on désigne ce dernier par P, on aura, relativement à la vapeur,

$$P_1 = 1,73171\, P.$$

Ce résultat va nous servir pour comparer les intensités des réfractions produites par l'air sec et par l'air humide. Pour cela, nommons V, V' les vitesses que la lumière acquiert dans l'air sec et dans la vapeur, lorsque leurs densités sont ρ ρ'; la définition même du pouvoir réfringent nous donne

$$V = v\sqrt{1 + P\rho}; \qquad V' = v\sqrt{1 + P'\rho'},$$

v étant la vitesse de la lumière dans le vide. Or, quand la vapeur est mêlée à l'air dans l'atmosphère, et y soutient une certaine partie T de la pression barométrique, sa densité est les $\frac{10}{16}$ de celle du volume d'air sec qu'elle remplace, et qui soutien-

drait la même pression T ; de sorte qu'en la comparant à ce volume d'air, on a $\varrho' = \frac{10}{16}.\varrho$: de là, on tire

$$P'\varrho' = \tfrac{10}{16}.1{,}73171\ P\varrho = 1{,}0823\ P\varrho.$$

On voit donc que $P'\varrho'$ se trouve alors presque exactement égal à $P\varrho$: ainsi la lumière, en traversant la vapeur aqueuse, y acquiert presque exactement la même vitesse qu'elle aurait prise dans le volume d'air dont cette vapeur tient la place ; par conséquent, elle y subira aussi, à fort peu près, les mêmes réfractions.

Pour évaluer les effets de cette différence, calculons le pouvoir réfringent d'un mélange d'air sec et de vapeur aqueuse soumis à la pression p, à la température t, et dans lequel T désignerait la tension de la vapeur. Il faudra d'abord déterminer les densités des deux principes constituans qui forment ce mélange. Soit ϱ celle de l'air atmosphérique sec sous la pression et la température indiquées. La portion de cet air qui entre dans le mélange, ne soutenant que la pression $p-\mathrm{T}$, aura pour densité $\varrho\,\dfrac{(p-\mathrm{T})}{p}$, proportionnellement à sa force élastique : de même, la portion de vapeur aqueuse qui soutient T aura pour densité $\dfrac{10\,\varrho\,\mathrm{T}}{16p}$; de sorte que la densité totale du mélange, que nous nommerons ϱ_2, sera

$$\varrho_2 = \frac{\varrho\,(p-\mathrm{T})}{p} + \frac{10\,\varrho\,\mathrm{T}}{16p},$$

ou en réduisant, $\varrho_2 = \dfrac{\varrho\,(p-\frac{3}{8}\mathrm{T})}{p}$.

Divisons les densités partielles par la densité totale ϱ_2, nous aurons les quantités pondérales de chacun de ces deux principes : ce sera

pour l'air sec, $x = \dfrac{p-\mathrm{T}}{p-\frac{3}{8}\mathrm{T}}$;

pour la vapeur, $x_1 = \dfrac{10\,\mathrm{T}}{16\,(p-\frac{3}{8}\mathrm{T})}$.

Maintenant, soient P P_1 P_2 les pouvoirs réfringens de l'air sec, de la vapeur et du mélange ; on aura

$$P_2 = P x + P_1 x_1.$$

Substituant pour P_1 sa valeur $1{,}73171\ P$, et mettant pour $x x_1$ les expressions que nous venons d'obtenir, on trouve, toutes réductions faites,

$$P_2 = \frac{P(p-T)}{p-\frac{3}{8}T} + \frac{1{,}082\ P\,T}{p-\frac{3}{8}T}, \quad \text{ou} \quad P_2 = \frac{P(p+0{,}082\ T)}{p-\frac{3}{8}T}.$$

Or, si l'on nomme V_2 la vitesse que le mélange imprime à la lumière qui le traverse, sa densité étant ρ_2, on aura généralement

$$V_2 = v\sqrt{1 + P_2\,\rho_2};$$

mettant pour P_2 et ρ_2 leurs valeurs, il vient

$$V_2 = v\sqrt{1 + P\rho\left(1 + 0{,}082\,\frac{T}{p}\right)}.$$

On voit donc que cette vitesse sera presque exactement la même que pour l'air sec ; et la différence deviendra tout-à-fait insensible, si le mélange que l'on considère est celui qui constitue l'atmosphère, parce qu'alors la tension T est toujours extrêmement petite, comparativement à la pression totale p. Ainsi les vapeurs aqueuses qui sont répandues dans l'atmosphère en quantités inconnues et variables, mais toujours fort petites, même dans les cas de saturation extrême, ne peuvent jamais troubler les réfractions que la lumière y éprouve; résultat fort important pour l'astronomie.

Ce rapprochement a été fait pour la première fois par M. Laplace; mais comme on ne connaissait alors pour la densité de la vapeur que le rapport de $\frac{10}{14}$ donné par Watt et Saussure, il semblait que la compensation des réfractions n'était pas parfaite, et M. Laplace calcula une table des corrections qui devaient en résulter, en invitant les astronomes à décider ce point important. J'y suis parvenu par la même méthode qui nous avait servi pour les gaz; j'ai fait dans le prisme le vide sec, et j'ai au contraire humecté l'air extérieur en répandant de l'eau dans la chambre où j'observais, en y tendant des draps

mouillés, et en y faisant du feu pour élever la température; les fenêtres étaient entièrement fermées, à l'exception d'une ouverture faite dans une vitre, et par laquelle je pouvais découvrir la mire. Les choses étant ainsi disposées, j'observais la déviation, et je la déduisais ensuite du calcul, d'après le pouvoir réfringent de l'air déduit des précédentes expériences, en regardant l'air extérieur au prisme comme de l'air sec; et quoique j'aie beaucoup multiplié les observations, quoique j'y aie mis toute l'exactitude imaginable, j'ai toujours trouvé que la déviation déduite du calcul s'accordait très-bien avec les observations; ce qui prouve évidemment que la vapeur d'eau mêlée à l'air agit sur la lumière, à très-peu de chose près, comme ferait de l'air ordinaire qui aurait un degré de tension égal; résultat conforme à l'induction tirée des pouvoirs réfringens. Si l'on supposait l'égalité des réfractions parfaite, la densité de la vapeur pourrait se conclure de cette condition, et elle serait $\frac{10}{17,505}$ de celle de l'air à force élastique égale; résultat bien peu différent de ce que M. Gay-Lussac a trouvé.

Je me suis assuré, de la même manière, que le changement de température n'apportait pas de changemens appréciables dans le pouvoir réfringent des gaz et de l'air. Car les déviations observées dans l'été, et dans une chambre où je faisais varier artificiellement l'humidité et la température, se sont parfaitement accordées avec ce que le calcul indiquait d'après les pouvoirs réfringens conclus des observations d'hiver.

Jusqu'ici nous avons considéré le mouvement de la lumière dans des milieux homogènes; mais on peut aussi concevoir des milieux composés de couches diverses et de composition variable, et l'on peut se proposer de découvrir ce qui arrive à un rayon de lumière qui les traverse. Ce problème se résout par les mêmes considérations que nous avons exposées en calculant la marche des molécules lumineuses, lorsqu'elles approchent de la surface des corps, ou lorsqu'elles pénètrent leur substance jusqu'à une petite profondeur. On divise le milieu que la lumière traverse en un assez grand nombre de couches, pour que la densité ou la composition de chacune d'elles puisse être supposée constante.

Alors, dans chacune de ces couches, la trajectoire des molécules lumineuses peut être considérée comme une parabole dont on détermine la direction d'après l'intensité actuelle de la force réfringente; et en continuant ce calcul de couche en couche, on connaît successivement la marche que chaque molécule lumineuse peut décrire, suivant la direction dans laquelle elle est lancée.

Concevons un pareil milieu A B C D, fig. 84, composé de couches horizontales, dont le pouvoir réfringent soit d'abord constant jusqu'à une certaine hauteur, puis de là aille en décroissant peu à peu par des nuances insensibles, jusqu'à ce qu'enfin il redevienne constant de nouveau, mais moindre que précédemment. On aura l'exemple d'un pareil milieu, si l'on met d'abord au fond d'un vase de l'acide sulfurique concentré, sur lequel on verse ensuite peu à peu de l'eau pure, en la faisant couler lentement le long d'une petite lame de plomb inclinée, afin de ralentir la rapidité de sa chute. Cette eau, se répandant ainsi sur la surface de l'acide sulfurique, et ayant pour lui beaucoup d'affinité, tend à se combiner avec lui; et la combinaison s'opère en effet dans les couches les plus basses de l'eau, qui reposent immédiatement sur l'acide. Mais, à cause de leur figure plane, l'attraction qu'elles exercent sur elles-mêmes, ainsi que les différences de leur pesanteur spécifique, les préservent de se diviser, et les couches qui sont en contact étant toujours les mêmes, la combinaison ne peut se propager de l'une à l'autre qu'avec beaucoup de lenteur. Aussi, malgré la grande affinité de l'eau et de l'acide sulfurique, si l'on n'opère pas dans un vase très-large, on trouve souvent qu'après une journée toute entière, les couches supérieures de l'eau ne sont pas encore mélangées d'acide. Voilà donc un milieu composé de couches parallèles, hétérogènes, de pouvoir réfringens divers, et décroissant avec la hauteur. Car le pouvoir réfringent de l'acide sulfurique concentré excède celui de l'eau pure, et il porte cette propriété dans les couches où il entre en combinaison. Supposons maintenant que l'expérience se fasse dans un vase rectangulaire de verre mince, afin

que ses parois verticales offrent des surfaces diaphanes parallèles qui ne changent point la régularité ou la marche des rayons lumineux. Puis concevons un point rayonnant situé en A sur une des parois du vase, à une hauteur telle que les couches d'acide qui y répondent ne soient pas encore sensiblement mêlées d'eau ; alors ce point pourra envoyer à travers l'acide un rayon horizontal qui traversera directement l'épaisseur du vase, et qui pourra être reçu par un œil situé de l'autre côté en O. Mais il pourra arriver aussi en O un autre rayon qui, partant du même point que le premier, se dirigera d'abord vers les couches supérieures du milieu dans lesquelles l'eau est mêlée à l'acide sulfurique. Car, rencontrant dans ces couches une puissance réfringente successivement décroissante, l'attraction des couches inférieures l'attirera sans cesse et le pliera vers elles ; et si l'inclinaison est convenablement choisie, cette attraction pourra aller jusqu'à le courber entièrement, et l'obliger de se réfléchir vers le bas, de manière à traverser de nouveau les mêmes couches en sens contraire, et à redescendre vers le point O où s'était dirigé le premier rayon. Cet effet ressemble absolument à ce qui se passe au contact de deux milieux de force réfringente diverse, si ce n'est que, dans ce dernier cas, la réflexion intérieure s'opère dans un très-petit espace, et est rapidement déterminée par la diminution que les forces attractives éprouvent à partir de la surface commune, tandis que, dans le mélange d'eau et d'acide, le décroissement des forces attractives est rendu très-lent par les proportions graduelles de la combinaison. Mais il en résulte également que l'on pourra du point O, sous de certaines limites d'inclinaison, apercevoir deux images du point rayonnant, l'une inférieure par une trajectoire directe, l'autre supérieure par une trajectoire curviligne. Pour réaliser ces conséquences, collez à l'une des parois du vase, un peu au-dessous des couches qui se mêlent, une petite bande de papier horizontale, sur laquelle vous aurez tracé des lettres. Alors, en plaçant votre œil de l'autre côté du vase à une hauteur à peu près égale, et cherchant à lire ces lettres, vous en verrez deux images distinctes : l'une inférieure, qui sera droite ; l'autre supérieure, qui

sera renversée. Cette manière ingénieuse de faire l'expérience a été imaginée par M. Wollaston.

On apercevra un phénomène pareil, si pendant l'été on place son œil à l'extrémité d'une barre de fer ou de bois horizontale et noircie, qui soit exposée au soleil, et dans le prolongement de laquelle se trouvent de petits objets distincts qui en soient éloignés de cent ou de deux cents pas. Car les rayons du soleil échauffant considérablement cette surface noircie, elle communique sa température aux couches d'air qui la touchent immédiatement, elle les dilate, et leur donne une force élastique suffisante pour soutenir le poids des couches supérieures avec une densité moindre. Or, nous avons vu que la force réfringente de l'air dépend uniquement de sa densité; par conséquent les couches qui reposent immédiatement sur la barre réfracteront la lumière avec moins d'énergie que celles qui se trouvent au-dessus d'elles, et celles-ci, à leur tour, réfracteront moins que celles qui les suivent, jusqu'à ce que, par une dégradation progressive, mais rapide, on s'élève à des couches assez éloignées de la barre pour ne ressentir plus l'influence de sa température, et alors leur force réfringente sera sensiblement constante. D'après cela, on conçoit que si, dans un pareil milieu, on regarde horizontalement des objets éloignés situés dans la direction de la barre et à une petite hauteur au-dessus d'elle, on en pourra voir deux images, l'une supérieure et droite à travers la couche de densité constante, l'autre à travers les couches de densité variable, qui sera inférieure et renversée. C'est encore à M. Wollaston que l'on doit cette observation curieuse, ainsi qu'un grand nombre d'autres relatives au même sujet.

Le même effet se produit quelquefois plus en grand dans les couches d'air contiguës à un sol aride et sablonneux que l'ardeur du soleil échauffe fortement. Alors la densité de l'air va en croissant depuis la surface du sol jusqu'à une certaine distance, ordinairement fort petite, après quoi elle devient sensiblement constante, et enfin elle décroît avec une très-grande lenteur, conformément à la constitution habituelle de l'atmosphère. Si

l'on conçoit un observateur placé dans la couche de densité moyenne, et regardant un objet éloigné, situé aussi dans cette couche, il le verra de deux manières; directement à travers la couche d'air de densité uniforme qui les sépare, et indirectement par des rayons réfléchis dans la couche inférieure. Ces rayons, d'abord dirigés de l'objet vers la surface terrestre sous une certaine inclinaison, entrent dans les couches de moindre densité, s'y réfractent en prenant une direction plus approchante de l'horizontale, puis se relèvent, et, rentrant dans les couches supérieures dont la densité les attire, reviennent passer par l'œil de l'observateur. Il y aura alors deux images de l'objet, l'une droite par vision directe, l'autre renversée par la réflexion. Si l'objet se détache sur le fond du ciel, l'image renversée du ciel entourera aussi son image réfléchie, absolument comme lorsque les objets se peignent par réflexion sur la surface des eaux.

Telle est la cause d'un phénomène très-curieux qui est connu des marins sous le nom de *mirage*, et que l'armée française a eu plusieurs fois l'occasion d'observer dans l'expédition d'Egypte. Le terrain de la Basse-Egypte est une vaste plaine parfaitement horizontale; son uniformité n'est interrompue que par quelques éminences sur lesquelles sont situés les villages qui, par ce moyen, se trouvent à l'abri de l'inondation du Nil. Le soir et le matin, l'aspect du pays est tel que le comportent la disposition réelle des objets et leur éloignement; mais lorsque la surface du sol s'est échauffée par la présence du soleil, le terrain semble terminé à une certaine distance par une inondation générale; les villages qui se trouvent au-delà paraissent comme des îles situées au milieu d'un grand lac. Sous chaque village, on voit son image renversée, comme elle paraîtrait effectivement dans l'eau. A mesure que l'on approche, les limites de cette inondation apparente s'éloignent, le lac imaginaire qui semblait entourer le village se retire; enfin il disparaît entièrement, et l'illusion se reproduit pour un autre village plus éloigné. Ainsi, comme le remarque M. Monge, de qui j'emprunte cette description, tout concourt à compléter une illusion qui est quelquefois cruelle, surtout dans le désert, parce qu'elle

présente vainement l'image de l'eau dans le temps même où l'on en aurait le plus grand besoin.

On observe à peu près la même chose à la mer, dans des temps très-calmes. Un navire vu dans le lointain et à l'horizon offre quelquefois deux images, l'une directe, l'autre renversée : celle-ci absolument pareille à l'autre, souvent égale en intensité, en un mot, parfaitement semblable à l'effet de la réflexion dans un miroir. De là est venu le nom de *mirage* que les marins ont donné à ce phénomène. Comme il est produit par la différence des températures de l'eau et de l'air, il se montre ordinairement dans les changemens subits de température, la densité de la mer ne permettant pas à sa surface de partager ces variations aussi vite que l'atmosphère. Mais d'un autre côté, la température des eaux, et l'évaporation qui se fait continuellement à leur surface, s'opposent à ce qu'elles prennent une température aussi élevée que la surface sablonneuse d'un terrain aride. Par ces raisons, le phénomène des doubles images se montre plus rarement à la mer, et y dure peu; au lieu qu'il est journalier en Egypte et sur quelques plaines sablonneuses, où les mêmes circonstances se reproduisent presque tous les jours aux mêmes hauteurs du soleil.

Nous avons observé, M. Mathieu et moi, un grand nombre de phénomènes de ce genre à Dunkerque sur le bord de la mer, et j'en ai donné la théorie mathématique dans les mémoires de l'Institut pour 1809. J'ai prouvé que les trajectoires consécutives, qui partent de l'œil de l'observateur, se coupent sur leurs secondes branches de manière à former une caustique au-dessous de laquelle aucun point ne peut être aperçu. Dans la fig. 85, la courbe L T représente cette caustique, et D M S est la trajectoire limite menée de l'œil de l'observateur, tangentiellement au sol. Je la nomme trajectoire limite, parce qu'elle limite la hauteur où se fait le renversement. Dans la figure citée, tous les points situés au-dessus de cette trajectoire ne peuvent envoyer à l'observateur qu'une seule image; ceux qui sont dans l'espace S L T lui en envoient deux, l'une supérieure qui est droite, l'autre inférieure qui est renversée. Enfin les

points situés au-dessous de la caustique, dans l'espace MLT, ne pouvant en envoyer aucune, sont invisibles; de sorte qu'un objet mobile, un homme, par exemple, qui s'éloigne successivement à diverses distances, présente les apparences successives rapportées fig. 86.

La théorie et l'expérience prouvent également que, pour que ces apparences se produisent, il n'est pas besoin d'une différence considérable de température; un ou deux degrés du thermomètre centésimal suffisent, quand l'observation est faite sur un sol uni et étendu qui permette aux rayons lumineux de se prolonger sans obstacle et de manifester ainsi la courbure de la trajectoire qu'ils décrivent. Telle était la station que nous avions trouvée à Dunkerque, sur une plage sablonneuse située dans les dunes près du fort du Risban; et les observations y étaient encore favorisées par l'existence d'un grand nombre d'objets très-éloignés, tels que des clochers, des arbres, des cabanes, qui, s'élevant comme autant de signaux au-dessus de cette plage aride, manifestaient la marche des rayons par les apparences qu'ils présentaient. Aussi le phénomène du doublement et du renversement des images était-il alors sensible presque tous les jours et par des différences de température qui n'excédaient pas deux degrés du thermomètre centésimal.

Il arrive aussi quelquefois que des objets éloignés paraissent simplement suspendus dans l'air; alors leur image est simple, droite, et n'est, au moins en apparence, accompagnée d'aucune image renversée. On a donné à ce phénomène le nom de *suspension*. J'ai fait voir, dans le mémoire cité, que, dans cette circonstance même, la seconde image renversée existe, mais elle est infiniment amincie; alors on n'aperçoit que l'image directe qui se détache sur l'image renversée du ciel.

Lorsque la vision se fait ainsi par des trajectoires convexes vers la terre ou vers la mer, la réfraction est négative; l'horizon apparent est beaucoup plus abaissé qu'il ne devrait l'être relativement à la hauteur où l'on observe. Les marins doivent donc se défier de ce phénomène, qui tendrait à leur donner des erreurs considérables dans leur latitude; car je trouve par

expérience que ces erreurs peuvent souvent aller à 4 et 5 minutes. L'horizon apparent sera ainsi abaissé, quand la mer sera plus chaude que l'air. Au contraire, si elle est plus froide, le décroissement des densités suit une loi beaucoup plus rapide qu'à l'ordinaire, et l'horizon apparent s'élève à une hauteur très-considérable. On éviterait ces erreurs en n'observant pas les hauteurs des astres au-dessus de l'horizon de la mer, mais au-dessus d'un horizon artificiel placé hors des couches inférieures où se fait toujours la variation extraordinaire de la densité. Mais ce moyen n'est pas toujours facile, et à bord des vaisseaux il est tout-à-fait impraticable, à cause du mouvement de la mer. Dans ce cas, on corrigera l'erreur en prenant, s'il est possible, la distance des deux horizons opposés de la mer; l'excès de cette somme sur deux angles droits donnera le double de la dépression apparente de l'horizon qu'il faudra employer dans le calcul. Ainsi on connaîtra cette dépression en prenant la moitié du résultat. Malheureusement cette observation des deux horizons, qui a été indiquée par M. Wollaston, paraît très-difficile à faire avec exactitude; mais s'il n'est pas en notre pouvoir de rectifier l'erreur qui se produit dans ces circonstances, il est du moins utile d'être prévenu de son existence et du sens dans lequel elle peut agir, afin de pouvoir s'en défier; c'est pourquoi j'ai cru devoir dire deux mots des résultats précédens.

CHAPITRE IV.

De la double Réfraction.

Nous avons déjà annoncé que les rayons lumineux, en traversant la plupart des corps cristallisés, s'y divisent généralement en deux faisceaux, dont l'un, que l'on nomme *faisceau ordinaire*, suit les lois ordinaires de réfraction que nous avons exposées, tandis que l'autre, que l'on nomme *faisceau extraordinaire*, obéit à des lois très-différentes.

Ce phénomène se produit dans tous les cristaux transparens dont la forme primitive n'est ni un cube, ni un octaèdre régulier. La division du rayon est plus ou moins forte, selon la nature du cristal et le sens dans lequel on le taille; mais de toutes les substances connues, celle qui produit ce phénomène de la manière la plus énergique, est la chaux carbonatée rhomboïdale, vulgairement appelée *spath d'Islande*. Comme d'ailleurs elle se rencontre fréquemment dans le commerce et dans les collections des naturalistes, nous l'emploierons la première pour reconnaître et déterminer la marche des rayons.

Les cristaux de cette substance ont, comme leur nom l'indique, la forme d'un rhomboïde, représenté fig. 87. Ce rhomboïde a six angles solides aigus, et deux obtus : ces derniers sont formés de trois angles plans égaux, et également inclinés : dans les angles dièdres aigus, l'inclinaison des faces est de 74° 55′, et elle est, par conséquent, de 105° 5′ dans les autres. Malus a mesuré les inclinaisons par la réflexion de la lumière, selon la méthode expliquée page 160. M. Wollaston était aussi parvenu, de son côté, au même résultat.

Si l'on pose un pareil rhomboïde sur les caractères d'un livre imprimé, ou sur un papier où l'on ait tracé des lignes et des points, et que l'on regarde ensuite à travers son épaisseur, tout paraît doublé; en sorte que chaque point rayonnant placé sous le cristal envoie deux images à l'œil, et par conséquent

lui fait parvenir deux rayons. Réciproquement, un rayon simple qui partirait de l'œil, et traverserait le rhomboïde, se diviserait en deux faisceaux. Quoique cette réciprocité semble évidente, il est nécessaire de la constater : pour cela, il suffit de faire passer à travers le rhomboïde un trait de lumière solaire, dirigé par un héliostat; car on obtient ainsi deux rayons émergens distincts. Mais, faute de ces instrumens, voici un autre moyen de s'en assurer. Sur le papier où vous posez le rhomboïde, tracez avec de l'encre bien noire un triangle rectangle ABC, fig. 88, dont le petit côté BC soit, par exemple, un dixième de AC. En regardant ce triangle à travers le rhomboïde, vous le verrez double, de quelque manière que vous placiez l'œil; et pour chaque position, il se trouvera un point F, dans lequel la ligne A′C′, image extraordinaire de AC, coupera la ligne AB, que je suppose appartenir à l'image ordinaire. Prenez donc, sur le triangle même, AF′ = A′F, le point F′ sera celui dont l'image extraordinaire coïncide avec l'image ordinaire du point F. Le rayon ordinaire parti de F et le rayon extraordinaire parti de F′ se confondent donc après leur sortie, et ne donnent qu'un seul rayon émergent dirigé vers l'œil : ainsi réciproquement, un rayon qui partirait, suivant cette direction, du lieu où est l'œil, et qui se dirigerait vers le cristal, s'y réfracterait en deux faisceaux, dont l'un irait aboutir au point F, et l'autre au point F′ du triangle tracé sous la base du rhomboïde; car c'est une propriété générale de toutes les actions des corps sur la lumière, que, si à un point quelconque de sa route, on fait rebrousser un rayon sur lui-même sans changer aucune de ses modifications physiques, il éprouvera de nouveau, en sens contraire, les mêmes forces qui ont agi sur lui, et il retournera exactement par le même chemin.

Le procédé que nous venons d'indiquer, et qui a été imaginé par Malus, ne sert pas seulement à prouver le fait de la division des rayons, il sert encore à en mesurer l'étendue; car si les lignes AB, AC sont divisées chacune, je suppose, en mille parties égales, avec les nombres de divisions marqués de dix en dix, l'inspection de ces nombres indiquera toujours quels sont

les points de A B et de A C dont les images ordinaires et extraordinaires coïncident ; par conséquent, si la position de ces lignes et du triangle est connue, relativement aux arêtes de la base du rhomboïde, on saura toujours, dans chaque cas, à quel endroit de cette base répond le point F, à quel autre répond le point F′. Ainsi, pour construire les rayons réfractés, il ne restera plus qu'à marquer la position de leur point commun d'émergence. On y parviendrait en marquant sur la surface supérieure du cristal, fig. 89, l'endroit où se croisent les images des côtés AB, AC du triangle qui sert de mire ; mais comme il faut aussi connaître la direction du rayon émergent qui en résulte, il vaut mieux faire cette observation avec un cercle gradué, dont on maintient le limbe vertical, et dirigé dans le plan d'émergence IOV. On dirige la lunette de ce cercle sur le point d'émergence I où le croisement s'opère ; et si l'on a pris le soin de rendre la base du rhomboïde horizontale au moyen d'un niveau, la même observation détermine à la fois l'angle d'émergence IOV ou NIO, compté de la normale, et la position du point d'émergence I sur le rhomboïde. On connaît aussi *à priori* les positions des deux points FF′, dont les images coïncident ; on pourra donc construire les directions des rayons réfractés ordinaire, extraordinaire, FI, F′I, correspondans à la direction observée du rayon émergent ; sur quoi il faut remarquer que, dans beaucoup de cas, le rayon F′I, qui subit la réfraction extraordinaire, ne se trouve pas compris dans le plan d'émergence ION. Tel est le moyen qu'a employé Malus. En l'admettant, nous pouvons admettre toutes ses observations, et les regarder comme des données auxquelles il faut satisfaire.

Parmi toutes les positions que l'on peut donner au rhomboïde sur son plan, il en est une qui mérite surtout d'être remarquée, parce que la réfraction extraordinaire s'exerce alors, comme la réfraction ordinaire, dans le plan d'émergence même. Pour la découvrir, il faut, par l'un des côtés du triangle ABC, tel que B C, par exemple, concevoir un plan perpendiculaire aux surfaces supérieure et inférieure du rhomboïde, puis placer l'œil dans ce plan, et tourner peu à peu le cristal sur sa base, jusqu'à ce que les deux images de la ligne droite B C se superposent ;

alors, comme on sait que l'image ordinaire reste toujours dans le plan d'émergence, il faut nécessairement que l'image extraordinaire s'y trouve aussi. Cela arrive lorsque la droite, qui sert de mire, divise en deux parties égales un des angles plans obtus du rhomboïde, ou est parallèle à la direction qui jouit de cette propriété. Alors l'écart des deux images, perpendiculairement au plan d'incidence, devient nul; et par conséquent, quelles que soient les forces qui produisent la réfraction extraordinaire, il est sûr que leur résultante est comprise toute entière dans ce plan. Aussi lui a-t-on donné un nom particulier; on l'appelle la *section principale du rhomboïde*. Si l'on suppose que le cristal sur lequel on fait ces expériences a précisément la forme primitive qui convient à la chaux carbonatée, les bases du rhomboïde seront des rhombes parfaits; et alors la section principale contiendra les deux diagonales menées sur chaque base par les sommets des angles obtus. Le plan de cette section coupera donc le rhomboïde suivant un parallélogramme AB, A'B', fig. 90, dans lequel les côtés AB, A'B' sont les diagonales elles-mêmes, et AB', A'B les arêtes qui les joignent dans le rhomboïde. La ligne AA' menée par les deux angles solides obtus A, A', s'appelle l'*axe du cristal;* elle est également inclinée sur toutes les faces, et forme avec elles un angle de 45° 23' 25''. C'est à elle que se rapportent tous les phénomènes de la réfraction extraordinaire.

Examinons d'abord comment s'opère cette réfraction dans le plan de la section principale. On en voit tous les phénomènes généraux dans la fig. 91, où LI représente le rayon incident, IO le rayon réfracté ordinaire, et IE le rayon réfracté extraordinaire. IN est la direction de la normale au point d'incidence. Lorsque l'incidence est perpendiculaire, le rayon ordinaire se confond avec la normale, et traverse le cristal sans se réfracter : mais le rayon extraordinaire se brise au point d'incidence, et est rejeté vers le petit angle solide B'. Cet effet est général sous toutes les autres incidences, et il détermine toujours la position du rayon extraordinaire par rapport à l'autre.

La conséquence que nous en devons déduire, c'est qu'il existe dans le cristal une force particulière qui enlève au rayon

ordinaire une partie de ses molécules, et les repousse vers B'. Mais quelle est cette force? Nous verrons bientôt qu'elle émane de l'axe même du cristal, c'est-à-dire que, si par chaque point d'incidence on mène une ligne IA' parallèle à cet axe, et représentant sa position dans les premières couches où le rayon se divise, tous les phénomènes se passent comme s'il émanait de cette ligne une force *répulsive* qui agirait seulement sur un certain nombre de particules lumineuses, et tendrait à les écarter de sa direction. Cette force rejette toujours les rayons vers B', parce qu'ils se trouvent toujours de ce côté de l'axe sous quelque incidence qu'il soient entrés.

Suivons cette idée qui ne répugne point au peu d'observations que nous avons faites; et pour la vérifier par une épreuve directe, coupons le cristal par deux plans perpendiculaires à son axe, fig. 92, de manière à former ainsi deux nouvelles faces *abc*, *a'b'c'*. Maintenant, si nous dirigeons un rayon perpendiculairement à ces faces, il pénétrera leurs couches parallèlement à l'axe du cristal primitif. Ainsi, en supposant que la force répulsive émane de cet axe, elle se trouvera nulle, et le rayon ne devra pas se diviser. C'est, en effet, ce qui a lieu, et l'on n'observe ainsi qu'une seule image.

On trouve même, en faisant l'expérience, que l'image reste simple lorsque la seconde face de la plaque est inclinée sur l'axe, la première étant toujours perpendiculaire à cet axe et au rayon incident. Cela arriverait, par exemple, si l'on n'enlevait qu'un des deux angles solides A ou A' du rhomboïde primitif. Le rayon incident LI continuerait sa route parallèlement à l'axe, comme tout-à-l'heure, et en sortant par la seconde face, il se réfracterait dans l'air en une seule direction, suivant la loi de la réfraction ordinaire, c'est-à-dire suivant la proportion constante des sinus. De là, on doit conclure que réciproquement un rayon incident R I' qui passerait avec le même angle d'incidence de l'air dans un pareil prisme, s'y réfracterait parallèlement à l'axe en un seul rayon, et en sortirait de la même manière. C'est aussi ce que l'expérience confirme. Si, ayant taillé un pareil prisme, on met contre l'œil sa face perpendiculaire à l'axe, de manière à ne recevoir que les rayons qui arrivent dans cette

direction, toutes les images des objets extérieurs sont simples : elles éprouvent seulement sur leurs bords cette diffusion que j'ai indiquée, et qui tient au phénomène général de la décomposition de la lumière par des prismes.

Mais si la force répulsive qui produit la réfraction extraordinaire émane réellement de l'axe, comme les phénomènes l'annoncent, elle ne peut devenir nulle que lorsque le rayon réfracté lui est parallèle. La coupe que nous venons de déterminer est donc la seule dans laquelle un prisme cristallisé puisse donner des images simples ; c'est aussi ce que l'expérience confirme, et on se sert de ce moyen pour reconnaître l'axe des cristaux.

Reprenons notre plaque à faces parallèles, taillées perpendiculairement à l'axe. Nous avons vu que le rayon ne s'y divise point sous l'incidence perpendiculaire, mais, sous les incidences obliques, il doit se diviser, puisqu'alors il forme un certain angle avec l'axe duquel la force répulsive émane. C'est, en effet, ce qui a lieu ; et de plus, à incidence égale, la réfraction extraordinaire est la même tout autour de l'axe ; ce qui nous montre que la force répulsive agit, à partir de l'axe, de tous les côtés également.

Dans tout cristal doué de la double réfraction, il existe une direction qui donne des phénomènes semblables, c'est-à-dire que les rayons qui traversent le cristal dans ce sens ne se divisent point, même lorsqu'ils sortent par une face prismatique. Nous devons donc, par analogie, appeler cette direction l'*axe de réfraction extraordinaire.* En effet, c'est *toujours* de cet axe qu'émane la force qui divise les rayons ; mais elle n'est pas toujours répulsive. J'ai découvert qu'il existe des cristaux où le rayon extraordinaire est attiré vers l'axe, au lieu d'être repoussé. Nous en verrons bientôt de nombreux exemples. En attendant, la seule observation du fait nous autorise à diviser les cristaux doués de la double réfraction en deux classes, les cristaux à *double réfraction attractive* et à *double réfraction répulsive.*

Ayant reconnu ainsi les circonstances générales de ce mode d'action, il faut en mesurer les effets, et tâcher d'en découvrir les lois. Pour cela, il n'y a pas d'autre parti à prendre que de

tailler des plaques dans divers sens, relativement à l'axe, d'y observer les réfractions extraordinaires sous diverses incidences, d'en chercher les lois particulières, et de tâcher de les composer en une seule plus générale : c'est ce qu'a fait Huygheus pour le spath d'Islande ; et nous allons le prendre pour guide, en nous bornant d'abord à considérer particulièrement ce cristal.

Pour arriver au but de la manière la plus simple, il faut d'abord se servir d'une plaque taillée parallèlement à l'axe de réfraction extraordinaire, telle que serait, par exemple, le parallélipipède AB, A'B', fig. 93, dans lequel l'arête AA' représente la direction de l'axe. Nous allons mesurer les réfractions extraordinaires dans cette plaque, suivant les deux sens rectangulaires AB, AA', en rendant d'abord le plan d'incidence perpendiculaire et ensuite parallèle à l'axe AA'.

Dans la première position, les rayons réfractés ordinaire et extraordinaire ne sortent pas du plan d'incidence AB*ab* : l'un et l'autre se réfractent suivant des lois semblables ; de manière que le sinus de réfraction et le sinus d'incidence, comptés de la normale IN, sont entre eux dans un rapport constant : mais ce rapport n'est pas le même pour les deux réfractions ; il est plus grand dans la réfraction extraordinaire que dans l'ordinaire. Soit θ l'angle d'incidence, θ_{i}' l'angle de réfraction pour le rayon extraordinaire, θ' l'angle de réfraction du rayon ordinaire, on a toujours

pour le premier, $\sin \theta_{i}' = a \sin \theta$;

pour le second, $\sin \theta' = b \sin \theta$;

et dans le spath d'Islande, qui seul à présent nous occupe, on trouve a plus grand que b.

Ce résultat peut, comme nous le verrons tout-à-l'heure, se conclure de l'écartement que les deux faisceaux réfractés éprouvent en traversant notre plaque dans le sens que nous venons d'assigner ; mais il vaut mieux tout de suite le constater par la conséquence qui en découle immédiatement ; et cette conséquence est que, si la réfraction extraordinaire, suivant cette direction, est réellement soumise à une proportion constante de sinus, on peut déterminer cette constante comme celle de la

réfraction ordinaire, en taillant un prisme A B D A′B′D′, fig. 94, dont les arêtes soient parallèles à l'axe, et observant la déviation qu'il produit entre les deux images. De plus, puisque le sens de la coupe est indifférent pour la réfraction ordinaire, on voit que ce seul prisme pourra servir à trouver les constantes des deux réfractions. Pour l'une comme pour l'autre, la constance des rapports sera démontrée, si toutes les incidences lui assignent la même valeur. Ce résultat remarquable s'étend à tous les cristaux jusqu'à présent observés. En l'appliquant au spath d'Islande, Malus a trouvé

$$a = 0{,}6741717, \qquad b = 0{,}6044871.$$

Le seul inconvénient que ce procédé présente, est celui de la dispersion de la lumière par le prisme ; et il est commun aux deux réfractions, quoiqu'il ne s'y opère pas suivant les mêmes lois.

Maintenant, reprenons notre plaque, fig. 93, et, conservant toujours le même plan d'incidence, calculons l'écartement qu'elle doit produire entre les deux faisceaux. Comme nous avons donné plus haut le moyen de mesurer ces écarts, la comparaison du calcul avec l'expérience servira de preuve à notre théorie. Soit donc, fig. 95, L I le rayon incident, formant un angle L I N ou θ avec la normale I N, et désignons par I O, I E les divisions des deux rayons réfractés ordinaire, extraordinaire. Soit e l'épaisseur I N′ de la plaque; alors l'angle O I N′ sera θ', et le produit e tang θ' exprimera la distance O N′ de l'extrémité du rayon ordinaire au pied de la normale I N′; de même e tang $\theta_1{}'$ sera la quantité analogue pour le rayon extraordinaire, c'est-à-dire E N′; l'amplitude E O aura donc pour valeur

$$e\,(\text{tang}\,\theta_1{}'\ \text{tang} - \theta'), \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{e \sin(\theta_1{}' - \theta')}{\cos\theta_1{}'\ \cos\theta'}.$$

Pour vérifier ce résultat, je l'appliquerai à des mesures d'amplitude faites par Malus, sur une plaque taillée dans ce sens, et dont l'épaisseur, en parties du mètre, était $0^{m},0338$. J'ai calculé les valeurs de θ' et $\theta_1{}'$ pour les diverses incidences qu'il a mesurées ; j'en ai déduit l'amplitude par notre formule, et je l'ai comparée à ses observations. J'ai ainsi obtenu le tableau suivant :

Angle θ.	Angle de réfraction		Amplitudes en millimètres,		Excès du calcul.
	extraordin. θ′	ordinaire θ_1'.	observées.	calculées.	
			mm	mm	mm
10°	6°43′23″	6° 1′31″	0,4167	0,43	−0,013
20	13 19 53	11 55 54	0,8671	0,86	+0,007
30	19 41 58	17 35 33	1,3846	1,37	+0,015
40	25 40 49	22 51 53	1,9993	1,98	+0,019
50	31 5 39	27 35 6	2,7256	2,70	+0,026

Les erreurs, ne portant que sur les millièmes de millimètres, peuvent être négligées, et l'on doit être surpris d'un si grand accord.

Dans toutes ces observations, θ_1' est plus grand que θ', et le rayon extraordinaire s'écarte plus de la normale que l'autre ; c'est une suite de l'excès de *a* sur *b*. Mais on peut lier aussi ce résultat à l'idée d'une force répulsive émanée de l'axe ; car, dans le cas dont nous parlons, le rayon réfracté extraordinaire, dans tout son trajet à travers le cristal, est toujours perpendiculaire à cet axe ; et ainsi la force répulsive n'a aucune tendance à l'écarter du plan d'incidence ; elle ne fait que s'opposer au mouvement des molécules lumineuses, et retarder leur vitesse, à mesure qu'elles commencent à pénétrer le cristal. Son action, dans ce sens, est donc toujours directement opposée aux forces attractives ordinaires, qu'elle ne fait que diminuer ; et comme ce sont ces forces qui plient le rayon ordinaire, leur effet étant moindre sur le rayon extraordinaire, elles doivent y produire une moindre réfraction ; ce qui s'accorde avec le résultat observé.

La proportionnalité des sinus des deux réfractions dans les expériences précédentes peut être représentée par une construction géométrique qui est très-simple, mais qui, en se généralisant, nous donnera la loi des deux réfractions dans

tous les sens possibles. Reprenons la construction précédente; mais autour du point d'incidence I, et dans le plan d'incidence même, décrivons un cercle d'un rayon quelconque r, fig. 96; menons ensuite le rayon incident LI et le rayon réfracté ordinaire IO, qui coupera quelque part en O la circonférence que nous avons décrite. Pour déterminer le lieu de cette intersection, menons la tangente OK et l'ordonnée OP; l'angle PKO sera égal à OIN', c'est-à-dire à θ' : de plus, le rayon du cercle étant r, l'abscisse IP est égale à $r \sin \theta'$, et l'ordonnée OP à $r \cos \theta'$; par conséquent,

$$PK = \frac{OP}{\text{tang } \theta'} = \frac{r \cos^2 \theta'}{\sin \theta'}.$$

Ainsi, en l'ajoutant à IP, on aura

$$IP + PK, \quad \text{ou} \quad IK = r \sin \theta' + \frac{r \cos^2 \theta'}{\sin \theta'} = \frac{r}{\sin \theta'};$$

et enfin, en mettant pour $\sin \theta'$ sa valeur, $IK = \dfrac{r}{b \sin \theta}$.

On voit donc que, si l'on faisait le rayon r égal à b, on aurait aussitôt

$$IK = \frac{1}{\sin \theta};$$

de sorte qu'en prenant effectivement IK égal à cette valeur, la tangente menée du point K au cercle indiquera sur son contour l'extrémité du rayon réfracté ordinairement. Mais alors cette valeur de IK, étant devenue indépendante de b, peut servir aussi pour le rayon extraordinaire; c'est-à-dire que, si autour du point d'incidence on décrit un autre cercle avec un rayon IE égal à la constante a, la tangente menée du point K à ce second cercle indiquera sur son contour l'extrémité E du rayon réfracté extraordinaire.

Reprenons maintenant notre plaque, fig. 93, et mettons le plan d'incidence dans l'axe AA'; alors la réfraction ordinaire suit toujours le même rapport constant des sinus, et l'on a, comme tout-à-l'heure,

$$\sin \theta' = b \sin \theta;$$

mais cette constance n'a plus lieu dans le rayon extraordinaire ; car pour celui-ci on trouve

$$\tang \theta_1' = \frac{b}{a} \tang \theta' ;$$

de sorte que, dans ce cas, l'angle de réfraction extraordinaire θ_1' est moindre que l'angle de réfraction ordinaire θ'. Ceci est encore un effet très-simple de la force répulsive émanée de l'axe ; car, en figurant à part la section de notre plaque par le nouveau plan d'incidence, fig. 97, on voit que A A' étant l'axe, la force répulsive qui en émane tend à augmenter l'angle aigu O I A, qu'il forme avec la direction des molécules lumineuses réfractées ordinairement, ce qui repousse le rayon extraordinaire vers la normale I N'.

La loi que donnent ici les expériences peut encore être représentée par une construction analogue à celle dont nous avons fait tout-à-l'heure usage. D'abord, pour déterminer le rayon ordinaire, traçons autour du point d'incidence un cercle d'un rayon égal à b. Puis ayant pris, comme précédemment, une distance I K égale à $\frac{1}{\sin \theta}$, menons à ce cercle la tangente K O : O I sera le rayon ordinaire cherché, et ainsi l'angle O I N' sera θ'. Maintenant la relation de θ' à θ_1', peut se mettre sous cette forme

$$\frac{1}{\tang \theta_1'} = \frac{a}{b} \frac{1}{\tang \theta'} ;$$

alors $\frac{1}{\tang \theta_1'}$ et $\frac{1}{\tang \theta'}$ sont les tangentes des angles E I P, O I P que le rayon extraordinaire et le rayon ordinaire forment avec la surface d'incidence. Or, si l'on prolonge I E jusqu'à sa rencontre avec le prolongement de l'ordonnée P O, on voit que les tangentes dont il s'agit seront proportionnelles à P E et à P O. Il faut donc faire en sorte que ces deux lignes soient entre elles comme est a à b. Cette condition place le point E sur une ellipse A E A' dont le demi petit axe A I, A' I est égal à b ou au rayon du cercle, et le demi grand axe I N' est égal à a. Or, on sait que, lorsqu'un cercle et une ellipse sont disposés de cette manière, les points situés sur la même ordonnée ont la même

sous-tangente. Ainsi, quand on aura décrit l'ellipse et calculé le point K, on lui menera de ce point une tangente comme au cercle, et le point de tangence E appartiendra au rayon réfracté.

En rapprochant ce résultat de celui que nous avions trouvé pour l'incidence perpendiculaire à l'axe, on voit que la réfraction ordinaire, qui reste toujours la même, sera toujours donnée par des cercles dont l'ensemble formera une sphère, au lieu que la réfraction extraordinaire sera donnée par un cercle ou par une ellipse, selon que le plan d'incidence sera perpendiculaire ou parallèle à l'axe du cristal.

En jetant les yeux sur la fig. 98, où ces constructions sont représentées ensemble, on se trouve naturellement porté à essayer si le passage de la perpendicularité au parallélisme ne se ferait pas par des ellipses intermédiaires entre le cercle BN′B′ et l'ellipse AN′A′, telles, par exemple, que les donnerait un ellipsoïde construit sur ces deux sections principales; alors l'analogie entre les deux réfractions serait complète. C'est en effet ce qui a lieu, avec une légère modification que nous découvrirons bientôt.

Commençons d'abord par bien reconnaître notre ellipsoïde. Il a pour centre le point d'incidence. Sa section principale, parallèle à l'axe du cristal, est l'ellipse AN′A′, dont le demi petit axe AI ou A′I est égal à b, tandis que l'autre IN′ est égal à a. L'autre section, par un plan perpendiculaire à l'axe du cristal, donne le cercle BN′B′, dont le rayon est aussi égal à a. Notre ellipsoïde, construit sur ces deux sections principales, sera nécessairement de révolution autour de la ligne AA′, qui est son plus petit axe, et ainsi il est aplati à ses pôles AA′.

Si nous voulions appliquer littéralement à toutes les autres sections de cet ellipsoïde la construction dont nous avons fait usage pour les deux premières, il faudrait déterminer le point K de la même manière pour chaque plan d'incidence, et mener de ce point une tangente à l'ellipse contenue dans ce plan. Mais il est facile de voir que cela ne suffirait pas pour représenter les phénomènes; car il s'ensuivrait que le rayon extraordinaire devrait rester toujours dans le plan d'incidence, au lieu que l'expérience nous apprend qu'il s'en écarte, quand la direc-

tion de ce plan est intermédiaire entre celles que nous avons examinées; néanmoins, par un accord surprenant de cette construction avec l'expérience, il ne faut qu'y faire une modification très-légère pour tout accorder; il ne faut que tracer par le point K, sur la surface du cristal, une ligne perpendiculaire à I K, et par cette ligne mener un plan tangent à l'ellipsoïde. Dans les deux cas que nous avons examinés d'abord, le point de contact se trouvera compris dans le plan d'incidence même, et coïncidera avec celui qu'une simple tangente aurait donné. Mais dans les intermédiaires, il sortira du plan d'incidence, à droite ou à gauche, et toujours conformément à l'observation.

Non-seulement cette construction, soumise au calcul, satisfait aux phénomènes que présente une plaque taillée parallèlement à l'axe, mais elle donne encore tous ceux qui se produisent dans d'autres sections quelconques. Cette belle découverte est due à Huyghens.

Pour généraliser la construction qu'elle donne, et la réduire en principe général, choisissons une face quelconque du cristal, soit naturelle, soit artificielle M M′, fig. 99, et représentons, par IR, la trace du plan d'incidence KIL. Par le point d'incidence I, menons une ligne droite AIA′, parallèle à l'axe du cristal, et prenons de part et d'autre, de ce point, deux longueurs I A, I A′ égales entre elles, et au rapport constant b de la réfraction ordinaire. Puis sur cette droite, comme axe, décrivons un ellipsoïde de révolution qui ait les points A, A′ pour pôles, et dont le rayon de l'équateur soit égal à a; c'est-à-dire, au rapport constant des sinus pour la réfraction extraordinaire. Cela fait, prenons le point K sur le prolongement de R I, dans le plan de la face, de manière que IK soit égale à $\frac{1}{\sin \theta}$, et par ce point, menons TT′ perpendiculaire au plan d'incidence. Enfin, par cette droite, menons un plan qui soit tangent à l'ellipsoïde, le point de contact E se trouvera sur le rayon réfracté extraordinairement; et l'on obtiendra ce rayon lui-même, en joignant I et E par une droite IE. Si, au lieu de l'ellipsoïde, on décrit une sphère sur le diamètre A A′,

et qu'on lui mène un plan tangent par la même droite T T', le point de tangence O appartiendra au rayon ordinaire, et donnera de même ce rayon.

Pour vérifier cette construction d'une manière générale, il faut la réduire en calcul. C'est un simple problème de géométrie que nous allons résoudre; mais, auparavant, il sera bon de remarquer que, quelle que soit la face, naturelle ou artificielle, sur laquelle l'incidence s'opère, il y a une direction dans laquelle le rayon réfracté extraordinairement ne sort pas du plan d'incidence, et cela a lieu quand ce plan contient l'axe du cristal, puisqu'alors la force répulsive n'a aucune tendance pour en faire sortir les molécules lumineuses. Dans nos premières observations sur le rhomboïde, nous avions reconnu cette propriété pour le plan d'incidence qui contenait les petites diagonales des bases, et nous avions désigné ce plan par le nom de *section principale.* A présent nous généraliserons cette dénomination, et nous appellerons *section principale* d'un cristal, celle qui résulte d'un plan mené par l'axe de double réfraction, perpendiculairement à la face que l'on considère.

L'intersection de ce plan avec la face sera une de nos coordonnées; représentons-la par S S', fig. 100. Pour déterminer la position de tout autre plan d'incidence, il suffira d'assigner l'angle dièdre SIR qu'il forme avec la section principale. Cet angle est le même que celui des traces S I, R I, et nous le nommerons ϖ. Nous nommerons d'ailleurs θ l'incidence LIN, comptée de la normale IN, comme nous l'avons fait précédemment. Alors la direction du rayon incident sera complètement déterminée au moyen des deux angles ϖ et θ. En effet, soient z, x, y, trois coordonnées rectangulaires, comptées à partir du point d'incidence I, la première sur la normale IN, la seconde sur la trace I S de la section principale, et la troisième perpendiculairement aux deux précédentes. Choisissons sur la direction du rayon incident un point L situé à une distance r du point d'incidence, nous aurons généralement

$$z = r \cos \theta$$

$$x = r \sin \theta \cos \varpi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varpi.$$

La position du point L sera complètement déterminée par ces formules, quand r, θ et ϖ seront donnés.

La direction du rayon réfracté ordinaire I O se déterminera de même par l'angle θ' qu'il formera avec la normale, et par l'angle ϖ, ou plutôt $180° + \varpi$, que sa projection sur le plan des xy forme avec l'axe des x. Comme ce rayon reste toujours dans le plan d'incidence, l'angle ϖ est le même pour lui que pour le rayon incident.

Cette coïncidence n'a plus lieu pour le rayon réfracté extraordinaire IE. Celui-ci pouvant s'écarter du plan d'incidence, nous désignerons par ϖ_1 l'angle que sa projection sur le plan des xy forme avec l'axe des x, et par θ_1' l'angle de réfraction qu'il forme avec la normale I N', prolongement de I N.

Enfin, il nous faut encore fixer une dernière donnée, c'est la position de l'axe A A' du cristal relativement à la face d'incidence. Déjà nous avons désigné S S' comme représentant la projection de cet axe sur le plan des xy; il ne reste donc qu'à fixer l'angle qu'il forme avec la normale I N'. Nous le représenterons par λ.

Maintenant, si nous voulons former l'équation de notre ellipsoïde en fonction des coordonnées x, y, z, il est clair qu'elle ne devra pas contenir les premières puissances de ces variables, puisque leur origine coïncide avec le centre de l'ellipsoïde; elle ne devra pas non plus renfermer les produits xy, zy; car l'axe de l'ellipsoïde étant situé dans le plan des xz, sa surface est symétrique des deux côtés de ce plan. La forme la plus générale que cette équation puisse avoir sera donc

$$Ax^2 + 2Bxz + Cz^2 + Dy^2 = a^2 b^2, \qquad (1)$$

A, B, C, D étant des coefficiens qu'il faudra déterminer d'après les conditions auxquelles la construction de l'ellipsoïde est assujettie.

D'abord il est bien facile de déterminer D; car l'ellipsoïde étant de révolution autour de l'axe A A', son intersection par l'axe des y devra être égale au diamètre de son équateur; c'est-

à-dire à $2a$; faisant donc x et z nuls, il faudra qu'on ait $y = \pm a$, ce qui donne

$$Da^2 = a^2 b^2, \quad \text{et par conséquent} \quad D = b^2.$$

Maintenant, pour déterminer les autres coefficiens, il n'y a qu'à faire y nul, c'est-à-dire, considérer la section de l'ellipsoïde par le plan des xz, puis assujettir cette section à avoir pour longueur de ses axes, $2a$, $2b$, cette dernière étant dirigée sur la ligne A A'. Cela n'exige qu'une simple transformation de coordonnées, et l'on en tire

$$A = a^2 \sin^2\lambda + b^2 \cos^2\lambda,$$
$$B = (b^2 - a^2) \sin\lambda \cos\lambda,$$
$$C = a^2 \cos^2\lambda + b^2 \sin^2\lambda.$$

Il ne reste plus qu'à mener un plan tangent à cet ellipsoïde, conformément à la construction que nous avons adoptée. Pour cela, nommons x', y' les coordonnées du point K pris sur le prolongement de la trace R I du plan d'incidence, à une distance $-\frac{1}{\sin\theta}$ de l'origine. Je lui donne le signe $-$ pour montrer qu'elle est prise du côté opposé au rayon incident. Si cette distance était r, on aurait généralement

$$x' = r\cos\varpi, \qquad y' = r\sin\varpi,$$

puisqu'elle est $-\frac{1}{\sin\theta}$, on aura

$$x' = -\frac{\cos\varpi}{\sin\theta}, \qquad y' = -\frac{\sin\varpi}{\sin\theta},$$

ce qui donne la condition

$$x'\cos\varpi + y'\sin\varpi = -\frac{1}{\sin\theta}.$$

Maintenant, par le point K ainsi déterminé, il faut mener, dans le plan des xy, une droite perpendiculaire à IK. Ce sera la trace de notre plan tangent sur le plan des xy; l'équation de cette droite sera

$$y - y' = -\frac{1}{\tang\varpi}(x - x'),$$

ou $$(x - x')\cos\varpi + (y - y')\sin\varpi = 0;$$

ainsi l'équation du plan tangent dont elle est la trace sera nécessairement de la forme

$$(x - x')\cos\varpi + (y - y')\sin\varpi + C'z = 0\,;$$

car elle doit redonner cette trace quand z est nul. Le coefficient C' reste encore arbitraire ; mais il va se déterminer par la condition du contact. En effet, elle exige que les coefficiens différentiels, partiels $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, soient les mêmes sur le plan et sur l'ellipsoïde, au point de contact. Nommant donc x'', y'', z'', les coordonnées de ce point, il faudra qu'on ait

$$\frac{\cos\varpi}{C'} = \frac{Ax'' + Bz''}{Bx'' + Cz''}, \qquad \frac{\sin\varpi}{C'} = \frac{Dy''}{Bx'' + Cz''};$$

d'où l'on tire

$$C' = \frac{(Bx'' + Cz'')\sin\varpi}{Dy''}; \quad Dy''\cos\varpi = (Ax'' + Bz'')\sin\varpi. \quad (2)$$

La première de ces formules détermine C' ; la seconde, indépendante de C' et de θ, exprime le lieu de tous les contacts qui peuvent appartenir à des rayons pour lesquels ϖ est commun, c'est à-dire qui sont originairement contenus dans un même plan d'incidence ; et comme elle est linéaire en x'' y'' z'', elle montre que ces rayons seront aussi réfractés extraordinairement dans un seul et même plan.

Si l'on met la valeur de C' dans l'équation du plan tangent, elle achève de la déterminer ; et en remplaçant, pour plus de simplicité, $x'\cos\varpi + y'\sin\varpi$ par $-\frac{1}{\sin\theta}$, il vient, relativement au point de contact,

$$Dy''(x''\cos\varpi + y''\sin\varpi) + (Bx'' + Cz'')z''\sin\varpi = -\frac{Dy''}{\sin\theta}; \quad (3)$$

on a, de plus

$$Dy''\cos\varpi = (Ax'' + Bz'')\sin\varpi, \quad (2)$$

$$Ax''^2 + 2Bx''z'' + Cz''^2 + Dy''^2 = a^2b^2. \quad (1)$$

Ces trois équations déterminent les trois coordonnées x'', y'', z'', du point de contact. Pour les obtenir simplement, et sans ambiguité, il faut, dans le premier membre de l'équation (3),

substituer au facteur $D\,y''\cos\varpi$ sa valeur tirée de l'équation (2). Il vient alors

$$(A\,x''^2 + 2\,B\,x''z'' + C\,z''^2 + D\,y''^2)\sin\varpi = -\frac{D\,y''}{\sin\theta};$$

le coefficient de $\sin\varpi$ se trouve égal à $a^2\,b^2$, d'après l'équation de l'ellipsoïde ; il reste donc

$$a^2\,b^2\sin\varpi = -\frac{D\,y''}{\sin\theta},$$

d'où l'on tire $$y'' = -\frac{a^2\,b^2\sin\theta\sin\varpi}{D}.$$

On peut maintenant, sans difficulté, substituer cette valeur dans les équations (1) et (2), et éliminer entre elles; il faut seulement remarquer que $A\,C - B^2 = a^2\,b^2$, et que $D = b^2$; on trouve ainsi

$$z'' = -\sqrt{A - a^2\sin^2\theta\,(A\sin^2\varpi + b^2\cos^2\varpi)}$$

$$x'' = -\frac{a^2b^2\sin\theta\cos\varpi}{A} + \frac{B}{A}\sqrt{A - a^2\sin^2\theta\,(A\sin^2\varpi + b^2\cos^2\varpi)}.$$

$$y'' = -\,a^2\sin\theta\sin\varpi.$$

Ce sont les trois coordonnées du point de contact. En résolvant l'équation qui donne z'', je n'ai pris que le signe négatif du radical, parce que, dans la construction que nous avons adoptée, le point de tangence est nécessairement situé du côté des z négatifs. Maintenant soit r'' la longueur du rayon mené de ce point au centre de l'ellipsoïde, on aura, d'après nos notations précédentes,

$$z'' = r''\cos\theta_1'$$
$$x'' = r''\sin\theta_1'\cos\varpi_1$$
$$y'' = r''\sin\theta_1'\sin\varpi_1;$$

de là on tire

$$\tang\theta_1'\cos\varpi_1 = \frac{x''}{z''} \qquad \tang\theta_1'\sin\varpi_1 = \frac{y''}{z''};$$

et en mettant pour x'', y'', z'', leurs valeurs, il vient

$$\tang\theta_1'\sin\varpi_1 = \frac{a^2\sin\theta\sin\varpi}{\sqrt{A - a^2\sin^2\theta\,(A\sin^2\varpi + b^2\cos^2\varpi)}}$$

$$\tang\theta_1'\cos\varpi_1 = \frac{a^2\,b^2\sin\theta\cos\varpi}{A\sqrt{A - a^2\sin^2\theta\,(A\sin^2\varpi + b^2\cos^2\varpi)}} - \frac{B}{A}.$$

sur quoi il faut se rappeler qu'on a

$$A = a^2 \sin^2\lambda + b^2 \cos^2\lambda,$$
$$B = (b^2 - a^2) \sin\lambda \cos\lambda,$$

b étant la constante de la réfraction ordinaire, et a celle de la réfraction extraordinaire, observées l'une et l'autre sur une face d'incidence parallèle à l'axe du cristal, et dans un plan d'incidence perpendiculaire à cet axe.

Pour vérifier ces formules, cherchons d'abord à en déduire les résultats particuliers que nous avons obtenus immédiatement. Faisons, par exemple, $\lambda = 90°$, l'axe sera dans le plan de la face, et nous aurons $A = a^2$, $B = 0$. C'est le cas de notre plaque parallèle à l'axe. Les formules générales étant particularisées par ces suppositions, donnent

$$\tang \theta_{\prime}' \sin \varpi_{\prime} = \frac{a \sin\theta \sin\varpi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta\,(b^2 \cos^2\varpi + a^2 \sin^2\varpi)}}$$

$$\tang \theta_{\prime}' \cos \varpi_{\prime} = \frac{b^2 \sin\theta \cos\varpi}{a\sqrt{1 - \sin^2\theta\,(b^2 \cos^2\varpi + a^2 \sin^2\varpi)}}.$$

En divisant ces équations l'une par l'autre, on en tire

$$\tang \varpi_{\prime} = \frac{a^2}{b^2} \tang \varpi.$$

Quand $\varpi = 0$, $\varpi_{\prime} = 0$; quand $\varpi = 90°$, $\varpi_{\prime} = 90°$: mais, dans toute autre position du plan d'incidence, les valeurs de ϖ et $\varpi_{\prime}$ diffèrent. Aussi avons-nous remarqué que, dans les deux premières directions, le rayon réfracté extraordinairement ne sort pas du plan d'incidence, tandis qu'il en sort pour toutes les autres.

Si l'on fait $\varpi = 90°$, nous aurons le plan d'incidence perpendiculaire à la section principale, et parconséquent aussi à l'axe du cristal, puisque nous avons fait $\lambda = 90$. Cette supposition rend $\cos \varpi_{\prime}$ nul, et donne $\varpi_{\prime} = 90°$; après quoi, la première équation

se réduit à $$\tang \theta_{\prime}' = \frac{a \sin\theta}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2\theta}};$$

d'où l'on tire $$\sin \theta_{\prime}' = a \sin\theta,$$

comme nous l'avons déduit de l'expérience. Si, au contraire, nous

faisons $\varpi = 0$, il viendra $\varpi_1 = 0$, et la seconde équation donnera

$$\tang \theta_1' = \frac{b}{a} \cdot \frac{b \sin \theta}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \theta}}.$$

Or, dans le rayon ordinaire, on a

$$\sin \theta' = b \sin \theta;$$

par conséquent,

$$\tan \theta' = \frac{b \sin \theta}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \theta}};$$

et cette valeur substituée dans notre formule nous donne

$$\tang \theta_1' = \frac{b}{a} \tang \theta',$$

comme nous l'avions aussi trouvé.

Veut-on, au contraire, que l'axe devienne perpendiculaire aux faces du cristal, il n'y a qu'à faire $\lambda = 0$; ce qui donne

$$A = b^2$$
$$B = 0;$$

et avec ces valeurs, on aura

$$\tang \theta_1' \sin \varpi_1 = \frac{a^2 \sin \theta \sin \varpi}{b \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta}}$$

$$\tang \theta_1' \cos \varpi_1 = \frac{a^2 \sin \theta \cos \varpi}{b \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta}}.$$

En divisant ces équations l'une par l'autre, on en tire

$$\tang \varpi_1 = \tang \varpi;$$

et par conséquent $\varpi_1 = \varpi$, c'est-à-dire que le rayon réfracté extraordinairement ne sort pas du plan d'incidence. C'est un résultat tout simple, puisque la force répulsive émane de cet axe. D'après cela, les deux équations précédentes s'accordent pour donner $\tang \theta_1' = \dfrac{a^2 \sin \theta}{b \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta}}.$

Pour bien analyser ce cas, soit, fig. 101, KIL le plan d'incidence, et IK la section faite par ce plan dans la face par laquelle la lumière pénètre; l'axe AA' de l'ellipsoïde, toujours parallèle à l'axe du cristal, sera perpendiculaire à IK. Alors les deux réfractions seront données par les tangentes KO, KE, menées du point K au cercle CAC' et à l'ellipse BAB', situés

l'un et l'autre dans le plan d'incidence, et décrits, l'un avec le rayon b, l'autre sur les axes $2b$ et $2a$. Il est facile de vérifier cette construction par la formule même. En effet, considérons un angle auxiliaire θ_2 tel qu'on ait

$\sin\theta_2 = a\sin\theta$, on en tirera $\tang\theta_2 = \frac{a\sin\theta}{\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}}$,

et par conséquent, $\tang\theta_1{}' = \frac{a}{b}\tang\theta_2$.

Or, pour construire θ_2, il n'y a qu'à décrire du point I, comme centre, un cercle B N′ B′ avec le rayon $IB = a$, et du point K mener à ce cercle une tangente Ke; alors l'ordonnée correspondante de l'ellipse donnera le point E qui convient à $\theta_1{}'$: mais il est évident qu'on l'obtiendrait de même en menant du point K la tangente KE à l'ellipse; ce qui réalise encore la construction de Huyghens.

Ce résultat peut se vérifier comme celui de la page 332, par des observations d'amplitude, en mesurant l'écart des deux rayons ordinaire, extraordinaire, après qu'ils ont traversé une plaque de l'épaisseur e. Soit, fig. 102, IN′ la normale au point d'incidence, et IO, IE les deux rayons, les deux surfaces de la plaque étant supposées parallèles, on aura

$$OE = \frac{e\sin(\theta_1{}' - \theta')}{\cos\theta_1{}'\cos\theta'}.$$

Malus a fait des observations de ce genre sur une plaque de spath d'Islande, dont l'épaisseur était $0^m,030125$. En voici la comparaison avec la formule :

Angle d'incidence θ.	Angle de Réfraction		Amplitudes en millimètres,		Excès du calcul.
	ordinaire θ'.	extraordinaire $\theta_1{}'$.	calculées.	observées.	
			mm	mm	mm
10	6° 1′ 31″	7° 29′ 22″	0,78068	0,81667	−0,03599
20	11 55 54	14 48 13	1,59567	1,60000	−0,00433
30	17 35 33	21 46 3	2,47761	2,46667	+0,01094
40	22 51 53	28 12 13	3,46263	3,49667	−0,03404

En général, on peut appliquer ces formules à des sections faites dans le cristal, suivant des directions quelconques : si multipliées et si diverses qu'on veuille les choisir, on trouvera toujours qu'elles représentent parfaitement les observations. C'est ce que Huyghens, et après lui Wollaston et Malus ont fait avec beaucoup de soin pour le spath d'Islande.

Jusqu'ici nous avons supposé que la première surface par laquelle les rayons pénètrent le cristal était contiguë au vide, ou du moins à une substance dont l'action sur la lumière pouvait être négligée; mais qu'arriverait-il si le milieu d'où les rayons sortent réfractait sensiblement la lumière? Pour le savoir, il faut revenir au cas simple où la face d'incidence est parallèle à l'axe du cristal, et le plan d'incidence perpendiculaire à cet axe. Nous avons vu qu'alors les deux réfractions s'opèrent suivant la loi de Descartes. Or, cela s'observe encore, quel que soit le milieu ambiant, pourvu qu'il ne soit pas cristallisé. Seulement les constantes de chaque réfraction sont différentes.

Admettons, par exemple, que, dans le cas où les rayons sortent du vide, on ait

$$\text{réfr. ord. } \sin\theta' = b \sin\theta, \qquad \text{réfr. extr. } \sin\theta_1' = a \sin\theta,$$

a et b étant les deux constantes que nous avons jusqu'ici employées. Mettons le cristal en contact avec un milieu non cristallisé, pour lequel le rapport de réfraction soit (b), lorsque les rayons y pénètrent en sortant du vide; en sorte que, relativement à ce milieu, on ait

$$\sin\theta' = (b) \sin\theta.$$

Cela posé, si on met le cristal en contact avec lui, la face et le mode d'incidence restant toujours les mêmes, les rayons réfractés se diviseront encore; mais on trouvera

$$\text{réfr. ord. } \sin\theta' = \frac{b}{(b)} \sin\theta, \qquad \text{réfr. extr. } \sin\theta_1' = \frac{a}{(b)} \sin\theta;$$

c'est-à-dire que le cristal se comporte comme si les constantes a et b de ses deux réfractions étaient changées en

$$b' = \frac{b}{(b)}, \qquad a' = \frac{a}{(b)}.$$

Maintenant l'expérience prouve qu'il en est de même dans

toutes les autres faces d'incidence, de quelque manière qu'elles soient taillées, relativement à l'axe du cristal ; de sorte qu'en substituant ces nouvelles valeurs de a' et de b' à la place de a et de b dans les formules générales données par la loi d'Huyghens, on obtiendra les directions du rayon réfracté extraordinaire : quant au rayon ordinaire, il est évident que cette substitution le donnera aussi, puisque c'est précisément celle que nous avons démontrée, page 285, pour la réfraction ordinaire, en changeant les constantes b en $\frac{1}{n}$.

Enfin, il nous reste à considérer ce qui arriverait si le milieu contigu au cristal était lui-même cristallisé et doué de la double réfraction. Alors le rayon incident LI, qui vient de ce milieu, peut être ordinaire ou extraordinaire : s'il est ordinaire, on peut considérer le milieu comme n'étant pas cristallisé, et la réduction précédente est applicable; s'il est extraordinaire, fig. 103, il n'y a qu'à, par le point d'incidence I, mener le rayon ordinaire IO, qui lui correspond dans le premier milieu, et dont la direction, comme on le verra tout-à-l'heure, peut être calculée par nos formules générales; alors, partant de ce rayon ordinaire, on calculera les deux rayons réfractés qui en dériveraient dans le second cristal; ce seront les *directions* demandées. Je dis les directions, car, lorsque les rayons lumineux passent ainsi d'un cristal dans un autre, les intensités des faisceaux qui en résultent sont assujetties à des variations très-singulières, que nous examinerons plus tard, et qui quelquefois peuvent les affaiblir au point qu'on cesse entièrement de les apercevoir.

Pour effectuer le calcul que nous venons d'indiquer, il faut savoir déterminer, dans le premier milieu, l'angle OIN ou θ', et l'azimut ϖ du plan d'incidence du rayon ordinaire, d'après l'angle EIN ou θ_1', et la direction d'incidence ϖ_1, que l'on sait appartenir au rayon extraordinaire correspondant. Or, puisque ces deux rayons sont liés entre eux par la condition de coïncider dans leur émergence, si l'on nomme θ leur angle commun d'émergence dans un milieu quelconque non cristallisé, par

exemple, dans levide, et ϖ leur azimut d'émergence, celui-ci devra d'abord être commun au rayon ordinaire que l'on cherche ; de plus, θ sera lié à θ' par la proportion constante

$$\sin \theta' = b \sin \theta; \qquad \text{d'où } \sin \theta = \frac{1}{b} \sin \theta',$$

b étant ici la constante de la réfraction ordinaire pour le premier milieu. Si l'on substitue cette expression de $\sin \theta$ dans les deux équations générales données page 342, en les appliquant au premier milieu, elles deviennent

$$\tang \theta_1' \sin \varpi_1 = \frac{a^2 \sin \theta' \sin \varpi}{[Ab^2 - a^2 \sin \theta' (b^2 \cos^2 \varpi + A \sin^2 \varpi)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\tang \theta_1' \cos \varpi_1 = \frac{a^2 b^2 \sin \theta' \cos \varpi}{A[Ab^2 - a^2 \sin^2 \theta' (b^2 \cos^2 \varpi + A \sin^2 \varpi)]^{\frac{1}{2}}} - \frac{B}{A}.$$

On connaît dans ces équations, θ_1' et ϖ_1 ; elles ne contiennent donc plus d'inconnues que θ' et ϖ, et elles suffiront pour les déterminer. Il est aisé de voir qu'on serait parvenu au même résultat, si l'on eût supposé le premier milieu contigu à un autre milieu quelconque non cristallisé, où la constante de la réfraction ordinaire aurait été (b) pour les rayons qui y pénètrent en sortant du vide ; car alors il aurait fallu changer a en $\frac{a}{(b)}$, et b en $\frac{b}{(b)}$ dans les équations générales de la page 342 ; mais comme on aurait eu aussi $\sin \theta = \frac{(b)}{b} \sin \theta'$ pour la réfraction ordinaire, il s'ensuit qu'en éliminant $\sin \theta$, la constante (b) serait disparue d'elle-même, et on serait retombé sur les mêmes équations que nous venons de trouver.

Jusqu'ici nous avons pris pour exemple le spath d'Islande, et nous avons reconnu que la réfraction extraordinaire y est évidemment produite par une force répulsive qui émane de l'axe du rhomboïde primitif. Cela a lieu de même dans beaucoup d'autres cristaux, avec la seule différence de l'inégale intensité des effets. Il existe aussi des cristaux en très-grand nombre, qui produisent des effets tout contraires, c'est-à-dire

que le rayon extraordinaire est attiré vers leur axe, au lieu d'en être repoussé : du reste, la construction d'Huyghens s'y applique toujours; seulement la constante a, relative à la réfraction extraordinaire, s'y trouve moindre que la constante b de la réfraction ordinaire; ce qui est l'opposé de ce qu'on observe dans le spath d'Islande. Ce résultat exige donc, comme je l'ai annoncé, que nous partagions les corps doués de la double réfraction en deux classes, l'une *à double réfraction répulsive*, l'autre *à double réfraction attractive;* de sorte que nous retrouvons encore dans ce mode d'action des corps sur la lumière la même opposition de forces attractives et répulsives qui existe entre les deux magnétismes et les deux électricités. Dans les cristaux répulsifs, tels que le spath d'Islande, a surpasse b; et comme la première de ces constantes est le rayon de l'équateur de l'ellipsoïde de Huyghens, il s'ensuit que cet ellipsoïde est renflé à son équateur et aplati à ses pôles; au contraire, dans les cristaux attractifs, b surpassant a, l'axe de révolution est plus grand que le diamètre de l'équateur, et l'ellipsoïde est allongé à ses pôles. La sphère qui forme le passage d'une de ces limites à l'autre constitue donc une sorte d'état neutre, et convient aux cristaux qui, cristallisant en octaèdre régulier ou en cube, n'exercent pas la double réfraction.

Voici les valeurs de a et de b que Malus a observées pour un certain nombre de cristaux. Comme la distinction des deux espèces de double réfraction lui avait échappé, il supposait tous les cristaux répulsifs comme le spath d'Islande, et il attribuait toujours à la réfraction extraordinaire celle des deux constantes qui avait la plus grande valeur. En profitant de ses résultats, je les ai rétablis dans l'ordre naturel, et j'y ai joint l'indication de plusieurs autres cristaux, dont j'ai déterminé seulement le mode d'action attractif ou répulsif par des procédés que j'expliquerai plus tard.

DÉSIGNATION des Substances.	VALEUR de *b*.	VALEUR de *a*.	NATURE de la double réfraction.	DIRECTION de l'AXE.
Spath d'Islande....	0,604487	0,674172	répulsive.	parall. à la petite diag. du rhomb. primitif.
Aragonite........	0,590620	0,651550	répulsive.	parall. aux aiguilles.
Quartz...........	0,645813	0,641776	attractive.	parall. aux aiguilles.
Baryte sulfatée....	0,611530	0,607223	attractive.	parall. à la petite diag. de la base des prism.
Chaux phosphatée.	....	....	répulsive.	
Béril............	....	....	répulsive.	parallèle aux arêtes des prismes.
Tourmaline.......	....	....	répulsive.	parall. aux aiguilles.
Topaze...........	....	....	attractive.	parall. aux aiguilles.
Chaux sulfatée....	....	....	attractive.	dans le plan des lames.

Tous les cristaux ci-dessus désignés n'ont qu'un seul axe, duquel émanent des forces attractives ou répulsives ; mais on pourrait concevoir également des forces émanées de plusieurs axes. C'est ce qui a lieu dans le mica, où j'ai découvert qu'il existe un axe attractif situé dans le plan des lames, et un axe répulsif qui leur est perpendiculaire. Malheureusement, les cristaux transparens de cette substance ne sont ni assez gros, ni assez communs pour qu'on puisse y étudier la marche des rayons, et je n'y ai reconnu l'existence de deux genres de forces que par un autre mode d'observation, dont je parlerai plus tard. Cet exemple est, jusqu'à présent, le seul où l'on ait reconnu plusieurs axes. Dans tous les autres où il n'en existe qu'un seul, la loi de Huyghens a toujours paru s'appliquer exactement.

Cette loi étant ainsi prouvée par les phénomènes, il faut tâcher de la démontrer par quelque principe mécanique ; car jusque-là on ne peut la regarder que comme une approximation empirique, et son exactitude n'est prouvée que dans les limites d'erreur comportées par les expériences ; au lieu que, si

elle satisfait aux lois générales de mécanique qui conviennent à des forces attractives, on pourra la regarder comme un résultat rigoureux. C'est ce que M. Laplace a fait par une analyse trop élevée pour que nous puissions ici en rendre compte; du moins en voici les résultats :

Dans la loi ordinaire de la réfraction de la lumière, lorsque les particules lumineuses qui composent un même rayon réfracté ont pénétré à une profondeur sensible dans le milieu réfringent, leur vitesse devient constante; et de plus, elle est la même sur tous les rayons réfractés, quelle que soit leur direction. Mais la première propriété est seule nécessitée, dans tous les cas, par la condition que les forces attactives ne soient sensibles qu'à de petites distances; et si, outre les forces indépendantes de la figure des particules, on en conçoit qui émanent d'un ou de plusieurs axes, on peut, sans violer les principes de la mécanique, rendre la vitesse variable d'un rayon à un autre, suivant une infinité de lois différentes. C'est ce qui a lieu, pour le rayon extraordinaire, dans les corps cristallisés doués de la double réfraction. Le carré de la vitesse, qui est constant dans la réfraction ordinaire, s'y trouve modifié par un terme variable, proportionnel au carré du sinus de l'angle formé par l'axe du cristal avec le rayon réfracté extraordinaire.

Soit U cet angle, et V_1 la vitesse des particules réfractées extraordinairement, leur vitesse dans le vide étant 1, on trouve

$$V^2_1 = \frac{1}{b^2} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin^2 U,$$

$2b$ étant l'axe de révolution de l'ellipsoïde de Huyghens, et $2a$ le diamètre de son équateur.

Or, il faut se rappeler que b exprime aussi le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence, pour les molécules lumineuses qui subissent la réfraction ordinaire; par conséquent, $\frac{1}{b^2}$ est précisément le carré de la vitesse ordinaire V que ces molécules acquièrent lorsqu'elles ont pénétré dans le cristal à une profondeur sensible; ce qui confirme l'énoncé que nous avons donné plus haut. La vitesse variable V_1 devient égale à V quand U est nul, c'est-à-dire quand le rayon extraordinaire

coïncide avec l'axe du cristal ; et en effet, dans ce cas, la force répulsive qui émane de l'axe étant nulle, les rayons ordinaire et extraordinaire se confondent identiquement : mais pour toute autre valeur de U, leurs vitesses diffèrent, V_1 n'étant plus égal à $\frac{1}{b}$. Lorsque a surpasse b, comme cela a lieu dans les cristaux répulsifs, la différence $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$ est positive ; la vitesse du rayon extraordinaire diminue donc à mesure que l'angle U augmente, et elle est la moindre possible lorsque U égale 90° ; ce qui donne sin U $=1$, et par suite

$$V_1 = \frac{1}{a}.$$

Mais le contraire a lieu lorsque b est plus grand que a ; ce qui arrive dans les cristaux attractifs. Alors $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$ étant négatif, la vitesse du rayon extraordinaire est la moindre possible quand U est nul : elle croît avec U, et elle atteint son maximum quand U devient 90° ; ce qui la rend égale à $\frac{1}{a}$.

En général, lorsque U $=90°$, le rayon réfracté est perpendiculaire à l'axe du cristal. La force, soit répulsive, soit attractive, qui émane de cet axe, est donc alors dirigée toute entière dans le sens du mouvement des particules lumineuses. C'est pour cela qu'elle produit dans leur vitesse la plus grande diminution, si elle est répulsive ; ou si elle est attractive, la plus grande augmentation.

En comparant la valeur précédente de V_1 avec l'expression analytique du rayon vecteur ϱ, mené du centre de l'ellipsoïde à sa surface, on trouve celui-ci égal à $\frac{1}{V_1}$: ainsi, réciproquement la vitesse V_1 est égale à $\frac{1}{\varrho}$. On a vu d'ailleurs que la vitesse ordinaire V est exprimée par $\frac{1}{b}$. On aura donc généralement

$$\frac{V_1}{V} = \frac{b}{\varrho};$$

c'est-à-dire que, dans un même cristal, la vitesse extraordinaire est à la vitesse ordinaire, comme le demi-axe de révolution de l'ellipsoïde est à son rayon vecteur.

M. Ampere a appliqué les mêmes principes au cas général où la vitesse des rayons, tant incidens que réfractés, serait fonction des angles qu'ils forment, non plus avec un seul axe, mais avec plusieurs de positions données ; et il en a déduit la construction suivante, analogue à celle d'Huyghens.

Soit, fig. 104, LI le rayon incident, et I le point d'incidence sur la surface commune des deux milieux A et B. Construisez autour de ce point, dans le second milieu, deux surfaces, dont l'une, SOS, ait tous ses rayons en raison inverse des vitesses de la lumière sur chaque direction dans le premier milieu, et l'autre, S′ES′, ait tous ses rayons en raison inverse des vitesses qui ont lieu dans le second ; puis prolongeant le rayon incident LI jusqu'à sa rencontre en L′ avec la première surface, menez à celle-ci, au point L′, un plan tangent qui coupera la surface d'incidence suivant une droite TT′ : enfin, par cette trace, menez un autre plan tangent à la seconde surface ; et joignant le point de tangence E avec le point I d'incidence, IE sera le rayon réfracté extraordinairement.

La première surface SL′S deviendra une sphère, 1°. lorsque le premier milieu sera le vide ; 2°. lorsqu'étant matériel, il n'exercera pas la double réfraction ; 3°. lorsqu'exerçant la double réfraction, l'on considérera un rayon incident qui y aura subi la réfraction ordinaire. Si, de plus, les vitesses dans le second milieu ne dépendent que d'un seul axe, la seconde surface S′ES′ sera un ellipsoïde de révolution : alors on retombe sur la construction d'Huyghens. Enfin, si la vitesse dans le premier milieu dépendait aussi d'un seul axe, et que le rayon incident fût extraordinaire, la première surface SL′S serait elle-même un ellipsoïde ; de sorte que l'on voit, pour tous les cas, comment la construction se modifie et se transforme de manière à donner toujours les rayons réfractés.

De la Réflexion à la seconde surface des cristaux.

La théorie que nous venons d'exposer n'est pas bornée aux rayons réfractés extraordinairement par les cristaux ; elle s'applique aussi à ceux qui sont réfléchis intérieurement à leur seconde surface. Mais avant d'entrer dans le détail des conséquences qu'elle indique, il faut établir par l'expérience les principaux caractères de ce genre de phénomènes.

Lorsqu'un rayon de lumière tombe sur la première surface d'un cristal en sortant du vide, ou de tout autre milieu non cristallisé, il se réfléchit partiellement en un seul faisceau, de manière que l'angle de réflexion compté de la normale est égal à l'angle d'incidence. La force attractive ou répulsive qui émane de l'axe du cristal n'a absolument aucune influence sur ce phénomène ; car on peut tourner le cristal sur son plan dans toutes les directions possibles, sans que l'intensité ou la direction du rayon réfléchi en soit altérée. Mais il n'en est pas ainsi dans la réflexion intérieure qui s'opère à la seconde surface du cristal. Chaque rayon, en se réfléchissant sur cette surface, se divise généralement en deux faisceaux qui reviennent dans le cristal en subissant, l'un la réfraction ordinaire, l'autre l'extraordinaire.

Pour concevoir la cause de cette division, il faut savoir que les rayons réfractés, soit ordinairement, soit extraordinairement par un cristal, lorsqu'ils ont pénétré dans son intérieur à une profondeur sensible, ont acquis un certain mode d'arrangement de leurs particules, tel qu'en continuant leur route dans ce même cristal, ils ne peuvent plus se diviser ; et l'expérience prouve qu'ils ne se diviseraient pas davantage en traversant un second cristal contigu au premier, et qui aurait sa section principale dirigée dans le prolongement de la sienne. Ce mode particulier d'arrangement constitue ce que Malus a appelé la *polarisation* de la lumière. Nous le prouverons bientôt par l'expérience : pour le moment, je me borne à l'annoncer comme un fait. Maintenant, lorsque les molécules qui composent un même rayon réfracté, soit ordinaire, soit extraordinaire, s'approchent de la seconde surface d'un cristal à une distance assez petite

pour ressentir l'influence des forces réfléchissantes qui en émanent, il arrive en général qu'un certain nombre de molécules sont tournées par ces forces dans des directions différentes de celles que la réfraction leur avait données ; de sorte qu'en revenant dans le cristal par l'effet de la réflexion partielle ou totale, elles deviennent susceptibles de se diviser entre les deux réfractions, ordinaire, extraordinaire. Je dis que cela a lieu en général ; car il y a certaines positions particulières dans lesquelles les forces réfléchissantes ne troublent pas l'arrangement primitivement imprimé par la réfraction aux molécules lumineuses, et alors le rayon se réfléchit sans se diviser, ou même il échappe entièrement à la réflexion. Nous examinerons plus loin avec détail toutes ces particularités ; mais nous en pouvons faire abstraction ici, car elles influent seulement sur l'intensité du faisceau réfléchi, et non pas sur la direction qu'il prend en se réfléchissant. Un rayon qui se réfléchit simple, ou même qui sort du cristal sans se réfléchir, subirait la réflexion double, si les molécules qui le composent étaient disposées autrement, et par conséquent la direction de la réflexion est d'abord la première chose qu'il nous est nécessaire de déterminer.

Or, elle est évidemment indiquée par cette remarque que le rayon réfléchi, en rentrant dans le cristal, se comporte comme ferait un rayon venu du dehors. Soit, fig. 105, I' le point d'incidence intérieure, et O' I' le rayon incident. S'il a subi la réfraction ordinaire, construisez le rayon réfléchi ordinaire I' O'' qui fait l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence de l'autre côté de la normale I' N'; puis calculez par les formules de la page 348, direction du rayon extraordinaire I' E'' qui lui correspond en partant du point de réflexion, c'est-à-dire qui serait provenu d'un même rayon incident extérieur ; vous aurez ainsi les deux rayons réfléchis qui résultent de la division du rayon incident après la réflexion. Au contraire, ce rayon est-il extraordinaire, fig. 106, conduisez-le jusqu'au point d'incidence I' ; puis calculez par les formules de la page 348 le rayon ordinaire I' O' qui lui correspond du même côté de la normale, et celui-ci étant donné, recommencez le calcul comme précédemment ; vous

aurez les deux rayons réfléchis I′ O″, I′ E″, dans lequel se divisera le rayon donné. Généralement voici la règle : un rayon ordinaire et un rayon extraordinaire qui s'accompagnent dans leur incidence intérieure s'accompagnent encore après la réflexion.

Ce sont là les lois générales de la réflexion dans l'intérieur des cristaux, soit qu'une partie seulement des molécules lumineuses se réfléchisse intérieurement, et que le reste se réfracte au dehors, soit que l'attraction intérieure étant plus forte, toutes les molécules incidentes soient ramenées en dedans par les forces qui produisent la réfraction.

Ici, comme dans la réfraction ordinaire, l'incidence où cette réflexion totale commence à se produire dépend de la nature plus ou moins réfringente du milieu extérieur; mais nous ne pouvons pas de même en calculer la limite par la théorie, parce que nous ignorons comment la force attractive ou répulsive, qui émane de l'axe du cristal, varie près de sa surface. Il faut donc recourir à l'expérience, et déterminer le commencement de la réflexion totale par l'impossibilité d'obtenir un rayon émergent.

Effectuons d'abord ce calcul pour le cas où la surface d'émergence serait contiguë au vide, et pour rendre plus simple l'exposé des résultats, commençons par considérer seulement les rayons compris dans la section principale. Dans ce cas, on a $\varpi = 0$, d'où résulte $\varpi_1 = 0$, et nos équations générales

donnent $$\tang \theta_1' = \frac{a^2 b^2 \sin \theta}{A \sqrt{A - a^2 b^2 \sin^2 \theta}} - \frac{B}{A};$$

où il faut se rappeler que l'on a toujours

$$A = a^2 \sin \lambda + b^2 \cos^2 \lambda$$
$$B = (b^2 - a^2) \sin \lambda \cos \lambda.$$

Cela posé, pour avoir la plus grande et la plus petite valeur de l'émergence θ, fig. 107, il faut faire successivement $\theta = + 90°$; et $\theta = - 90°$, ce qui comprend toutes les émergences possibles, on aura ainsi les deux limites

$$\tang \theta_1' = \frac{a^2 b^2}{A \sqrt{A - a^2 b^2}} - \frac{B}{A}; \quad \tang \theta_1' = \frac{- a^2 b^2}{A \sqrt{A - a^2 b^2}} - \frac{B}{A}.$$

Ces deux valeurs de θ_{r}' ne sont point égales entre elles, ce qui est tout simple ; car l'axe du cristal étant en général oblique sur la face d'incidence, la force répulsive ou attractive qui en émane ne s'exerce pas également des deux côtés de la normale. Aussi l'inégalité disparaît-elle quand la position de cet axe, relativement à la normale, est symétrique ; ce qui a lieu quand on a $\lambda = 0$, ou $\lambda = 90°$; car dans l'un et l'autre cas, le terme $\frac{B}{A}$ devient nul : c'est le cas des faces perpendiculaires ou parallèles à l'axe. Généralement, sur ces faces, la réflexion extraordinaire s'opère comme la réflexion ordinaire ; l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

Déterminons ces limites pour les faces naturelles des rhomboïdes de spath d'Islande ; alors on a

$a = 0{,}6741717$; $b = 0{,}6044871$; $\lambda = 44° \, 36' \, 34''$.

et l'on trouve pour les deux limites

$$\theta_{\text{r}}' = -35° \, 31' \, 2'' \qquad \theta_{\text{r}}' = 42° \, 57' \, 57'';$$

ce qui donne des rayons incidens I′E, I‘E′, disposés comme le représente la fig. 108. La force répulsive qui agit sur I′E est moindre que celle qui agit sur I′E′. Voilà pourquoi un rayon extraordinaire tel que E′I′, tombant intérieurement sur la face d'émergence A′B′, est rejeté par la réflexion plus loin de la normale qu'il n'était d'abord, et inversement.

Pour les rayons ordinaires, la limite de leur émergence s'obtiendra d'après le rapport constant des sinus qui donnent en général

$$\sin \theta' = b \sin \theta$$

$$\sin \theta' = \pm b,$$

d'où l'on tire

$$\theta' = 37° \, 11' \, 31'', \qquad \text{ou} \qquad \theta' = -37° \, 11' \, 31''.$$

Un rayon ordinaire qui rencontrera la surface d'émergence d'un côté ou de l'autre de la normale, sous des incidences plus grandes que ces limites, ne pourra donc pas fournir de rayons émergens ordinaires. Il se réfléchira intérieurement ; mais un rayon extraordinaire qui serait compris entre ces limites et la plus grande de θ_{r}' pourrait encore sortir du cristal.

Ces phénomènes sont évidemment liés à l'existence de la

force répulsive et à la manière dont elle exerce son action. Lorsqu'un rayon ordinaire, tel que O I', arrive à la seconde face d'un cristal, sous l'incidence intérieure θ' que nous venons de calculer, on sait que les molécules qui le composent sortent de la surface réfringente jusqu'à la limite extérieure des forces attractives ; ensuite l'attraction les ramène. Si leur tendance à s'échapper était un peu plus forte, elles échapperaient à cet effort. C'est ce qui arrive aux rayons ordinaires qui se dirigent vers la surface d'émergence, en se rapprochant davantage de la perpendiculaire. Mais en même-temps qu'ils s'en rapprochent, concevez qu'ils deviennent sensibles à l'action de quelque force étrangère, qui modifie leur vitesse indépendamment de l'attraction; alors la possibilité ou l'impossibilité de l'émergence résultera de la combinaison de ces deux genres de forces, et par conséquent changera selon le mode et l'intensité de leur action. Voilà justement ce qui arrive aux rayons extraordinaires, qui sont à la fois sollicités par l'attraction ordinaire du cristal et la force répulsive ou attractive extraordinaire. De sorte que, sans pouvoir assigner la manière dont cette dernière espèce de force varie près des surfaces, nous pouvons au moins concevoir qu'elle doit y modifier les conditions d'émergence, et les rendre différentes des deux côtés de la normale, lorsque de ces deux côtés elle agit inégalement.

Maintenant, lorsqu'un rayon, soit ordinaire, soit extraordinaire, arrivera intérieurement sur la face du cristal avec une incidence plus grande que ces limites, il ne donne plus de rayons émergens dans le vide, et par conséquent on ne peut plus calculer ainsi les rayons réfléchis qui leur correspondent. Mais on les obtiendra en supposant le cristal contigu à quelque autre milieu plus réfringent; ou, ce qui revient au même, on les déduira des formules suivantes, dans lesquelles l'émergence θ est éliminée :

$$\tang \theta_1' \sin \varpi_1 = \frac{a^2 \sin \theta' \sin \varpi}{\left[A b^2 - a^2 \sin^2 \theta' (b^2 \cos^2 \varpi + A \sin^2 \varpi)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\tang \theta_1' \cos \varpi_1 = \frac{a^2 b^2 \sin \theta' \cos \varpi}{A\left[A b^2 - a^2 \sin^2 \theta' (b^2 \cos^2 \varpi + A \sin^2 \varpi)\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{B}{A}.$$

Ce sont les mêmes que nous avons trouvées page 348. Si l'on s'est donné θ' et ϖ, c'est-à-dire l'incidence intérieure et la direction d'un rayon ordinaire, on déterminera d'abord le rayon réfléchi qui y correspond, ce qui changera θ' en $-\theta'$, ϖ restant le même; puis substituant ces nouveaux angles dans les deux formules, on en déduira θ_{I}' et ϖ_{I}, c'est-à-dire l'angle de réflexion intérieure, et la direction de réflexion du rayon réfléchi extraordinairement. Si, au contraire, on s'est donné θ_{I}' et ϖ_{I}, c'est-à-dire l'incidence intérieure, et la direction d'incidence d'un rayon extraordinaire, les deux formules feront connaître θ' et ϖ, c'est-à-dire la direction du rayon ordinaire qui l'accompagne. Alors, changeant θ' en $-\theta'$, et laissant toujours à ϖ la même valeur, on aura le rayon réfléchi ordinaire qui en dérive; et enfin, remettant ces valeurs $-\theta'$ et ϖ dans les deux formules, on en déduira θ_{I}' et ϖ_{I}, c'est-à-dire les coordonnées angulaires du rayon réfléchi extraordinairement.

Ce calcul s'accorde évidemment avec la construction géométrique que nous avons d'abord indiquée. Mais on peut l'abréger en éliminant le rayon ordinaire qui sert d'intermédiaire. En effet, si l'on nomme θ_{I}'', ϖ_{I}'' les valeurs que prennent θ_{I}' et ϖ_{I} lorsqu'on a changé θ' en $-\theta'$, on aura évidemment

$$\tang \theta_{\text{I}}'' \sin \varpi_{\text{I}}'' = - \tang \theta_{\text{I}}' \sin \varpi_{\text{I}}$$

$$\tang \theta_{\text{I}}'' \cos \varpi_{\text{I}}'' + \frac{B}{A} = - \tang \theta_{\text{I}}' \cos \varpi_{\text{I}} - \frac{B}{A};$$

ce qui déterminera directement θ_{I}'' et ϖ_{I}'', lorsque θ_{I}' et ϖ_{I}' seront donnés. On voit par-là que $\tang \theta_{\text{I}}'$ infinie donne $\tang \theta_{\text{I}}''$ pareillement infinie; c'est-à-dire que, si un rayon extraordinaire tombe sur la surface intérieure d'un cristal sous une incidence de 90° comptée de la normale, le rayon réfléchi extraordinaire qui en résulte fait aussi avec cette même normale un angle de 90°.

Les relations directes que nous venons d'établir deviennent indispensablement nécessaires lorsque les rayons incidens s'approchent beaucoup d'être parallèles à la surface réfléchissante; car au-delà de certaines limites d'incidences, il arrive qu'un rayon incident ordinaire n'a plus de rayon extraordinaire qui

lui corresponde ou réciproquement ; de sorte que la réflexion est toujours simple, et de même espèce que l'incidence.

Pour en donner la preuve, cherchons par les équations de la page précédente quelle valeur il faudrait donner à l'incidence ordinaire θ' pour que l'angle de réflexion extraordinaire θ_{ι}' fût de 90°. Dans ce cas, θ_{ι}' sera aussi de 90°. La condition sera donc que tang θ_{ι}' devienne infinie, c'est-à-dire qu'on ait

$$A\,b^2 - a^2 \sin^2 \theta' (b^2 \cos^2 \varpi + A \sin^2 \varpi) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\sin \theta' = \pm \frac{b\sqrt{A}}{a\,[b^2 \cos^2 \varpi + A \sin^2 \varpi]^{\frac{1}{2}}}.$$

Il est facile de voir qu'en faisant $\sin\theta'$ plus grand que cette valeur, l'expression de tang θ_{ι}' deviendra imaginaire; ainsi toutes les fois que l'incidence ordinaire θ' sera comprise entre cette limite et la surface réfléchissante, il n'y aura plus de rayon incident extraordinaire qui puisse correspondre au rayon ordinaire ; et par conséquent il ne se formera point de rayon extraordinaire réfléchi.

Pour que le phénomène se réalise, il faut que $\sin\theta'$ soit moindre que l'unité ; car sans cela θ' serait imaginaire. Or, en mettant à la place de A sa valeur $a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda$, on voit que si $b = a$, c'est-à-dire si les deux réfractions sont égales, $\sin\theta'$ sera constamment égal à 1 ; si b surpasse a, comme cela a lieu dans les cristaux attractifs, $\sin\theta'$ sera plus grand que 1 ; enfin, si a surpasse b, comme cela a lieu dans les cristaux répulsifs, $\sin\theta'$ sera moindre que 1, et θ' sera réel. Cette dernière espèce de cristaux est donc la seule dans laquelle un rayon incident ordinaire puisse se réfléchir simple et ordinaire sous certaines incidences intérieures.

Mais, par une réciprocité remarquable, cette propriété dans les cristaux attractifs passe aux rayons extraordinaires ; c'est-à-dire qu'il y a certaines limites d'incidence intérieures au-delà desquelles un rayon extraordinaire se réfléchit simple et extraordinaire. Ce phénomène commence à se produire lorsque le rayon ordinaire correspondant devient parallèle à la surface

d'émergence, c'est-à-dire lorsqu'on a $\theta' = \pm 90°$; ce qui donne $\sin\theta' = \pm 1$, et par suite

$$\tang\theta_1' \sin\varpi_1 = \pm \frac{a^2 \sin\varpi}{[A b^2 - a^2 (b^2 \cos^2\varpi + A \sin^2\varpi)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\tang\theta_1' \cos\varpi_1 = \pm \frac{a^2 b^2 \cos\varpi}{A [A b^2 - a^2 (b^2 \cos^2\varpi + A \sin^2\varpi)]^{\frac{1}{2}}} - \frac{B}{A}.$$

Pour prendre un exemple simple, supposons que la réflexion s'opère sur une face parallèle à l'axe et dans un plan d'incidence perpendiculaire à l'axe : dans ce cas, les deux réfractions suivent la loi simple de Descartes, et l'on a

$\lambda = 90°$, $\varpi = 90°$; ce qui donne $A = a^2$, $B = 0$.

Alors les limites où la réflexion commence à être simple seront,

cristaux répulsifs $\sin\theta' = \pm \frac{b}{a}$ rayon ordinaire,

cristaux attractifs $\varpi_1 = 90°$; $\tang\theta_1' = \pm \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}$;

d'où $\sin\theta_1' = \pm \frac{a}{b}$ rayon extraordinaire.

Pour comprendre nettement la signification de ces résultats, rappelons-nous que $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}$ sont les rapports du sinus d'incidence au sinus de réfraction, tant ordinaire qu'extraordinaire, quand la lumière tombe du vide sur la face que nous considérons ici. De sorte qu'en nommant ces rapports n, n', comme nous l'avons fait dans la théorie physique de la réfraction des corps non cristallisés, nous aurons

$$n = \frac{1}{b}, \qquad n' = \frac{1}{a};$$

et, par suite, nos limites deviendront,

cristaux répulsifs... $\sin\theta' = \frac{n'}{n}$, rayon ordinaire;

cristaux attractifs... $\sin\theta_1' = \frac{n}{n'}$, rayon extraordinaire.

Ces expressions sont identiques avec celles que nous avons

trouvées page 284, pour la réflexion intérieure au contact de deux milieux inégalement réfringens, lorsque les molécules lumineuses pénètrent jusqu'à la limite des forces attractives du second milieu. Ainsi, dans les cristaux répulsifs, fig. 109, la surface extérieure étant A B, les phénomènes de réflexion intérieure que nous considérons ici se passent comme si le milieu extraordinaire, dont le rapport de réfraction est n', s'étendait depuis la surface du cristal jusques à une certaine profondeur dans sa substance, et était suivi par le milieu ordinaire dont le rapport de réfraction est n. En effet, n' étant moindre que n, les rayons mus dans le milieu ordinaire commenceraient à y être ramenés par la réfraction, lorsque le sinus de l'incidence intérieure serait $\frac{n'}{n}$, auquel cas ils pénétreraient jusqu'à la limite des forces attractives du second milieu. Alors le rayon ordinaire O I' se diviserait encore dans la partie courbe de sa trajectoire, et produirait un rayon extraordinaire I' E parallèle au milieu extraordinaire; mais pour des incidences plus considérables, l'attraction intérieure du milieu ordinaire devenant plus forte, les molécules lumineuses seraient toutes ramenées en dedans par la réfraction, et le rayon extraordinaire ne se formerait pas. Des considérations exactement pareilles s'appliquent, dans les cristaux attractifs, aux réflexions intérieures des rayons extraordinaires, fig. 110; seulement la formule indique qu'il faut alors placer près de la surface du cristal le milieu ordinaire dont le rapport de réfraction n se trouve plus faible que n'.

La même construction s'appliquerait également à toute autre face d'incidence que celle que nous avons considérée ici; seulement il faudrait, dans chaque cas, donner une valeur différente à la force réfringente du milieu extraordinaire, et il faudrait la faire agir dans son contact avec l'autre, conformément à la loi d'Huyghens. Dans l'exemple que nous avons choisi d'abord, il se trouvait que les deux réfractions s'opéraient suivant des lois pareilles; mais c'est là une circonstance particulière, et il n'y a que le principe qui soit général.

Cette succession de milieux n'est pas seulement une concep-

tion géométrique propre à représenter les résultats du calcul ; elle indique réellement le mode physique des phénomènes, et la véritable série d'actions que les molécules lumineuses éprouvent. Pour concevoir cette vérité importante, il faut se rappeler ce que j'ai annoncé au commencement de ce chapitre sur les perturbations que les molécules lumineuses éprouvent de la part des surfaces réfléchissantes dont elles s'approchent. J'ai dit que l'action de ces surfaces troublait l'arrangement régulier, ou en général la modification particulière que le rayon avait reçue dans l'intérieur du cristal, et en vertu de laquelle il ne se divisait pas. Supposons que cet effet commence à être sensible à une certaine distance de la surface que nous désignerons par la ligne A′ B′, pararallèle à A B ; alors, dans un cristal répulsif, tel que celui de la fig. 109, les molécules lumineuses qui composent le rayon ordinaire O I′ ne se diviseront point tant qu'elles n'atteindront pas cette limite. Mais une fois qu'elles y seront arrivées, et qu'elles se seront avancées un peu plus près de la surface d'émergence, elles commenceront à ressentir son influence ; et si un certain nombre d'entre elles s'y laissant entraîner, perdent la modification extraordinaire qu'elles avaient acquise, elles deviendront dès-lors sensibles à l'action répulsive qui émane de l'axe du cristal, et leur mouvement s'en trouvera modifié. Mais comme l'intervention de cette nouvelle force n'empêche pas l'attraction ordinaire des couches du cristal d'agir sur le centre de gravité des particules lumineuses, il s'ensuit qu'elles devront se réfracter exactement comme elles le feraient si elles passaient d'un premier milieu non cristallisé dans un autre qui serait doué de la double réfraction, les forces réfringentes de ces deux milieux étant les mêmes que les réfractions ordinaires et extraordinaires du cristal que l'on considère ; et tel est en effet le résultat auquel les formules nous ont conduit. Elles nous apprennent, en outre, que, pour acquérir la modification qui constitue l'état extraordinaire, les molécules lumineuses ont besoin de pénétrer le milieu extraordinaire jusqu'à une certaine profondeur, plus grande que la sphère d'activité de ses forces attractives ; car,

lorsqu'elles s'avancent seulement jusqu'à cette limite, elles reviennent dans le milieu ordinaire, sans posséder aucune nouvelle modification. A plus forte raison n'en acquièrent-elles aucune, lorsque leur incidence, comptée de la normale, devient plus grande, puisqu'alors leur réflexion s'opère encore plus loin de la surface réfléchissante; et c'est pourquoi, dans tous ces cas, les rayons, en se réfléchissant, ne se divisent point. Des considérations absolument pareilles s'appliquent de même aux cristaux attractifs ; seulement, dans ce cas, le milieu extraordinaire étant plus réfringent que l'autre, doit être placé intérieurement, afin que les rayons puissent être ramenés en dedans par l'excès de son énergie ; c'est-à-dire que le phénomène de la réflexion simple et totale ne pourra avoir lieu que pour des rayons incidens extraordinaires, comme, en effet, les formules nous l'ont indiqué.

De plus, l'alternative de réfraction que les rayons éprouvent étant uniquement déterminée par les modifications nouvelles que leur impriment les forces émanées des surfaces réfléchissantes, s'il arrivait que, dans certaines positions de ces surfaces, elles ne changeassent point l'état primitif des rayons, il est évident qu'ils devraient continuer leur route, soit ordinaire, soit extraordinaire, sans se diviser. C'est en effet ce que l'expérience confirme, comme nous le verrons plus loin.

Enfin, comme l'action des forces réfléchissantes paraît en général s'étendre beaucoup au-delà des forces attractives qui produisent la réfraction, il s'ensuit que les changemens de réfraction que nous venons d'examiner, se produiront à une distance de la surface d'émergence plus grande que la limite intérieure des forces attractives, puisqu'elle s'étend jusqu'à celle des forces réfléchissantes elles-mêmes. Nous verrons plus loin cette remarque confirmée par des phénomènes très-curieux.

La discussion dans laquelle nous venons d'entrer prouve avec évidence que la construction trouvée par Huyghens représente parfaitement tous les phénomènes de la double réfraction. C'est ce qu'il avait lui-même montré en l'appliquant à un grand nombre de coupes faites dans des morceaux de spath

d'Islande, et calculant numériquement la marche des rayons. Selon ses observations, le grand axe de l'ellipsoïde que nous avons nommé $2a$ est au petit axe que nous avons nommé $2b$, comme 105032 est à 93410; en outre, il assigne pour la constante de la réfraction ordinaire le rapport de 5 à 3, ce qui donne $b = \frac{3}{5} = 0.600$, et par suite $a = 0,6746$. Ces nombres s'accordent parfaitement avec ceux de Malus, et il en est ainsi de tous les autres qu'a donnés Huyghens. On peut donc s'étonner que Newton ait méconnu la justesse de cette théorie. Mais c'est qu'Huyghens, quoique l'ayant probablement déduite de l'expérience, l'avait liée à des idées hypothétiques qui répugnaient à la philosophie sévère de Newton. C'est M. Wollaston qui le premier a senti l'importance de cette loi, et reconnu son exactitude. Malus a depuis confirmé cette importante remarque; et la découverte d'Huyghens, liée par M. Laplace aux principes de la mécanique, est aujourd'hui la base de toutes nos recherches sur la double réfraction.

CHAPITRE V.

Construction des Micromètres à doubles images.

M. Rochon a fait servir la double réfraction des cristaux à la mesure des petits angles d'une manière trop utile à l'astronomie et à la physique pour qu'elle ne trouve pas place ici.

Concevons deux prismes A, B, fig. 111, formés d'un même cristal, et taillés de manière que, dans le premier A, la face extérieure AB soit perpendiculaire à l'axe AA′ du cristal, tandis que, dans le second prisme, cet axe est l'intersection commune des deux faces A′B, A′B′. Supposons les deux prismes égaux entre eux pour les dimensions de leurs parties et les grandeurs de leurs angles. Enfin, mettons-les en contact parfait l'un avec l'autre, en opposant leurs angles réfringens, comme le représente la figure, de manière que leur assemblage forme une plaque à faces extérieures parallèles. Puis considérons un rayon incident LI, dirigé perpendiculairement sur la surface du premier prisme, et voyons ce qui lui arrivera.

D'abord, dans tout l'intérieur du premier prisme, le rayon continuera sa route en ligne droite sans se diviser. Il ne sera point brisé par la première surface, puisqu'il lui est perpendiculaire; il ne se divisera point dans le prisme, puisqu'il est parallèle à l'axe du cristal, et qu'ainsi la force, soit répulsive, soit attractive, est nulle pour lui.

Le rayon arrivé en I′ à la surface commune des deux prismes, que nous supposons contigus l'un à l'autre, se divisera en deux faisceaux en entrant dans le second prisme. Le faisceau ordinaire ne sera point dévié, puisqu'il passe d'un milieu dans un autre de même force réfringente; il continuera sa route en ligne droite, et sortira perpendiculairement par la seconde face A′B′. Il se retrouvera ainsi sur le prolongement de sa direction

primitive. Mais il n'en sera pas de même du faisceau extraordinaire. En effet, celui-ci a son entrée dans le second prisme, et ressentant les effets de la force attractive ou répulsive, sort réellement d'un milieu où le rapport de réfraction est $\frac{1}{b}$, pour passer dans un autre où ce rapport est $\frac{1}{a}$; car, d'après la manière dont est coupé le second prisme, la réfraction extraordinaire y suit pareillement la loi simple de Descartes. Nommons donc θ l'angle d'incidence N′ I′ I, et $\theta_1{}'$ l'angle de réfraction N″ I′ I″, comptés l'un et l'autre à partir de la normale à la surface commune des deux prismes, on aura évidemment

$$\sin \theta_1{}' = \frac{a}{b} \sin \theta.$$

Si $a = b$ il vient $\theta_1{}' = \theta$, c'est le cas du rayon ordinaire qui poursuit sa route en ligne droite. Si a surpasse b, comme cela a lieu dans les cristaux répulsifs, $\theta_1{}'$ sera plus grand que θ, et le rayon réfracté extraordinairement s'écartera plus de la normale que le rayon ordinaire, fig. 111. Enfin, si a est moindre que b, ce qui est le cas des cristaux attractifs, $\theta_1{}'$ sera moindre que θ, et le rayon réfracté extraordinairement s'approchera de la normale plus que le rayon ordinaire, fig. 112. Comme nous avons supposé l'incidence extérieure perpendiculaire à la surface du premier prisme, si l'on représente l'angle réfringent A B A′, B A′B′ par ε, θ sera égal à ε, et la valeur de $\theta_1{}'$ deviendra

$$\sin \theta_1{}' = \frac{a}{b} \sin \varepsilon.$$

Maintenant le rayon extraordinaire I′ I″, continuant sa route dans l'intérieur du second prisme, arrive à la surface d'émergence A′ B′; et si l'on suppose qu'il sorte dans le vide, en nommant son incidence intérieure $\theta_2{}'$, et son émergence $\theta_3{}'$, on aura encore

$$\sin \theta_2{}' = a \sin \theta_3{}';$$

mais, de plus, les angles $\theta_1{}'$ et $\theta_2{}'$, sont liés entre eux par la relation

$\theta_2{}' = \theta_1{}' - \varepsilon$ si le cristal est répulsif, fig. 111.

$\theta_2{}' = \varepsilon - \theta_1{}'$ s'il est attractif, fig. 112.

De sorte qu'en chassant θ_2' au moyen de cette valeur, on aura θ_3' par le système des deux équations

$$\sin\theta_1' = \frac{a}{b}\sin\varepsilon \quad a\sin\theta_3' = \sin(\theta_1' - \varepsilon) \quad \text{cristaux répulsifs ;}$$

$$\sin\theta_1' = \frac{a}{b}\sin\varepsilon \quad a\sin\theta_3' = \sin(\varepsilon - \theta_1') \quad \text{cristaux attractifs.}$$

Nous avons supposé les deux prismes immédiatement contigus entre eux ; mais comme ce contact parfait ne pourrait jamais s'obtenir dans la pratique, on colle les deux surfaces l'une à l'autre, au moyen d'une couche d'huile de térébenthine épaissie, ou de mastic en larmes, substances transparentes, dont la force réfringente est à peu près égale à celle du crownglass. Comme on fait cette couche très-mince, en pressant le plus possible les deux prismes l'un contre l'autre, on peut supposer qu'elle a ses deux surfaces parallèles. Alors le rayon ordinaire II', en traversant cette couche; éprouve à son entrée, et à sa sortie, des réfractions égales et exactement contraires; de sorte qu'il reprend sa direction primitive quand il a pénétré dans le second prisme ; par conséquent le rayon extraordinaire qui l'accompagne, prend, de son côté, la même direction que s'il avait pénétré immédiatement dans ce second prisme, sans passer par la couche intermédiaire; aussi, en recommençant le calcul pour ce nouveau cas, et suivant toutes les inflexions que chaque rayon éprouve, on parvient encore aux mêmes formules que nous avons trouvées plus haut pour déterminer l'émergence θ_3'. La couche interposée n'a proprement d'autre effet que de déterminer, par sa force attractive, la sortie des rayons du premier prisme, et leur entrée dans le second, sous des incidences où ces phénomènes seraient impossibles, s'il fallait que le rayon, pour aller d'un prisme à l'autre, commençât par ressortir dans l'air.

Puisque le rayon ordinaire, après sa sortie du second prisme, conserve sa direction primitive, tandis que l'autre s'en est écarté, il est évident qu'un œil placé en O, fig. 111, sur le prolongement du premier de ces rayons, ne pourrait pas recevoir le second en même temps; mais si par le point O l'on mène une ligne

parallèle au rayon émergent extraordinaire E I″, et si l'on conduit cette ligne à travers les deux prismes, selon les lois de la réfraction extraordinaire, ce qui donnera un rayon émergent perpendiculaire à la surface du premier prisme, il est évident que cette ligne indiquera la direction d'un rayon incident parallèle au premier que nous avons considéré, et tel que le rayon extraordinaire qui en dérivera viendra passer par le point O, où l'observateur se trouve, tandis que le rayon ordinaire qui l'accompagne n'y parviendra pas; donc, si l'objet L est assez éloigné pour envoyer ces deux rayons incidens parallèles, ou seulement sensiblement parallèles, l'observateur placé en O verra deux images, l'une ordinaire, l'autre extraordinaire, mais provenant de faisceaux incidens divers. Si les prismes sont formés d'un cristal répulsif, fig. 111, l'image extraordinaire sera moins réfractée que l'autre par le second prisme, et elle paraîtra conséquemment rejetée vers la base BB′; au contraire, si les prismes sont formés d'un cristal attractif, fig. 112, cette image extraordinaire sera plus réfractée que l'image ordinaire, et elle paraîtra plus éloignée de la base du second prisme. Ainsi, lorsque l'on aura construit un assemblage de deux prismes pareils, faits avec un cristal quelconqne, on reconnaîtra à ce caractère si le cristal est attractif ou répulsif. Je donnerai bientôt d'autres moyens plus simples, mais moins directs, pour parvenir au même but.

Mais comment distinguer, entre les deux images, celle qui est ordinaire, celle qui est extraordinaire? Pour le savoir, il n'y a qu'à appliquer la première surface AB sur une glace verticale, par exemple, sur un des carreaux d'une fenêtre, et chercher dans les environs quelque objet terminé par une arête rectiligne tellement située, que les rayons qui en émanent arrivent à la vitre presque perpendiculairement. Une arête de toit, parallèle à la fenêtre où l'on opère, remplit très-bien cette condition; alors, en la regardant à travers le double prisme, vous la verrez doublée; mais si vous faites tourner celui-ci sur lui-même, sa première surface AB restant toujours appliquée contre la vitre, vous trouverez une position telle, qu'une des

deux images réfractées formera exactement le prolongement de l'image directe, vue à travers la vitre seule. Ce sera donc là l'image ordinaire; car si les deux prismes sont taillés exactement sous le même angle, comme tous nos calculs le supposent; les rayons émergens ordinaires doivent redevenir parallèles aux rayons incidens, et eux seuls jouissent de cette propriété. L'autre image, qui sera déviée, sera donc extraordinaire; il ne restera qu'à observer si elle paraît rejetée vers la base ou le tranchant du second prisme. Dans le premier cas, le cristal sera répulsif, dans le second, attractif. Une autre propriété caractérise aussi l'image ordinaire, c'est d'être parfaitement *achromatique*, c'est-à-dire, exempte de coloration; en effet, les rayons qui la forment n'éprouvent pas plus de décomposition que s'ils avaient traversé une plaque à faces parallèles. Il n'en est pas de même des rayons extraordinaires. Ceux-ci éprouvent une décomposition de couleurs, parce que leurs réfractions successives ne sont pas compensées l'une par l'autre, et aussi l'image extraordinaire n'est jamais achromatique.

Pour donner une application de nos formules, supposons les deux prismes en cristal de roche : dans ce cas, il faudra prendre

$$a = 0{,}641776 \qquad b = 0{,}645813\,;$$

et si l'on suppose successivement l'angle réfringent ε de 45°, 60°, 80° et 90°, on trouvera

Valeur de l'angle réfringent ε	Angle de réfraction dans le 2e prisme θ_1'	Incidence sur la face de sortie $\varepsilon - \theta_1'$	Angle d'émergence à la 2e surface θ_3'
45°	44° 38′ 35″	0° 21′ 25″	0° 33′ 22″
60	59 23 7	0 36 53	0 57 28
80	78 8 23	1 51 37	2 53 57
90	83 35 25	6 24 35	10 1 3

On voit que l'angle d'émergence θ_3' va toujours en augmentant, à mesure que l'angle réfringent ε s'ouvre davantage. Il s'éleverait jusqu'à 10° 1′, 3″, si ε pouvait être de 90°.

On avait cru long-temps que les prismes de cristal de roche, ainsi combinés, ne pouvaient donner qu'un écart de 30′ ou au plus de 40′. Malus avait fixé pour limite 28′ ; mais cela venait de ce que l'on supposait toujours les prismes séparés par une couche d'air. Cette couche n'influait pas sur la direction que les rayons pouvaient prendre une fois qu'ils étaient entrés dans le second prisme ; mais son peu de force réfringente mettait un obstacle à leur sortie du prisme antérieur, et le calcul donnait pour limite de l'angle celle qui permettait au rayon de sortir de ce prisme dans l'air. Le raisonnement et l'expérience m'ont fait voir que cette limitation n'était pas fondée.

Si l'on voulait faire les mêmes calculs pour le spath d'Islande, il faudrait prendre

$$a = 0,6741717 \qquad b = 0,6044871\ ;$$

mais alors a surpassant b, la valeur de l'angle réfringent ε est limitée par la condition que θ_1' puisse être réel, c'est-à-dire, que le rayon extraordinaire puisse se former dans le second prisme ; la limite s'obtiendrait, en supposant θ_1' égal à 90°, ce qui donnerait

$$\sin \varepsilon = \frac{b}{a}.$$

En calculant cette valeur pour le spath d'Islande, d'après les valeurs de a et de b, que nous venons de donner, on trouve

$$\varepsilon = 63^\circ\ 43'\ 10''.$$

Ainsi, un assemblage de deux prismes de spath d'Islande taillés sous cet angle ou sous un angle plus considérable, dans les directions que nous avons d'ailleurs assignées, étant présenté aux rayons extérieurs sous l'incidence perpendiculaire, ne laisserait pénétrer dans le second prisme aucun rayon extraordinaire ; il les rappellerait dans le premier prisme : et par conséquent un pareil système offrirait le singulier contraste d'un corps réfractant simplement la lumière par un excès de double réfraction.

Supposons en général que, pour un système donné de deux prismes, on ait déterminé d'une manière quelconque l'angle

constant formé par les deux rayons émergens ordinaire, extraordinaire, qui proviennent d'un même rayon incident perpendiculaire à la première surface. Si l'on prolonge ces deux rayons jusqu'à leur rencontre commune, en un certain point *c*, fig. 113, on pourra les considérer comme les branches d'un compas dont l'ouverture est déterminée et le sommet connu. Si l'on a un disque circulaire dont on veuille connaître le diamètre, il suffira de le placer entre ces deux branches, et de l'y faire glisser jusqu'à ce qu'il les touche; alors on pourra calculer son diamètre d'après sa distance au sommet de l'angle. L'opération sera d'autant plus exacte, que l'angle sera plus petit; car alors une très-petite différence dans le diamètre du disque en produira de fort grandes dans le lieu du contact.

M. Rochon a fait une application très-ingénieuse de ce procédé à la mesure des diamètres apparens des corps célestes. Pour cela, il introduit le système des deux prismes dans l'intérieur d'une lunette astronomique. Soit, fig. 114, A l'objectif de cette lunette, A F son axe, F son foyer, S S′ un objet très-éloigné, dont je suppose que le premier bord S se trouve précisément sur le prolongement de l'axe A F. Le pinceau des rayons émanés de S, et qui couvre la surface de l'objectif, est concentré par lui au foyer F sur l'axe même de ce pinceau, et y donne une image lumineuse du point S. Le pinceau émané de S′, étant rassemblé de même sur le prolongement A F′ de son axe, donne en F′ une petite image du point S′; et un effet pareil s'opérant sur tous les autres pinceaux qui émanent des points rayonnans intermédiaires, la série des foyers forme en F F′ une petite image de l'objet. De plus, si l'angle F A F′ ou S A S′ sous-tendu par l'objet est fort petit, et si l'objet lui-même est très-éloigné, tous les points de l'image se trouvent sensiblement à la même distance de l'objectif A; de sorte qu'on peut la considérer dans la figure comme une petite ligne droite perpendiculaire à l'axe A F de l'objectif. Cela posé, si l'on désigne par F la distance focale A F, et par Δ l'angle F A F′, ou son égal S A S′, qui mesure le diamètre apparent de l'objet vu du point A, la grandeur F F′ de l'image sera F tang Δ. Ceci bien entendu, plaçons entre l'objectif et le foyer notre appareil à double image, de

manière que sa première surface soit perpendiculaire à l'axe AF, fig. 115. Cela ne changera pas sensiblement la grandeur de l'image FF′, du moins si les surfaces extérieures de l'appareil sont bien parallèles. Mais il est évident qu'il en résultera deux images au foyer. En effet, chaque rayon incident AF, AF′ se divisera en entrant dans le second prisme, et donnera un rayon émergent extraordinaire cf, $c'f'$ qui prendra la direction d'émergence assignée par la double réfraction. De plus, en se bornant à considérer les axes des faisceaux, les points cc' où s'opère la divergence pour chaque axe seront fixes dans l'appareil prismatique, à quelque distance de l'objectif qu'on le place, et les angles de déviation Fcf, F′$c'f'$ le seront également. D'où l'on voit que, si l'on éloigne l'appareil prismatique du foyer, l'image extraordinaire qui reste toujours dans le plan FF′ s'écartera de l'image ordinaire, et au contraire elle s'en rapprochera, si l'on rapproche l'appareil prismatique du foyer. Enfin, lorsque ce mouvement ira jusqu'à amener les points cc' sur la ligne FF′ dans le foyer même, les rayons émergens, soit ordinaires, soit extraordinaires, provenant d'un même pinceau, divergeront ensemble à partir du même point, et ne produiront sur l'œil que l'effet d'un seul point rayonnant; de sorte que les deux images coïncideront exactement dans toutes leurs parties.

En partant de cette position, si l'angle de déviation Fcf surpasse FAF′, c'est-à-dire le diamètre apparent du disque, il y aura une situation de l'appareil, comprise entre A et F, pour laquelle les deux images FF′, ff' seront exactement en contact fig. 116. Dans ce cas, l'image ordinaire FF′ se trouve exactement comprise entre les deux branches de l'angle Fcf, qui exprime la déviation constante produite par la réfraction extraordinaire, et que nous nommerons C. Donc, si la distance cF du sommet de l'angle au foyer F est alors égale à D, la grandeur de l'image FF′ sera exprimée par D tang C. Mais en regardant cette même image comme la base du triangle FAF′ dont la hauteur est F, nous avons trouvé pour son expression F tang Δ, Δ étant l'angle FAF′, c'est-à-dire le diamètre apparent de l'objet.

On aura donc, en égalant cette expression à la précédente,

$$F \operatorname{tang} \Delta = D \operatorname{tang} C, \quad \text{et par suite} \quad \operatorname{tang} \Delta = \frac{D \operatorname{tang} C}{F}.$$

Lorsque Δ et C sont très-petits on a plus simplement

$$\Delta = \frac{D C}{F}.$$

Dans tous les cas, on voit que si l'on peut déterminer D, C et F, on connaîtra aussitôt le diamètre apparent Δ de l'objet.

La distance D se mesure par le moyen d'une division longitudinale tracée sur le dehors du tuyau de la lunette. Ce tuyau est fendu dans le sens de sa longueur, pour qu'on puisse à volonté faire marcher le système des deux prismes depuis l'objectif jusqu'au foyer. On commence d'abord par déterminer sa position dans le second cas. Pour cela, on dirige la lunette sur une mire circulaire ou sphérique fort éloignée, et on amène les prismes vers l'œil, jusqu'à ce que les deux images formées au foyer coïncident exactement ensemble. On lit alors le point de la division latérale auquel répond l'index que l'appareil prismatique entraîne avec lui; ce point est le zéro à partir duquel les distances D doivent être comptées. Supposons qu'il réponde sur la division au numéro m; lorsque ensuite on observe un objet quelconque, et qu'on a amené les images au contact, on observe de nouveau le point de la division où répond l'index de l'appareil prismatique. Je suppose que ce soit au numéro m'; alors on a évidemment $m' - m = D$.

Quant au coefficient $\frac{\operatorname{tang} C}{F}$, comme il est constant dans chaque lunette, lorsque l'on emploie toujours le même appareil prismatique, on le détermine une fois pour toutes, en observant un objet dont le diamètre apparent est connu. Cela est plus exact que d'en mesurer les élémens séparés. Pour cet effet, l'on emploie, comme dans l'expérience précédente, une mire circulaire ou sphérique d'un diamètre connu $2r$, placée à une distance R que l'on mesure directement ou que l'on détermine

par une opération trigonométrique. Si l'on nomme (Δ) le diamètre apparent MOM' que sous-tend cette mire vue de la distance R, fig. 117, on aura évidemment

$$\sin \tfrac{1}{2} (\Delta) = \frac{r}{R}.$$

De sorte que, par le calcul, on peut déterminer (Δ). Cela fait, on observe la même mire à travers la lunette prismatique, en plaçant l'objectif au point O, et lorsqu'on a amené les deux images au contact par le mouvement des prismes, on mesure sur la division latérale la distance (D); alors les quantités (Δ) et (D) doivent évidemment satisfaire à la relation trouvée plus haut entre elles, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$\text{tang}\,(\Delta) = (D)\,\frac{\text{tang}\,C}{F}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\text{tang}\,C}{F} = \frac{\text{tang}\,(\Delta)}{(D)}.$$

Ce coefficient étant ainsi connu, on aura la valeur de Δ dans toute autre expérience, au moyen de la formule

$$\text{tang}\,\Delta = D\,.\,\frac{\text{tang}\,C}{F}, \qquad \text{ou} \qquad \text{tang}\,\Delta = D\,.\,\frac{\text{tang}\,(\Delta)}{(D)}.$$

Cette formule donne $\Delta = 0$, quand D est nul. En effet, il faudrait que l'objet fût réduit à un point mathématique, pour que le contact de ses deux images ne pût s'obtenir qu'en amenant l'appareil au foyer même. A mesure que le sommet c s'éloigne du foyer, D augmente, ainsi que Δ, et le contact des images mesure des diamètres apparens plus considérables. Enfin, quand le point c coïncide avec l'objectif même, D devient égal à F, et l'on a $\Delta = C$, c'est-à-dire que le diamètre apparent est égal à toute la déviation C que le système des deux prismes peut produire. C'est aussi la limite des mesures que l'on peut prendre avec ce système, puisque, devant être compris entre le foyer et l'objectif, D ne peut jamais surpasser F.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le premier bord F de l'image ordinaire FF' se trouvait précisément sur l'axe de l'objectif à l'instant où l'on observe le contact. Cette condition est indispensable pour que le rayon incident AI, qui, après sa division embrasse l'image ordinaire, traverse l'appa-

reil prismatique perpendiculairement à ses surfaces extérieures, seul cas que nous ayons considéré jusqu'à présent. Mais si l'objet observé est un astre auquel son mouvement fera successivement parcourir tout le champ de la lunette, que devra-t-il en résulter? C'est qu'alors, mathématiquement parlant, la valeur de l'angle C ne sera plus constante dans les diverses périodes de son passage. Si ces variations sont insensibles, ce qui arrive lorsque les angles réfringens des prismes sont fort petits, on pourra établir le contact des deux images dès que l'astre entrera dans le champ de la lunette, et il subsistera dans toute l'étendue du champ; mais, en augmentant beaucoup l'ouverture des prismes et la déviation qui en est la conséquence, l'angle C commencera à varier sensiblement pour les diverses incidences que permet le champ de la lunette, et les images, une fois mises en contact, se sépareront en le traversant. Pour éviter cet inconvénient, M. Rochon a imaginé de substituer aux doubles prismes d'un grand angle un assemblage de plusieurs prismes pareils, mais chacun d'un très-petit angle, et collés les uns aux autres de manière que toutes les sections principales coïncident exactement sur la même direction. En effet, dans un pareil système, la séparation des rayons augmente avec le nombre des doubles prismes, et l'effet de la variation des incidences sur l'écart des images est beaucoup moins sensible que dans un seul double prisme qui donnerait un écart égal; c'est ce dont il est aisé de se rendre raison par la théorie. Mais il faut le plus grand soin pour que la superposition soit faite exactement suivant les sections principales, afin que les images ne se multiplient pas au-delà de deux, et il faut aussi prendre certaines précautions dans la taille des prismes, pour qu'elles ne soient pas colorées. C'est ce que nous expliquerons par la suite.

Dans tout ce qui précède, nous avons raisonné comme si l'on observait à l'œil nu les images FF′, ff' que l'objectif forme à son foyer. Généralement, on regarde ces images à travers une loupe, ou un système de loupes disposé de manière à les agrandir sans cesser de les faire voir nettement. Ce système se nomme *l'oculaire*, parce qu'on le place près de l'œil, de

même que le premier verre de la lunette s'appelle *l'objectif*, parce qu'il se place du côté des objets. Mais par cela même que l'action de l'oculaire est postérieure à la formation des doubles images, on comprend qu'il ne peut influer en rien sur l'existence ou la non-existence de leur contact, dont il permet seulement de juger avec plus de précision. Ainsi tous les raisonnemens que nous avons faits, en supposant l'œil nu, s'appliquent également à l'œil armé d'un oculaire; et c'est pourquoi nous n'avons pas tenu compte de cette modification dans l'exposé des résultats.

La lunette prismatique peut encore servir à mesurer l'éloignement des objets dont on connaît la grandeur. En effet, si l'on nomme $2r$ leur diamètre, R leur distance au point d'où on les observe, et Δ leur diamètre apparent, on aura, comme précédemment

$$\sin \tfrac{1}{2}\Delta = \frac{r}{R}.$$

Si l'on n'applique la méthode qu'à de petits angles, comme c'est le cas ordinaire, on pourra substituer $\frac{1}{2}\Delta \sin 1''$ à $\sin \frac{1}{2}\Delta$; et alors, en tirant la valeur de Δ, on aura

$$\Delta = \frac{2r}{R \sin 1''}.$$

Or, nous avons vu que le diamètre apparent Δ peut se déterminer d'après l'observation du contact des images, au moyen de la formule

$$\tang \Delta = \frac{D \tang C}{F}, \quad \text{qui devient ici} \quad \Delta = \frac{D \tang C}{F \tang 1''}.$$

Substituant donc pour Δ sa valeur, et dégageant R, on aura

$$R = \frac{2r}{D} \cdot \frac{F \tang 1''}{\tang C \sin 1''}, \quad \text{ou simplement} \quad R = \frac{2r}{D} \cdot \frac{F}{\tang C};$$

car $\sin 1''$ et $\tang 1''$ diffèrent si peu l'un de l'autre, qu'on peut négliger leur différence. Ici, comme dans la mesure des diamètres apparens, il ne restera d'inconnu que le coefficient constant $\frac{F}{\tang C}$, et on le déterminera de la même manière, en observant le contact des deux images d'un objet dont on connaîtra la grandeur et la distance; car, dans ce cas, on aura $2r$, R, et on lira D sur la division de l'instrument.

Supposons que le coefficient $\frac{F}{\text{tang}\,C}$, déterminé de cette manière, se trouve égal à N mètres. Exécutons la division longitudinale de manière que chacune de ses parties vaille $\frac{N}{100000}$; alors si, dans l'observation d'un objet, on est obligé de faire D égal à n parties pour obtenir le contact des images, on aura

$$D = \frac{nN}{100000}, \quad \text{et par suite} \quad R = 2r \cdot \frac{100000}{n}.$$

Si l'appareil ne s'est éloigné du foyer que d'une partie, n sera égal à 1, et la distance R égalera 100000 fois la grandeur de l'objet. Si $n = 2$, R vaudra 50000 fois l'objet, et ainsi de suite. Généralement, on voit que le diamètre $2r$ de l'objet est toujours multiplié par un très-grand nombre pour former la valeur de R, et par conséquent les petites erreurs qu'on peut commettre en évaluant ou en mesurant les dimensions de l'objet se trouveront extrêmement agrandies dans la valeur de sa distance. Ce procédé n'est donc pas applicable aux opérations qui demandent de l'exactitude, d'autant plus que l'inégale distance des objets, allongeant ou raccourcissant le foyer de l'objectif, l'éloigne ou le rapproche du sommet de l'angle prismatique; ce qui est une grande source d'incertitudes : mais ce moyen peut être employé commodément à la guerre pour des reconnaissances dans lesquelles on ne cherche qu'une approximation; alors, en prenant pour objet des hommes d'une taille moyenne, ou un mât de vaisseau d'une hauteur à peu près connue, on saura tout de suite, au moyen de la lunette prismatique, quel est leur éloignement.

De quelques apparences singulières produites par la double Réfraction.

Lorsqu'on regarde de petits objets à travers un rhomboïde de spath d'Islande, la disposition des deux images présente quelques singularités qui sont autant de conséquences de la théorie. Elles n'avaient pas échappé à Huyghens, qui les a toutes discutées.

Comme elles pourraient embarrasser les personnes peu habituées à ce genre de considérations, je crois devoir les indiquer brièvement.

Soit, fig. 118, L le point rayonnant, S l'œil que, pour plus de simplicité, je supposerai dans le plan de la section principale A B A′ B′ du rhomboïde, cherchons dans ces circonstances comment la vision pourra s'opérer.

D'abord, ici comme à travers tout autre corps diaphane, à faces parallèles, il y aura un rayon ordinaire qui pourra parvenir à l'œil. Soit L I I′ ce rayon ; à son entrée en I par la première face du rhomboïde, il produira un rayon extraordinaire $II_{,}'$: mais celui-là ne pourra pas parvenir à l'œil. Pour s'en assurer, il n'y a qu'à mener par le point d'incidence I la ligne I A, parallèle à l'axe du rhomboïde. La force émanée de cet axe repoussant les molécules lumineuses, il faut bien que celles qui lui cèdent s'éloignent au-delà du rayon ordinaire, et qu'elles prennent, par exemple, la route $II_{,}'$. Mais arrivées en $I_{,}'$, à la seconde surface, elles doivent sortir parallèlement à leur direction primitive L I : il en résultera donc un rayon $I_{,}'S'$, qui, étant parallèle à I S, ne peut passer par le point S où est placé l'œil. A plus forte raison démontrerait-on la même chose de tout autre rayon extraordinaire provenant de rayons incidens qui s'approcheraient davantage de l'angle obtus A′.

L'image extraordinaire sera donc donnée par des rayons incidens qui s'écarteront de L I dans le sens contraire, c'est-à-dire, en se rapprochant de l'angle solide B′. Parmi ceux-ci, il s'en trouvera un, tel que L*i*, dont le faisceau ordinaire ne pourra pas parvenir à l'œil, mais dont le faisceau extraordinaire $ii_{,}'$ pourra y parvenir après son émergence ; de sorte que l'œil recevra deux images, l'une ordinaire suivant S I′; l'autre extraordinaire, suivant $Si_{,}'$; et la première paraîtra toujours plus voisine que l'autre du petit angle solide B′. Si l'on se donnait les positions de l'œil et du point rayonnant relativement au rhomboïde, on pourrait aisément calculer les directions de ces deux rayons, en prenant pour inconnues les angles d'incidence et d'émergence qu'ils forment avec les deux faces d'entrée et de

sortie. Car, pour chaque rayon, soit ordinaire, soit extraordinaire, ces angles doivent être égaux entre eux. Mais le résultat étant de pure curiosité, il nous suffira d'avoir indiqué la marche générale. On peut confirmer le croisement de ces rayons dans l'intérieur du rhomboïde par une expérience fort simple que M. Monge a imaginée. Les choses étant disposées comme le représente la figure précédente, passez lentement une carte sur la face A′ B′, située du côté du point rayonnant ; quand elle sera parvenue à i, elle interceptera le rayon incident Li, qui donne l'image extraordinaire. Vous verrez donc alors disparaître le rayon émergent S$i_{\prime}'$, quoique, selon la direction dont il semble provenir, on s'attende à voir disparaître d'abord le rayon S I′. Afin que cette antériorité soit bien marquée, il faut faire l'expérience sur des pinceaux lumineux très-minces, tels qu'on les obtient, par exemple, en recevant la lumière des nuées à travers un petit trou L percé dans une carte. Il faut, en outre, placer l'œil tout près du rhomboïde, ce qui agrandit l'angle S, et s'éloigner à une assez grande distance du point L d'où les rayons émanent. Car plus ce point s'approche de la surface du rhomboïde, plus le point K, où les rayons se croisent, s'approche aussi de cette surface; mais quelque près qu'on suppose L, pourvu qu'il soit hors du cristal, de manière que les formules d'Huyghens s'appliquent aux rayons lumineux qui en émanent, l'intersection des deux rayons s'opère dans l'intérieur du rhomboïde; et par conséquent, le phénomène que nous venons de décrire continue d'avoir lieu, quoique avec des écarts divers.

Dans le cas particulier où le point rayonnant et l'œil sont situés sur une même droite perpendiculaire aux faces du rhomboïde, la marche des rayons est encore la même, et telle que la représente la fig. 119; alors le faisceau ordinaire est perpendiculaire aux deux faces : mais l'image extraordinaire provient encore d'un rayon incident incliné vers le petit angle solide B′. En effet, le rayon perpendiculaire L I donne un rayon extraordinaire I$I_{\prime}'$, et un rayon émergent $I_{\prime}'$ S′, également perpendiculaire aux faces du rhomboïde, par conséquent parallèle à I S′, qu'il ne peut jamais rencontrer, ou qu'il rencontrerait à l'infini. Mais si le

rayon incident LI s'incline vers le petit angle solide B′ d'une quantité infiniment petite, le rayon extraordinaire qui en proviendra aura son point d'émergence entre I′ et I_1'; de plus, il sortira du cristal parallèle à sa direction : il coupera donc I′ S en un point de son prolongement; et en suivant ce raisonnement, on voit que l'inclinaison primitive du rayon incident L*i* permettra de couper I′ S à toute hauteur.

Lorsqu'on regarde ainsi les deux images d'un point lumineux à travers un rhomboïde, quelque position qu'on lui donne d'ailleurs, l'image ordinaire paraît toujours plus rapprochée de l'œil que l'image extraordinaire; c'est encore une conséquence de la théorie.

Pour en sentir la raison, considérons la fig. 120, où L est toujours le point rayonnant, S le centre de l'œil, et S I′ le rayon ordinaire que la réfraction y amène en passant à travers le milieu A B A′B′, dont les faces opposées sont parallèles. Si l'œil n'était qu'un point mathématique, le rayon I′ S serait le seul de son espèce qui pût lui être amené; mais comme la pupille a une certaine étendue, on conçoit qu'elle devra recevoir encore un certain nombre d'autres rayons ordinaires voisins de S I′, et qui seront conséquemment donnés par des rayons incidens voisins de L I. Ces rayons, en partant de L, forment un cône qui a son sommet en L; ils en forment un autre en se réfractant dans la substance, et un autre encore en sortant de nouveau par la seconde face A B. Or, en cherchant par le calcul la distance S L″ de l'œil au sommet de ce dernier cône, quelle que soit la nature de la plaque interposée, qu'elle soit cristallisée, ou qu'elle ne le soit pas, on trouve que le point L″ est toujours plus rapproché de l'œil que le point L, et d'autant plus rapproché, que le milieu interposé réfracte davantage, parce que sa réfraction augmente la divergence des rayons émergens. Or, c'est précisément cette divergence qui nous fait juger de la distance des points lumineux et de leurs images, comme nous aurons occasion de l'expliquer dans l'optique analytique : ainsi l'image réfractée doit toujours paraître plus voisine de l'œil que l'image directe. Maintenant, dans le rhomboïde de

cristal d'Islande, il se fait ainsi deux réfractions, dont la plus forte est toujours la réfraction ordinaire, puisque la vitesse que celle-ci imprime à la lumière est diminuée dans l'autre par la force répulsive. Les images ordinaires devront donc toujours paraître les plus voisines de l'œil, du moins tant que la réfraction s'opérera à travers des faces planes, comme nous l'avons supposé : le contraire aurait lieu dans un rhomboïde qui serait formé d'un cristal attractif, parce que la réfraction extraordinaire y serait plus forte que la réfraction ordinaire.

Lorsque nous avons étudié la marche des deux réfractions dans le plan de la section principale d'un rhomboïde de spath d'Islande, nous avons vu que le rayon extraordinaire est toujours rejeté vers le petit angle solide de la seconde face. Dans ce cas, si le rayon incident est aussi dirigé vers cet angle, fig. 121, il existe une incidence sous laquelle la répulsion produite par l'axe IA′ compense exactement l'effet que les forces ordinaires tendent à produire, et le rayon extraordinaire ne se brise pas en se réfractant. Pour trouver l'incidence où ce phénomène s'opère, il faut reprendre la relation générale qui lie l'angle d'incidence θ et l'angle de réfraction extraordinaire θ_1' dans le plan de la section principale. Puis faisant dans cette équation $\theta_1' = \theta$, elle ne contient plus d'inconnue que θ. On trouve ainsi $\theta = 16^\circ\ 45'$, en partant des valeurs des axes données par Malus. Huyghens trouvait $16^\circ\ 40'$. Ce phénomène ne se produit que du côté de la normale que nous avons considéré ; car, de l'autre, la force répulsive agit dans le même sens que les forces réfringentes ordinaires, et augmente la déviation ordinaire du rayon. Mais si le cristal était attractif, ce serait de ce côté que le phénomène aurait lieu.

ANALYSE DE LA LUMIÈRE.

CHAPITRE PREMIER.

De la dispersion de la Lumière produite par la réfraction.

JUSQU'ICI nous n'avons considéré, pour ainsi dire, que les axes des faisceaux lumineux réfractés ; nous n'avons point eu égard à la *dispersion* qu'ils éprouvent en traversant les substances réfringentes. Nous allons maintenant nous occuper de ces phénomènes, dont l'analyse exacte et complète forme un des plus beaux travaux de Newton.

Lorsqu'on regarde les objets à travers un prisme réfringent, on sait que leurs images ne paraissent point à leur véritable place ; elles sont déviées vers le sommet de l'angle réfringent du prisme. Soit, fig. 122, O l'œil de l'observateur, ACB la section faite dans le prisme par un plan perpendiculaire à ses arêtes, et passant par le point O ; enfin SS' l'objet situé dans ce plan. L'image ss' se trouvera élevée vers l'angle C, parce qu'elle est vue sur la direction OR, OR', suivant laquelle les rayons lumineux sortent du prisme après avoir subi deux réfractions successives sur les faces AC, BC. Nous avons suffisamment étudié les lois de cette déviation dans les chapitres précédens, et nous avons donné les moyens de calculer la marche du rayon, soit dans le prisme, soit au-dehors.

Mais nous avons dès lors remarqué que les contours de l'image n'étaient pas tranchés et arrêtés comme ceux de l'objet ; cette image s'allonge dans le sens ss' perpendiculairement aux arêtes du prisme, et se teint des couleurs de l'arc-en-ciel. C'est cette coloration que nous allons examiner.

Pour fixer les idées, supposons que les arêtes du prisme soient disposées horizontalement, ce qui rend la ligne Ss

verticale ; admettons de plus que le sommet de l'angle réfringent du prisme soit tourné vers le haut, comme le représente la figure 122. Enfin, plaçons au-delà de l'objet un drap noir, afin d'éviter que ses rayons soient mêlés de lumière étrangère ; dans ce cas, le bord inférieur de l'image paraît constamment bordé en rouge, le bord supérieur est bordé de bleu et de violet.

Si l'on observe ainsi un corps blanc très-mince, par exemple, une épingle blanche, un fil d'argent ou de soie blanche, une bande de papier blanc très-étroite, fig. 123, placés, sur un fond noir, parallèlement aux arêtes du prisme, et si celui-ci est suffisamment réfringent, on n'aperçoit plus du tout de blanc dans l'image $s\,s'$; mais elle se trouve entièrement divisée en zones parallèles de couleurs différentes, parmi lesquelles on distingue surtout facilement trois teintes distinctes, le rouge en bas, le bleu en haut, et le vert au milieu (1). Quelle que soit la nature des substances dont on observe ainsi les images, pourvu que ces substances soient blanches, elles donnent, étant vues à travers le prisme, exactement les mêmes séries de couleurs ; et si leurs dimensions sont égales, il est absolument impossible de les distinguer.

Cherchons à analyser ce phénomène, et à voir les conséquences auxquelles il conduit. D'abord la première circonstance que nous devons remarquer, c'est la dilatation que l'image éprouve dans le sens de sa hauteur. En effet, si l'objet était une ligne droite mathématique sans largeur sensible, et si tous les rayons lumineux qui en émanent se réfractaient suivant la même proportion du sinus de réfraction au sinus d'incidence, la figure de l'image réfractée devrait être aussi une ligne droite sans largeur ; et quoiqu'on ne puisse pas rigoureusement amin-

(1) Pour bien faire cette expérience, il faut se servir d'un prisme de flintglass dont l'angle réfringent soit au moins de 60°. Alors les zones sont parfaitement colorées, tranchées et distinctes. A défaut d'un pareil prisme, on pourrait en former un avec deux glaces inclinées l'une à l'autre d'environ 60° ou davantage, et entre lesquelles on verserait de l'eau pure ou saturée d'acétate de plomb, afin d'augmenter sa force réfringente.

cir assez l'objet pour l'amener à ce terme, il est cependant aisé de voir que, lorsqu'il est très-mince, comme une épingle, par exemple, on a beau l'amincir encore, on ne change pas sensiblement la largeur de l'image observée. Il y a plus; quelle que soit la longueur S S′ de l'objet, fig. 123, si tous les rayons qu'il envoie se réfractaient à travers le prisme suivant la même proportion du sinus de réfraction au sinus d'incidence, on pourrait toujours trouver une position telle, que l'angle R O R′ compris entre les deux rayons émergens venus de ses extrémités serait précisément égal à l'angle S K S′ compris entre les deux rayons incidens dont ils dérivent, c'est-à-dire au diamètre apparent de l'objet lui-même, du moins en supposant l'objet suffisamment éloigné pour que la distance de l'observateur au prisme puisse être regardée comme nulle. La position dont nous parlons est celle dans laquelle l'angle S I A égale l'angle O R′ B. En effet, lorsque cette condition est remplie, le rayon incident S I rencontre la surface d'incidence, comme le rayon émergent O R′ rencontre la surface d'émergence. Les angles de réfraction C I R, C R′ I′, formés par ces rayons dans le prisme, sont donc aussi égaux entre eux, de même que les angles C R I, C I′ R′, et par suite encore, les angles d'émergence O R B, S′ I′ A. Ainsi, en résumant ces conséquences, une fois le prisme placé de manière que l'on ait

$SIA = OR'B$, il s'ensuit que l'on aura $S'I'A = ORB$,

pourvu que les rayons lumineux émanés des extrémités S S′ de l'objet se réfractent suivant la même loi dans le prisme. En retranchant ces deux équations membre à membre, on en tire

$$S'I'A - SIA = ORB - OR'B.$$

La différence $ORB - OR'B$ est évidemment égale à l'angle R O R′, sous lequel l'observateur voit l'image réfractée; et de même, si l'on prolonge les rayons incidens S I, S′ I′ jusqu'à leur rencontre en K, la différence des angles S I A, S′ I′ A, formés par ces rayons avec la même ligne droite A C, représentera évidemment l'angle S K S′, sous lequel un observateur placé en K verrait l'image directe. Ainsi, en supposant l'objet S S′ infiniment éloigné, ou assez éloigné pour que sa distance

soit comme infinie par rapport à la grandeur du prisme et à son éloignement du point O, il est évident que l'angle formé par les deux rayons incidens SK, S′K qui se croisent sur le prisme est sensiblement égal à l'angle SOS′ formé par les deux rayons directs menés de l'œil de l'observateur aux deux extrémités de l'objet; et comme d'ailleurs SOS′ ou SKS′ est égal à ROR′ dans la position supposée du prisme, il s'ensuit que l'image réfractée est vue sous le même angle que l'objet lui-même, pourvu toutefois que les rayons lumineux partis de cet objet se réfractent tous suivant les mêmes lois. Or, la chose est loin de se passer ainsi dans la nature; car quelque position que l'on donne au prisme, quelque inclinaison qu'on lui fasse prendre relativement aux rayons incidens, on ne peut jamais parvenir à rendre ainsi l'image réfractée égale en minceur à l'image directe, et la différence est d'autant plus sensible, que la largeur même de l'objet est moindre. Ce résultat, qui se trouvera confirmé et généralisé par toutes les expériences qui vont suivre, nous force donc nécessairement à conclure *que tous les rayons lumineux émanés des objets terrestres, ne suivent pas, en se réfractant, le même rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction.*

D'ailleurs nous avons vu que l'image de l'épingle, du fil de soie, etc., est composée de bandes parallèles dont les teintes sont différentes; nous devons donc en conclure que la réfraction est inégale pour les rayons qui produisent la sensation de ces diverses teintes; en sorte que la dilatation de l'image est produite par la diverse réfrangibilité des rayons qui produisent ces couleurs.

Cette conséquence est trop remarquable pour que nous ne cherchions pas à la vérifier directement. La chose est extrêmement facile : il suffit d'observer comparativement sous les mêmes incidences les réfractions des rayons lumineux émanés de différens corps qui nous paraissent colorés diversement, et de voir si en effet ces rayons éprouvent des déviations différentes, analogues à la nature des couleurs dont ils nous causent la sensation. Mais pour faire cette expérience de la manière la

plus concluante, il faut comparer tout de suite les couleurs qui forment les extrémités de l'image prismatique, c'est-à-dire, le bleu et le rouge ; et de plus, il faut tâcher de nous procurer ces couleurs dans leur plus haut degré de vivacité. Sous ce dernier rapport, rien n'égale l'éclat des fleurs : les mélanges artificiels des poudres colorantes ne sauraient jamais en approcher. Parmi le nombre infini de combinaisons qu'on pourrait en faire, j'en choisis deux très-convenables à notre but : la capucine, dont la couleur est un orangé mêlé d'un rouge vif, et le liseron tricolore, vulgairement appelé *belle-de-jour*, dont l'extrémité des pétales est du plus beau bleu. Je coupe de la première une bande très-mince AB, large d'environ un millimètre, et je l'attache avec deux épingles sur l'orifice ADBE, d'un tube noirci en dedans et en dehors, fig. 124. Sur cette petite bande rouge, je place un petit carré bleu du liseron tricolore, de même largeur, après avoir posé entre deux une goutte d'encre, pour empêcher la couleur rouge inférieure de percer à travers le pétale du liseron. Cette disposition faite, approchez l'appareil d'une fenêtre ouverte, et regardez la petite bande rouge à travers un prisme dont les arêtes lui soient parallèles. Si le tranchant de ce prisme est tourné en haut, de manière à élever les objets par la réfraction, il élevera aussi la petite bande rouge, mais il élevera bien davantage le petit carré bleu, de sorte que celui-ci paraîtra séparé de la bande, et laissera une tache noire sur le rouge, à l'endroit qu'il occupait. Ici donc, comme dans l'expérience précédente, les rayons de lumière qui produisent la sensation du bleu sont plus réfractés que ceux qui produisent la sensation du rouge, quoique leur incidence sur les surfaces réfringentes soit égale ; et par conséquent ce résultat confirme la conséquence à laquelle nous étions parvenus tout-à-l'heure, sur la diverse réfrangibilité des rayons lumineux qui produisent la sensation des diverses couleurs.

Je dois prévenir qu'en faisant cette expérience, il ne faut pas se placer en face de la fenêtre, mais de côté, afin que la portion de lumière qui se réfléchit régulièrement sur la surface

des petites bandes, comme sur celle de tout autre corps, ne puisse pas parvenir à l'œil. Car cette portion est toujours blanche, et se décompose dans le prisme en rayons de toutes les couleurs. Par la même raison, il convient de placer un drap noir au-delà de l'appareil, afin d'arrêter la lumière que les objets environnans pourraient envoyer. Mais malgré toutes ces précautions, quand on regarde avec beaucoup de soin l'image du petit carré bleu à travers le prisme, on y aperçoit quelques faibles traces d'un rouge de brique extrêmement sombre, qui reste au niveau de la bande rouge, et qui par conséquent éprouve la même réfraction qu'elle. Cela vient de ce qu'aucun corps de la nature n'offre des couleurs absolument simples, et la preuve en est que la plupart d'entre elles peuvent s'imiter d'une manière plus ou moins satisfaisante, par des mélanges très-divers. Le bleu des pétales du liseron tricolore, quoique très-éclatant, contient un peu de rouge : voilà ce que nous apprend l'expérience ; mais ce rouge ne forme qu'une portion extrêmement petite de sa couleur, et la séparation opérée par la réflexion entre les diverses parties de ce mélange où le bleu domine, ne fait que confirmer les résultats auxquels nous venons d'être conduits relativement à l'inégale réfrangibilité des rayons qui produisent la sensation des diverses couleurs.

Revenons maintenant à nos premières expériences sur les bandes étroites et blanches. Puisque ces bandes ont donné par réfraction des zones de diverses couleurs, il fallait donc que les divers rayons capables de les produire existassent aussi dans la lumière émanée de ces corps. Car la réfraction ne produit point ces couleurs ni ne les altère ; elle ne fait que les séparer ; et ainsi ce que nous appelons la blancheur ne doit être que la réunion d'un certain nombre de rayons qui, considérés isolément, produisent la sensation de couleurs diverses, mais qui, réunis, produisent la sensation du blanc. C'est ce qu'il est facile de vérifier ; car il suffit pour cela de tourner l'épingle, ou la bande de papier blanc, de manière que sa direction devienne perpendiculaire aux arêtes du prisme réfringent, au lieu de leur être parallèle. Alors son extrémité supérieure paraît

violette, et l'extrémité opposée paraît rouge ; mais si elle est d'une grosseur égale dans toute sa longueur, ce sont là les deux seules portions de l'image qui paraissent colorées, et tout l'intérieur est blanc comme s'il était vu directement. Or il est clair qu'en tournant sur elle-même l'épingle ou la bande de papier, on ne change rien à la manière dont la lumière en émane. Ainsi les rayons qui partent de chacun des points de ces objets subissent encore dans le prisme les mêmes modifications qu'auparavant, c'est-à-dire que les rayons rouges sont les moins réfractés, et que les bleus et les violets le sont le plus. Si donc on ne distingue pas ces décompositions dans le milieu de l'image, c'est une preuve que les rayons venus des divers points consécutifs recomposent du blanc par leur superposition, et reproduisent ainsi, par leur ensemble, la blancheur que la réfraction avait détruite pour chacun d'eux. C'est aussi par cette raison que l'épingle ou la bande de papier doivent être partout d'un diamètre égal pour que l'expérience réussisse.

Nous n'avons jusqu'à présent observé que la lumière réfléchie. Celle qui émane immédiatement des corps enflammés présente aussi des phénomènes semblables, comme on peut s'en assurer aisément en regardant la flamme d'une bougie à travers un prisme. L'image de cette flamme, comme celle de tout autre objet, est bordée de rouge et de bleu à ses deux extrémités. Mais pour observer ces phénomènes dans toute leur beauté, il faut analyser ainsi par le prisme la lumière du soleil même.

Pour le faire de la manière à la fois la plus commode et la plus exacte, il faut recevoir l'image de cet astre sur le miroir d'un héliostat, et l'introduire ensuite par un très-petit trou dans une chambre parfaitement obscure, qui ait sept ou huit mètres de longueur. Cette image, parfaitement immobile, brillante de la plus vive lumière et de la lumière la plus pure, offre pour les expériences toutes les conditions les plus favorables que l'on puisse désirer.

Lorsqu'on n'a pas d'héliostat, il faut tâcher de se procurer un miroir métallique que l'on adapte à un appareil propre à lui faire prendre facilement toutes les positions possibles. Tel est celui que représente la fig. 125. On place cet appareil hors de la

chambre obscure, près d'une fenêtre exposée au midi, et on le dirige de manière que l'image réfléchie du soleil puisse arriver dans la chambre en passant à travers un petit trou rond percé dans le volet. Il doit y avoir pour cela des tiges de bois ou de métal attachées à l'appareil, et communiquant à l'intérieur de la chambre, afin que l'on puisse diriger le miroir sans ouvrir la fenêtre, et ramener l'image du soleil sur le trou, à mesure que le mouvement de cet astre la déplace, sans détruire l'obscurité.

Enfin, au défaut de tous ces moyens, on peut introduire directement l'image du soleil dans l'intérieur de la chambre obscure, par un trou rond percé dans le volet. Dans tous les cas, il faut que ce trou soit percé nettement, et sans arrachures sur ses bords ; c'est à quoi l'on réussit très-bien en le perçant dans une plaque métallique très-mince que l'on adapte au volet. Alors, comme l'image du soleil se déplace sans cesse par l'effet du mouvement diurne de cet astre, il faut avoir soin de déplacer pareillement les prismes et les autres appareils sur lesquels on la fait tomber. Mais la preuve que l'on peut encore faire ainsi des expériences très-exactes, c'est que toutes celles de Newton même n'ont pas été faites autrement. Cependant l'usage de l'héliostat est si commode, et cet instrument se construit aujourd'hui avec tant de perfection, que l'on ne doit pas hésiter à s'en servir quand on en a la possibilité.

Quel que soit celui de ces procédés que l'on emploie pour introduire l'image du soleil dans la chambre obscure, si l'on reçoit cette image sur un carton blanc perpendiculaire aux rayons lumineux, elle se trouvera de même forme que l'ouverture faite au volet de la fenêtre, c'est-à-dire, ronde, carrée ou triangulaire, selon que cette ouverture elle-même sera un cercle, un carré ou un triangle; mais l'éclat de la lumière ne sera pas égal dans tous ses points ; elle sera la plus vive dans l'intérieur de l'image, et de là elle ira, en se dégradant, sur les bords, où son intensité s'affaiblira jusqu'à devenir enfin tout-à-fait insensible. Il est nécessaire de se rendre compte de toutes ces circonstances avec exactitude, avant de soumettre cette lumière aux expériences de la réfraction. Soit donc, fig. 126, SS' le diamètre du disque du soleil supposé sphérique, FF' le dia-

mètre du trou que nous supposons circulaire, et TT' le plan du tableau sur lequel on reçoit l'image lumineuse. Nous sommes obligés ici de dénaturer extrêmement toutes les proportions de ces grandeurs, pour les rendre sensibles dans la figure; mais cela ne fait rien au raisonnement. Pour voir maintenant comment se forme et se distribue l'image du soleil transmise à travers l'ouverture, concevons, par chacune des extrémités SS' du diamètre de cet astre, deux droites tangentes aux bords FF' de l'ouverture. Nous formerons ainsi les deux cônes TVT', tvt', dont l'un aura son sommet en dehors de la chambre, et l'autre en dedans. Le premier de ces cônes limite l'espace dans lequel les rayons solaires peuvent pénétrer, et par conséquent son intersection avec le plan du tableau limite la grandeur de l'image, dont l'étendue totale sera ainsi égale à TT'; mais toute cette étendue ne sera pas également éclairée. En effet, si l'on considère un point quelconque M, compris entre t et t', c'est-à-dire dans le cône intérieur, un œil placé à ce point verrait l'image du trou se projeter toute entière sur le disque du soleil, puisque si, du point M, on conçoit deux droites tangentes aux bords $F\ F'$, ces droites iront rencontrer la droite $S\ S'$ entre les points S et S'. Mais si l'œil était placé hors du cône intérieur, par exemple, en N ou en N', il ne verrait qu'une portion du disque solaire à travers le trou, et cette portion diminuerait de plus en plus, à mesure qu'il s'approcherait des extrémités $T\ T'$. D'après cela on voit que l'image pure, éclairée par la totalité du disque du soleil, est renfermée entre les points tt', et est environnée d'une pénombre annulaire dont la largeur est Tt', ou $T't$.

Il est facile de prévoir d'avance quelle doit être la grandeur totale de l'espace $T\ T'$, quand on connaît le diamètre FF' de l'ouverture, ainsi que sa distance CC' au carton. En effet, cette grandeur est égale à $Tt + tT'$; la première partie Tt est la base du triangle isoscèle TFt, dont la hauteur CC' est égale à la distance du tableau que nous nommerons H, et dont l'angle TFt est égal au diamètre apparent du soleil, pour le jour de l'observation. Nommons ce diamètre D; alors la ligne Tt sera égale à $2\ H \text{ tang } \frac{1}{2}\ D$. Il ne faut plus que lui

ajouter tT' ; or, l'éloignement du soleil pouvant être considéré comme infini relativement à la largeur de l'ouverture FF', l'angle $T'S't$ peut être regardé comme nul, et les lignes tT', FF', comme égales entre elles. Ainsi, en nommant d le diamètre de l'ouverture, la largeur totale de l'image TT' sera $d + 2\,\text{H} \tang \frac{1}{2}\,\text{D}$; expression au moyen de laquelle on pourra connaître d'avance quelle doit être cette largeur, lorsque les rayons lumineux arrivent librement au carton, sans se dévier de la ligne droite, et sans traverser d'autre milieu que l'air.

Tout cela étant connu et déterminé, examinons les modifications que l'interposition d'un prisme fait éprouver à cette image. Pour en rendre le détail plus simple, supposons qu'on se serve d'un héliostat, alors l'image directe est immobile, et les manipulations deviennent plus aisées. Dans ce cas, voici comment on opère :

Après avoir fait l'obscurité dans la chambre le plus complètement possible, on y introduit un rayon solaire, que l'on dirige vers le haut, de manière qu'il fasse avec l'horizon un angle d'environ quarante ou cinquante degrés, fig. 127. On fait passer ce rayon à travers un prisme transparent qui, pour rendre l'expérience bien sensible, doit avoir un angle réfringent d'environ soixante degrés. Ce prisme est porté sur un pied P, qui permet de le hausser ou de le baisser à volonté, jusqu'à ce qu'il se trouve à la hauteur du rayon. Il faut placer le prisme de manière que son arête supérieure soit horizontale ; et de plus, on doit le mettre à peu de distance du trou F; car, en l'éloignant de ce trou, le rayon se dilate en un cône, et si la base de ce cône ne tombait pas sur les surfaces du prisme, on perdrait une partie de la lumière, ce qui rendrait l'image moins vive. Lorsque le prisme est placé, on le fait tourner autour de son axe jusqu'à ce que les rayons qui forment l'image réfractée tombent sur le mur opposé de la chambre à peu près horizontalement. Alors, pour la bien observer, on la reçoit sur un grand tableau blanc et vertical TT, formé, par exemple, de feuilles de beau papier blanc collées ensemble, et attachées à un cadre de bois. Ce tableau est également porté sur un pied mobile, qui permet de l'avancer ou de le reculer à volonté, comme

aussi de l'élever plus haut ou plus bas. Pour que le spectre formé par le prisme soit bien distinct et les couleurs bien séparées, il faut placer le tableau à la distance de cinq ou six mètres. Quand tout est ainsi disposé, on fait de nouveau tourner lentement le prisme sur son axe, et alternativement de gauche à droite, ou de droite à gauche. On trouve ainsi qu'après avoir fait monter de plus en plus l'image VR, jusqu'à un certain terme, si l'on continue à tourner encore, elle redescend et s'abaisse; ensorte qu'entre ces deux mouvemens opposés, elle reste un moment stationnaire. Quand on a trouvé ce point d'équilibre, on y fixe le prisme, et il se trouve alors, à fort peu près, placé dans la situation indiquée page 385, c'est-à-dire que les angles d'incidence sont égaux en somme aux angles d'émergence.

Comme cette proposition est d'une application très-fréquente, il faut en donner ici la démonstration. Pour le faire avec simplicité, ne considérons d'abord qu'un faisceau lumineux SI infiniment mince, fig. 128, tel que serait celui qui viendrait d'une étoile fixe. Supposons que ce faisceau se réfracte dans un prisme ACB dont les arêtes soient perpendiculaires à sa direction, et soit O l'observateur placé sur la direction du rayon réfracté RO: si, par le point O, on mène la ligne OS parallèle aux rayons incidens SI, l'angle ROS, que nous nommerons Δ, sera la déviation qu'ils éprouvent. Conformément à la notation que nous avons toujours adoptée, nous représenterons l'angle SIA par φ, et de suite les angles consécutifs CIR, IRB, CRO, seront représentés par φ_1 φ_2 φ_3. Nous appellerons a l'angle réfringent ACB du prisme, et n le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction, quand le rayon que nous considérons entre dans le prisme. Cela posé, conformément à ce que nous avons déjà trouvé en traitant des réfractions, il est évident que l'on aura, entre les angles φ_1 φ_2 φ_3 les équations suivantes:

$$\cos\varphi = n\cos\varphi_1$$

$$\varphi_2 = a + \varphi_1$$

$$\cos\varphi_3 = n\cos\varphi_2;$$

de plus, l'expression de la déviation Δ sera

$$\Delta = \varphi_3 - \varphi - a.$$

Maintenant on suppose que l'on tourne lentement le prisme, de manière à faire monter et descendre l'image réfractée, et l'on demande de fixer par le calcul la position dans laquelle cette image s'écartera le moins du prolongement du rayon direct SI. Il est évident que cette position est celle qui rend la déviation Δ un *minimum;* en sorte que, pour l'obtenir, il faut écrire que cette condition est satisfaite, c'est-à-dire, qu'en faisant varier infiniment peu l'angle φ, et par suite les angles φ_1 φ_2 et φ_3 qui en dépendent, la différentielle de Δ reste égale à zéro. Cette condition donne $$d\Delta = d\varphi_3 - d\varphi.$$
Car l'angle réfringent des prismes étant une quantité constante, il ne faut pas le faire varier. Ainsi la condition exigée veut qu'on ait $$d\Delta = o \quad \text{ou} \quad d\varphi_3 = d\varphi\,;$$
c'est le caractère de la position cherchée, et l'on voit déjà pourquoi l'image y est stationnaire; il reste donc à trouver $d\varphi_3$ en fonction de $d\varphi$, d'après les relations qui existent entre ces angles. Or, ces relations étant successivement différenciées, donnent

$$d\varphi_1 = \frac{\sin\varphi}{n\sin\varphi_1}\,.\,d\varphi\,; \quad d\varphi_2 = d\varphi_1\,; \quad d\varphi_3 = \frac{n\sin\varphi_2}{\sin\varphi_3}\,.\,d\varphi_2,$$

d'où l'on tire $$d\varphi_3 = \frac{\sin\varphi\,\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1\,\sin\varphi_3}\,.\,d\varphi.$$
Puisqu'on veut avoir $d\varphi_3 = d\varphi$, il faudra faire
$$\frac{\sin\varphi\,\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1\,\sin\varphi_3} = 1.$$
Or, φ_1 dépend de φ comme φ_2 dépend de φ_3. On satisfera donc à la condition exigée, en plaçant le prisme de manière qu'on ait $$\varphi_3 = 180 - \varphi\,,$$
ce qui donnera $\sin\varphi_3 = \sin\varphi$ et $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$; alors les rayons incidens et émergens forment, avec les surfaces du prisme, des angles égaux SIA, ORB; et par suite le rayon réfracté IR rencontre ces deux surfaces sous d'égales inclinaisons. Chacun des angles CIR, CRI est donc complément de la moitié de l'angle réfringent du prisme, ou égal à $90 - \frac{1}{2}a$; ce qui donne
$$\cos\varphi = n\sin\tfrac{1}{2}a \quad \cos\varphi_3 = -n\sin\tfrac{1}{2}a \quad \Delta = 180 - 2\varphi - a,$$
et par suite $$\sin\tfrac{1}{2}(\Delta + a) = n\sin\tfrac{1}{2}a.$$

Voilà ce qui a lieu pour un faisceau de rayons incidens parallèles. Lorsque les rayons incidens sont inclinés les uns aux autres, comme sont ceux qui, partant des bords opposés du soleil, vont aboutir à un même observateur, on ne peut pas, à la rigueur, mettre le prisme dans la position du minimum, relativement à tous ces rayons. Car si ceux qui viennent du bord supérieur du soleil, par exemple, tombent sur le prisme avec l'incidence requise et telle que $\cos\varphi = n \sin\frac{1}{2} a$, il n'est plus possible que cette relation ait lieu en même temps pour les rayons émanés de l'extrémité opposée du disque, puisque, relativement à ceux-ci, l'incidence φ sera nécessairement différente. Mais si le diamètre apparent de l'objet que l'on observe est fort petit, comme cela a lieu pour le soleil, la quantité dont les rayons extrêmes s'écarteront les uns des autres sera très-petite, et par conséquent, lorsque le centre de l'image sera dans la position du minimum de Δ, les rayons extrêmes satisferont aussi, à très-peu de chose près, à cette condition. Cela suffira d'autant mieux, que, $d\Delta$ étant nul à cette limite, à cause de la propriété du minimum, une petite variation d'incidence n'altère pas sensiblement Δ. D'après cela on voit que, pour les objets dont le diamètre apparent est fort petit, la position du minimum de Δ s'accordera sensiblement avec celle que nous avons déterminée plus haut pour obtenir l'égalité des diamètres apparens de l'objet et de son image ; et par conséquent, lorsqu'on y aura placé le prisme, on pourra lui appliquer aussi cette propriété. Cette position offre donc de très-grands avantages ; car non-seulement on connaît directement, par le calcul, les angles d'incidence et d'émergence qui y répondent, ce qui dispense de les mesurer, mais encore on sait que, si tous les rayons qui composent la lumière incidente suivent le même rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence, ils doivent, après la réfraction, former une image de l'objet égale à l'objet lui-même ; c'est-à-dire, dans le cas actuel, une image ronde égale en grandeur au diamètre apparent du disque du soleil, vue du point F, où se croisent les rayons directs. Ceci a été démontré par le calcul dans la page 384.

Or, en disposant l'expérience comme nous venons de le

dire, l'image réfractée VR est bien loin d'être circulaire ; elle forme, sur le tableau blanc où elle se projette, un spectre coloré oblong, terminé latéralement par deux droites verticales, et à ses deux bouts par des demi-cercles. L'extrémité supérieure, où la réfraction est moindre, est teinte d'un rouge vif; l'extrémité inférieure, où la réfraction est la plus forte, est teinte d'un beau violet; entre ces deux extrêmes, on découvre une infinité de nuances. Cet allongement de l'image n'est pas dû à une imperfection du prisme, par exemple, à des impuretés de sa substance, ou à des inégalités dans son poli ; car tous les prismes diaphanes, de quelque matière qu'ils soient, produisent des effets analogues ; il n'y a de différence que dans la longueur absolue du spectre, qui est plus ou moins considérable, suivant la substance réfringente et la grandeur de l'angle réfringent. Même, pour éviter à cet égard jusqu'au soupçon du doute, on peut employer des prismes à liquides tels que nous les avons décrits page 220. Le faisceau lumineux, en se réfractant à travers ces liquides, que l'on ne peut pas soupçonner d'être hétérogènes, se dilate encore et s'allonge, comme dans les expériences faites avec les prismes de verre. L'allongement de l'image réfractée est donc un phénomène constant qui tient à la nature de la réfraction, et par conséquent il faut en conclure nécessairement que tous les rayons qui composent la lumière du soleil ne sont pas également réfrangibles ; car s'ils l'étaient, l'image ne serait pas allongée, mais circulaire, dans la position où notre prisme est placé.

Mais allons plus loin, et pour qu'il ne nous reste aucun doute à cet égard, calculons la grandeur de l'image réfractée, et comparons-la à ce qu'elle aurait dû être ; nous verrons si la différence sera de nature à être attribuée aux erreurs des observations. Servons-nous, pour cela, des résultats rapportés par Newton. Dans ses expériences, le trou fait au volet de sa fenêtre était circulaire et avait un quart de pouce anglais de largeur; le tableau sur lequel il recevait l'image était éloigné de la fenêtre de 18 pieds $\frac{1}{2}$. Avec ces données, nous pouvons déjà calculer quelle devait être sur le tableau la largeur de l'image directe; car, d'après ce que nous avons vu à la page 391,

l'expression du diamètre de cette image est $d + 2 H \text{ tang } \frac{1}{2} D$; d étant le diamètre du trou, H la distance du tableau à la fenêtre, et D le diamètre du soleil, que l'on peut prendre de 31′. 20″, ce qui est sa valeur en été. Effectuant donc le calcul sur ces données, par les tables de sinus, après avoir réduit H en pouces, on trouve $2 H \text{ tang } \frac{1}{2} D = 2^{po},023$, et ajoutant d, qui est égal à $0^{po},25$, on aura $2^{po},273$ pour la largeur de l'image directe du soleil à cette distance, en la supposant visible jusqu'aux extrémités de la pénombre.

Or, en mesurant avec beaucoup de soin la largeur du spectre coloré formé à cette distance par différens prismes, tant solides que liquides, Newton trouva qu'elle était constamment la même, et égale à $2^{po},125$ environ, en y comprenant toute la pénombre. Cette valeur diffère si peu de celle que nous venons de calculer, que la différence peut être regardée comme insensible dans des mesures de ce genre, qui comportent toujours quelque incertitude, parce que la pénombre qui a lieu sur les limites de l'image ne permet pas de les fixer avec la dernière rigueur. Ainsi, en négligeant cette petite différence, nous voyons que la largeur du spectre formé par différens prismes, à travers une même ouverture, est constante et égale à la largeur de l'image directe. Par conséquent le faisceau de rayons incidens n'est point dilaté par le prisme dans le sens de ses arêtes; il ne l'est que dans le sens de l'angle réfringent.

Mais dans ce dernier sens, la dilatation est indubitable; Newton en rapporte plusieurs mesures qui concourent à la prouver avec évidence. Par exemple, avec un prisme de verre dont l'angle réfringent était de 62° 30′, il trouva, par plusieurs expériences, la longueur du spectre de $9^{po}\frac{3}{4}$ ou 10^{po}. Avec un autre prisme de verre parfaitement pur et bien poli, dont l'angle réfringent était de 63°, il la trouva encore de 10^{po}. La distance du tableau à la fenêtre était toujours de $18^{pi}\frac{1}{2}$; le prisme était placé dans la position où l'image paraît stationnaire; et c'était même pour atteindre plus exactement cette limite que Newton y revint à plusieurs fois. De plus, comme les extrémités du spectre étaient plus faibles que le reste, on voyait encore au-delà de ces extré-

mités une faible teinte qui était violette à l'une, et rouge à l'autre; mais comme ces faibles teintes pourraient être attribuées à quelques inégalités des prismes, elles ne sont point comprises dans les mesures précédentes. Puis donc que les mesures, ainsi limitées, donnent encore à l'image une longueur cinq fois aussi grande que sa largeur, il en résulte, avec évidence, que la dispersion des rayons est bien certaine, et ne tient pas à quelque erreur ou à quelque cause accidentelle, mais à une inégalité dans leur réfrangibilité.

Newton répéta encore cette expérience d'une autre manière: il regarda à travers le prisme l'image du trou, et il observa que sa longueur, formée par la série des rayons réfractés, égalait plusieurs fois sa largeur. Il vit de plus que la partie de cette image qui était formée par les rayons les plus réfractés paraissait violette, et que la partie formée par les rayons les moins réfractés paraissait rouge, résultat conforme à celui de l'expérience précédente, et qui indique également qu'il existait des rayons inégalement réfrangibles dans la lumière qui passait par le trou, puisque, s'ils eussent été également réfrangibles, l'image du trou, vue à travers le prisme, aurait dû paraître circulaire, au moins dans une de ses positions. Cette expérience est facile à faire, et chacun peut la répéter. Pour que la séparation des couleurs soit bien complète, il faut employer un prisme dont l'angle réfringent soit considérable, par exemple, de 50° ou 60°, comme nous l'avons déjà remarqué. Il faut de plus que le trou par lequel la lumière entre dans la chambre obscure soit très-petit, et que l'observateur en soit éloigné de cinq ou six mètres. Alors, on tient le prisme devant les yeux, de manière que ses arêtes soient à peu-près horizontales; puis on le fait tourner lentement autour de son axe dans un sens et dans l'autre, ce qui fait tour à tour monter et descendre l'image; et l'on s'arrête dans la position du prisme où elle est stationnaire. Alors, si tous les rayons lumineux étaient également réfrangibles, elle devrait paraître circulaire: son allongement, que l'on ne peut méconnaître, est donc une preuve irrécusable de leur inégale réfrangibilité.

Newton chercha à vérifier cette importante vérité dans toutes les conséquences qui s'en pouvaient déduire. Si la dilatation produite par le prisme provient d'une inégale réfrangibilité des rayons lumineux ; ceux de ces rayons qui se trouvent ainsi portés par la réfraction à des hauteurs égales sont donc également réfrangibles. Ainsi, en supposant que, dans la fig. 129, S représente le centre de l'image solaire directe, et VR l'image oblongue et colorée, produite par la réfraction d'un prisme horizontal, si l'on trace dans cette image des lignes horizontales, telles que II, BB, VV, ces droites désigneront des limites d'égale réfrangibilité. Par conséquent, si l'on fait subir de nouveau à l'image RV une seconde réfraction latérale par un prisme dirigé verticalement, les rayons contenus dans chacune des lignes II, BB... etc., étant également réfrangibles, ne devront plus être séparés par la réfraction. Si de plus le second prisme est identiquement égal au premier, et incliné sur la lumière incidente de la même manière, son effet sur chacun des rayons contenus dans ces lignes sera aussi égal à ce qu'il était d'abord (1). Par conséquent l'extrémité inférieure R′ de la seconde image sera autant écartée de l'extrémité inférieure R de la première que celle-ci l'était elle-même de l'image directe dans la première réfraction. Et comme on en peut dire autant de tous les autres points de la première image VR, il s'ensuit qu'en prolongeant les lignes horizontales II, BB, VV..., on doit, après la seconde réfraction, trouver RR′ égal à SR, VV′ égal à SV, BB′ égal à SB, et ainsi de suite; d'où il résulte que la seconde image doit encore être comprise entre les mêmes lignes horizontales que la première; sans être aucunement dilatée en largeur. La partie inférieure de la première image qui souffrait la moindre réfraction et paraissait rouge doit encore former la partie inférieure de la seconde image et y subir aussi la moindre réfraction. Le même rapport doit subsister

(1) Nous supposons le second prisme amené, comme le premier, dans la position où les angles d'émergence et d'incidence sont égaux. Car c'est dans cette position seulement qu'une image formée de rayons également réfrangibles n'est ni dilatée ni contractée par la réfraction.

pour l'extrémité opposée qui paraît violette. De plus, la nouvelle image doit être terminée latéralement par deux droites inclinées de 45° sur la verticale VS; et enfin son axe V′R′ doit, étant prolongé, passer par le centre S de l'image directe. Or, en faisant l'expérience, on trouve que toutes ces conséquences y sont exactement conformes, ainsi que Newton s'en est assuré. Cet accord confirme donc, de la manière la moins douteuse, l'inégale réfrangibilité des rayons lumineux, et il montre que cette propriété des rayons n'est point accidentelle, mais qu'elle est inhérente à leur nature, puisque chacun d'eux la conserve invariablement après la première réfraction, et même après une seconde et une troisième, comme Newton s'en est également assuré.

Nous avons déjà remarqué que la largeur du trou par lequel passent les rayons, doit produire, même dans l'image directe du soleil, une pénombre qui fait que les bords de cette image se dégradent insensiblement, depuis la lumière la plus vive jusqu'à une complète obscurité. Or, la faible lumière qui forme cette pénombre étant absolument de même nature que le reste de l'image, doit être modifiée par la réfraction de la même manière, et par conséquent elle doit se retrouver sur les côtés rectilignes de l'image oblongue dont elle altère ainsi la netteté. C'est en effet ce que l'expérience confirme. Pour éviter l'indétermination qui en résulte, Newton fixa au-devant du trou de la fenêtre une lentille de verre qui, par sa réfraction, rassemblait en un seul foyer tous les rayons envoyés par chaque point du disque du soleil, d'où résultait une image de cet astre, blanche, circulaire, et absolument exempte de pénombre. Cela fait, il reçut le faisceau de rayons sur un prisme placé derrière la lentille, et l'image oblongue formée par la réfraction se trouva pareillement exempte de toute pénombre sur ses côtés rectilignes; de sorte que ces côtés paraissaient aussi distinctement terminés que l'image directe elle-même que la lentille projetait. Il faut, dans toutes ces expériences, employer des prismes d'un verre parfaitement pur; et même, si l'on avait quelque intérêt à les faire avec la dernière précision, il vaudrait

encore mieux employer notre prisme à liquides; car alors on n'aura rien à désirer du côté de la pureté; et si de plus on le remplit de soufre hydrogéné liquide, dont la réfraction et la dispersion sont plus fortes que celle du flint-glass lui-même pour des ouvertures et des incidences égales, on réunira toutes les circonstances les plus favorables au succès des opérations.

Dans l'expérience de réfraction latérale que nous avons décrite tout-à-l'heure, Newton avait trouvé le moyen d'opérer en quelque sorte isolément sur chacun des rayons d'égale réfrangibilité; voici une autre manière d'arriver au même but qu'il a également employée.

Soit S F un trait de lumière solaire introduit dans la chambre obscure par l'ouverture F, fig. 130. Près de cette ouverture, plaçons un prisme ABC qui, réfractant inégalement les rayons inégalement réfrangibles que ce faisceau contient, formera sur un plan T T l'image oblongue et colorée que nous avons observée dans les expériences précédentes. Pour étudier séparément les rayons inégalement réfrangibles dont cette image se compose, perçons dans le tableau une très-petite ouverture circulaire O qui réponde à un des points de l'image. Alors il passera par cette ouverture un petit cône de rayons sensiblement homogènes, qui, en tombant sur un autre plan T′ T′ parallèle au premier, y formera une petite image circulaire de l'ouverture O. Cette image sera d'une seule teinte, rouge, par exemple, si l'ouverture O répond aux rayons de la première image qui produisent la sensation du rouge; verte, si elle répond aux rayons verts, et ainsi de suite. Maintenant donc que cette lumière homogène est séparée du reste du spectre, nous pouvons l'étudier à notre aise. Pour cela, perçons en O′ un petit trou dans le second tableau, de manière à laisser passer par ce trou un petit faisceau de notre lumière homogène, et faisons passer ce faisceau à travers un second prisme *abc*. Alors, si l'inégale réfrangibilité des rayons contenus dans la lumière naturelle est la seule cause de l'allongement des images et de leur coloration par la réfraction, il ne doit plus se produire ici rien de pareil. Le faisceau homogène étant réfracté par le prisme, ne doit pas changer de couleur; et si

l'inclinaison du prisme est telle, que les incidences et les émergences soient égales, l'image formée par ce faisceau sur la muraille doit être ronde comme l'ouverture elle-même. C'est aussi ce que l'expérience confirme, comme l'a observé Newton, et comme tous les physiciens l'ont aussi observé d'après lui.

Maintenant, si l'on tourne lentement le premier prisme autour de son axe, les rayons qui produisent la sensation des couleurs diverses, passeront successivement par le trou O, et arriveront aussi successivement au second prisme *a b c*, précisément suivant la même direction OO′, et par conséquent avec la même incidence. On verra donc ainsi se former tour à tour, sur la muraille, des images rouges, jaunes, vertes, etc. selon que les rayons qui passeront alors par l'ouverture O se trouveront être ceux qui donnent la sensation du rouge, du jaune, du vert, etc. Si donc il est vrai que ces rayons soient inégalement réfrangibles, et que cette propriété leur soit inhérente, ils doivent éprouver, dans le second prisme, des réfractions inégales, plus fortes pour les violets, moindres pour les rouges, et intermédiaires pour les rayons qui produisent les couleurs intermédiaires; ce dont on s'apercevra aisément par l'inégale hauteur des images, et par leur mouvement pour monter ou pour descendre, à mesure que l'on tournera le premier prisme: toutes ces conséquences se trouvent encore parfaitement confirmées par les faits.

Enfin Newton réitera sur ces rayons ainsi séparés la première expérience que nous avons faite sur les couleurs des corps naturels. Il fit deux trous au volet de sa chambre obscure, et y plaça deux prismes tellement disposés, que les faisceaux réfractés, tombant tous deux horizontalement sur la muraille, fussent en contact par leurs extrémités opposées, le violet de l'un se trouvant contigu au rouge de l'autre. Cela fait, il plaça dans ces rayons une bande de papier blanc horizontale, d'une longueur telle, qu'elle recevait sur une de ses moitiés le rouge d'une des deux images, et sur la seconde moitié le violet de l'autre. Au-delà de cette bande, à quelque distance, il étendit un drap noir pour absorber la lumière du reste de l'image qui aurait pu être réfléchie par les corps environnans. Alors, s'éloignant du papier, et le regardant à travers un prisme,

il vit ses deux moitiés se séparer par l'inégalité de la réfraction. La moitié qui était éclairée par une lumière violette était plus réfractée que celle qui était éclairée par une lumière rouge. Ainsi les rayons qui produisent ces deux sortes de lumière avaient encore conservé leur réfrangibilité propre, après avoir subi sur le tableau la réflexion irrégulière qui les avait disséminés dans tous les sens.

Cette inégale réfrangibilité des rayons lumineux doit nécessairement produire son effet quand la lumière est réfractée par des lentilles. Car que sont des lentilles, sinon un assemblage circulaire d'une infinité de prismes inégalement ouverts ? Il en doit donc résulter pour chaque rayon des distances focales différentes, les rayons les plus réfrangibles formant leur foyer plus près de la lentille, et les autres plus loin. Ce résultat n'est que trop bien confirmé par l'expérience; car la dispersion des foyers qui en résulte a été pendant long-temps un obstacle au perfectionnement des lunettes. Newton, qui en fit la découverte, rendit le phénomène sensible par le procédé suivant :

Pendant un beau jour d'été, lorsque la lumière du soleil était dans toute sa force, il plaça un prisme de verre devant le trou fait au volet de sa chambre obscure; mais il eut soin de disposer ce prisme de manière que son axe fût parallèle à l'axe de la terre. Par l'effet de cette disposition, le soleil, qui parcourt chaque jour un parallèle à l'équateur, devait, pour ainsi dire, tourner autour du prisme en vertu du mouvement diurne, et son image réfractée devait suivre aussi ce mouvement. Newton fit tomber cette image à quelque distance, sur un livre ouvert, placé contre la muraille. A six pieds deux pouces de distance de ce livre, il plaça une lentille de verre dont la distance focale était de trois pieds un pouce. Par ce moyen, la lumière colorée, réfléchie par les pages du livre, allait aussi se réunir derrière la lentille, à la même distance de six pieds deux pouces, et y peignait les images des caractères sur une feuille de carton blanc (1). Ayant ainsi fixé le livre et la lentille dans les positions

(1) Lorsqu'on connaît la distance focale F de la lentille pour des rayons

convenables, Newton marqua fort exactement l'endroit où se trouvait le carton lorsque les caractères du livre, éclairés par le rouge le plus foncé de l'image solaire, venaient se peindre sur sa surface le plus distinctement possible. Après cela, il attendit que, par le mouvement du soleil et par celui de son image, toutes les couleurs, depuis le rouge jusqu'à la fin de l'indigo, eussent passé sur ces caractères, et il marqua encore le point où il fallait amener le carton pour les voir distinctement lorsqu'ils étaient éclairés par cette dernière couleur. Ce second point se trouva ainsi de quatre pouces, ou quatre pouces et un quart plus près de la lentille que le premier : conformément à ce qui devait arriver, ainsi que nous l'avons dit tout-à-l'heure, d'après l'inégalité des réfractions. Cette expérience, pour être bien faite, exige la plus grande obscurité ; car si le papier reçoit quelque autre lumière différente de celle de l'image colorée, cette lumière étrangère, parvenant aussi au foyer de la lentille et de là à l'œil de l'observateur, influe nécessairement sur la distance à laquelle les caractères se peignent le plus distinctement sur le carton ; et cet effet, qui est constant, affaiblit né-

---

incidens parallèles, il est facile de calculer la distance Δ' de la lentille à l'image, d'après la distance Δ de la lentille à l'objet. En effet, nous avons vu, page 250, que l'on a en général

$$\frac{1}{\Delta'} = \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{F}.$$

Les distances Δ, Δ' et F sont supposées positives quand elles tombent en avant de la lentille, du côté de l'objet. Dans l'expérience de Newton, rapportée dans le texte, on avait $F = -3^{pds}$ et $\Delta = 6^{pds} = -2F$; ce qui donne $\Delta' = +2F = -6^{pds}$, c'est-à-dire que l'image se forme de l'autre côté de la lentille, à la même distance que l'objet.

De plus, en nommant $r\,r'$ les rayons des surfaces de la lentille, et n le rapport de réfraction pour l'espèce de lumière que l'on considère, nous avons trouvé en général

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

Ainsi, pour les différentes espèces de rayons simples, n variant, F variera aussi, et par suite Δ', quoique Δ reste le même. C'est l'explication de l'expérience actuelle de Newton.

cessairement l'inégalité que la seule variété des couleurs du spectre tendrait à produire, si elle agissait isolément sur le carton et sur l'organe.

L'opération devient beaucoup plus facile lorsqu'on se sert d'un héliostat. Alors le trait lumineux étant introduit par un très-petit trou, et la chambre étant d'ailleurs parfaitement obscure, on le rompt par un prisme qui le rend à peu près horizontal et le disperse en un spectre coloré vertical que l'on reçoit sur un tableau blanc, placé à une distance considérable, et d'une étendue assez petite pour n'intercepter à la fois qu'une petite portion du spectre; de sorte qu'en tournant peu à peu le prisme sur son axe, ce tableau se trouve éclairé successivement par les rayons simples de différentes couleurs. Le reste du spectre est absorbé par un drap noir tendu au-delà du tableau, ou, ce qui vaut mieux encore, on le laisse se perdre dans une autre chambre obscure communiquant à la première. Cela fait, hors du trait de lumière incidente, on place une lentille dont la distance focale soit, par exemple, d'un mètre, et on la place à peu près à deux mètres de distance du tableau, de sorte qu'elle puisse rassembler les rayons réfléchis et les projeter sur un autre carton blanc placé du côté opposé, pareillement à une distance de deux mètres. Alors faisant tomber successivement sur le premier tableau les diverses couleurs simples, on cherche, par l'expérience, la distance précise où le second carton doit être placé pour que la lentille en donne à chaque instant l'image la plus nette; détermination qui devient susceptible de beaucoup d'exactitude, si, avant l'opération, on a eu soin de tracer sur le premier tableau blanc des lignes noires très-fines et horizontales, qui servent comme les caractères imprimés dans l'expérience de Newton. On trouve ainsi que cette distance est différente selon les couleurs, et d'autant moindre qu'elles sont plus réfrangibles. Par exemple, avec une lentille qui aurait un mètre de distance focale, et qui serait placée à deux mètres du premier spectre, on trouverait une distance de plus d'un décimètre entre le foyer des rayons rouges et celui des rayons indigo. Mais ordinairement, dans ces expériences, on ne peut

pas voir le violet, parce que cette couleur, très-sombre par elle-même, est trop affaiblie par les deux réflexions qu'elle subit sur le premier tableau et sur la lentille.

Il résulte de ce qui précède que, lorsqu'un faisceau cylindrique de lumière blanche L A L B, fig. 131, est réfracté par une lentille sphérique A B, les diverses espèces de rayons simples qui se croisent chacune à leur foyer particulier, forment autant de cônes de diverses couleurs, dont les sommets, répartis sur différens points de l'axe de la lentille, occupent une certaine longueur V R. Le plus large des cônes V′ V V′ est formé par les rayons violets les plus réfrangibles, le moins ouvert R′ R R′ par les rayons rouges les moins réfrangibles. Or, comme chaque cône couvre de ses rayons tout l'espace angulaire qu'il embrasse, mais ne les étend pas au-dehors, il arrive que le cône intérieur R′ R R′ contient des rayons de toutes les couleurs, mais que de là jusqu'au cône extérieur V′ V V′, la lumière transmise va toujours en se simplifiant, de sorte qu'enfin, à cette dernière limite, elle ne contient plus que du violet extrême. Si donc on arrête à la fois tous les cônes par un tableau blanc placé au-delà du dernier foyer R, ils projetteront sur ce tableau une image blanche circulaire, entourée d'une auréole colorée où le rouge manquera d'abord, puis le rouge et l'orangé, puis le rouge, l'orangé et le jaune... et ainsi de suite jusqu'aux bords extérieurs de l'auréole, où toutes les couleurs manqueront, excepté le violet. Cette dégradation de teintes sera par conséquent différente de celle que présente le spectre formé par un seul prisme. Mais voulez-vous rendre les couleurs de l'auréole bien plus distinctes? Vous n'avez qu'à découper dans une carte un anneau circulaire très-mince, fig. 132, entourant un cercle plein, dont le diamètre soit à peu près égal à la largeur M M des cônes extrêmes dans l'endroit où ils se pénètrent. Car d'abord, si vous placez cet anneau en M M, le vide qu'il présente se trouvera entièrement hors des cônes lumineux, qui seront tous arrêtés par le cercle plein, et par conséquent le tableau ne recevra pas de lumière. Rapprochez un peu plus l'anneau de la lentille, le bord du cône rouge commencera à pouvoir

y passer, tous les autres rayons continuant d'être arrêtés par le cercle plein, ce qui vous donnera sur le tableau un anneau rouge pur. Si, au contraire, en partant de MM, vous éloignez l'anneau de la lentille, au lieu de l'en rapprocher, ce sera le bord extrême du cône violet qui sera transmis, et vous aurez sur le tableau un anneau de violet pur. Ce seront là les seules couleurs simples que vous puissiez obtenir par cette méthode ; car en éloignant ou rapprochant l'anneau davantage de la lentille, il y passe à la fois des portions de cônes de plusieurs couleurs. Mais si l'observation n'est plus intéressante pour la science, elle l'est au moins pour les yeux par la richesse et la vivacité des teintes qui se succèdent. Cette agréable expérience est de M. Charles, qui la faisait ordinairement dans ses cours de physique, où elle produisait toujours le plus grand effet. Il isolait aussi les cônes successifs par un autre procédé très-simple, en promenant sur l'axe VR une carte noire percée d'un très-petit trou, qui se trouvait ainsi successivement répondre à leurs différens sommets.

Jusqu'ici nous avons uniquement examiné les propriétés des rayons dépendantes de leur inégale réfrangibilité. Nous allons maintenant étudier une autre propriété découverte également par Newton ; c'est que leur facilité pour se réfléchir intérieurement par réfraction est pareillement inégale, et d'autant plus grande qu'ils sont plus réfrangibles. Voici comment il fut conduit à cette découverte.

Ayant pris un prisme ABC, fig. 133, dont les deux angles B et C étaient de 45°, le troisième angle A étant droit, il fit tomber sur AC un trait de lumière FM introduit par l'ouverture F dans sa chambre obscure. Le rayon réfracté sortant en M, alla former au-dessous du prisme une image colorée VR, comme dans les expériences précédentes. En tournant lentement ce prisme autour de son axe, dans le sens ABC, les rayons réfractés deviennent de plus en plus obliques sur la base BC, et les rayons émergens sortent aussi de plus en plus obliquement en se rapprochant de cette base. De là il résulte qu'en augmentant toujours l'obliquité, les rayons réfractés finissent par ne plus pouvoir sortir, et sont totalement ramenés en de-

dans par la réfraction. D'après ce qu'on a vu, page 275, cela arrive dans le verre ordinaire, lorsque les rayons, dans leur incidence intérieure, font avec la base B C un angle d'environ 48°. Donc si l'angle réfringent C est de 45°, comme le faisait Newton, les rayons incidens se trouvent alors presque perpendiculaires à la première face A C du prisme, et par conséquent la dispersion que la première réfraction leur fait éprouver est presque nulle; de sorte que leurs incidences intérieures sur B C sont sensiblement égales. Or, malgré cette égalité, leur réflexion intérieure est progressive; car si, pendant le mouvement du prisme, on observe l'image colorée V R, on voit que c'est d'abord le violet qui disparaît de cette image, tandis que les autres couleurs restent. Après le violet, le bleu s'en va, puis le vert, le jaune, et enfin le rouge, qui disparaît le dernier; c'est alors seulement que la réflexion intérieure est totale. Ces rayons, successivement réfléchis, sortent par le côté B A du prisme. S'ils étaient les seuls qui suivissent cette direction, ce serait un moyen très-simple de les séparer des autres; mais il n'en est pas ainsi; car le faisceau réfracté éprouve toujours en M une réflexion partielle qui, s'exerçant indistinctement sur toute la lumière incidente, en renvoie directement une certaine proportion vers la face AB du prisme, en sorte que les parties du faisceau V R, qu'on détermine ensuite à se réfléchir, ne font que s'ajouter à celles-là. Cependant on peut encore y reconnaître leur influence. Pour cela, mettons d'abord le prisme A B C dans une position telle, que le faisceau réfracté V R sorte tout entier; puis, sur la direction M N du faisceau émergent produit par la réflexion partielle, plaçons un second prisme A′ B′ C′, qui, le réfractant, forme sur le tableau T T une autre image oblongue et colorée R′ V′. Remarquons avec attention l'intensité de cette image; cela posé, si nous faisons tourner lentement le premier prisme A B C autour de son axe, de manière à augmenter l'obliquité des rayons réfractés sur sa base, nous verrons qu'à l'instant où les rayons violets ne pourront plus sortir par BC, la partie violette de l'image R′V′ prendra un accroissement d'intensité très-sensible, comparativement aux autres teintes qui la composent. Ensuite ce sera le bleu qui augmentera, puis le vert, le jaune,

et enfin le rouge, lorsque, par la continuation du mouvement du prisme, la réflexion deviendra totale en M. Newton a varié cette expérience de plusieurs manières, qui reviennent toutes, pour le fond, à celle-ci.

Dans toute cette variété d'expériences faites sur la lumière réfléchie par les corps naturels, ou sur la lumière réfléchie par des surfaces spéculaires, ou enfin sur la lumière réfractée, nous trouvons toujours des rayons qui, à incidences égales sur le même milieu, souffrent des réfractions inégales, quoiqu'il ne se produise aucune dispersion dans chaque rayon simple. Nous voyons, de plus, que ce phénomène n'est point produit accidentellement par des imperfections des substances réfringentes, mais qu'il suit des lois régulières dépendantes de la position des prismes réfringens de leurs angles et de leur nature. De tout cela il résulte donc incontestablement que *la lumière du soleil, comme toutes les autres espèces de lumière que nous pouvons soumettre à ces mêmes expériences, est un mélange de rayons hétérogènes, dont les uns sont constamment plus réfrangibles que les autres, et qui, pris à part, sont susceptibles de produire sur nos organes la sensation de diverses couleurs.* De plus, puisque les rayons violets sont ramenés en dedans du prisme, sous des incidences intérieures auxquelles les autres sortent, nous pouvons ajouter que *ces rayons diffèrent aussi en réflexibilité, et que les plus réfrangibles sont aussi les plus susceptibles d'être réfléchis intérieurement par réfraction.* D'après la théorie des forces attractives, ceci est une conséquence de la réfrangibilité inégale.

Il faut maintenant chercher à séparer les rayons les uns des autres, aussi parfaitement qu'il nous sera possible, afin d'étudier leurs propriétés individuelles dans le plus grand état de pureté où il soit possible de les obtenir. Tel est l'objet des recherches suivantes de Newton.

D'abord, pour nous faire une idée nette de la formation du spectre coloré, et de la manière dont les couleurs s'y distribuent, il faut concevoir la lumière solaire comme composée d'une infinité de rayons inégalement réfrangibles qui y existent tous ensemble, en conservant néanmoins leurs propriétés in-

dividuelles. Chacun de ces rayons, s'il existait seul, nous ferait voir le disque du soleil vert ou rouge, ou jaune, ou en général de l'espèce de couleur qu'il est capable de produire. Reçu dans une chambre obscure, à travers une ouverture circulaire, et ensuite réfracté par le prisme, il ne se disperserait point, et en supposant le prisme placé dans la situation qui établit l'égalité des angles d'incidence et d'émergence, il donnerait une image circulaire du soleil. Maintenant, lorsque tous ces rayons sont réunis pour former la lumière naturelle du soleil, si on les réfracte tous ensemble par un prisme placé relativement à leur axe moyen, dans la situation que nous avons choisie, chacun d'eux conservant ses propriétés, doit former une image circulaire, différente pour la couleur et la position ; et tous ces petits cercles superposés en partie les uns sur les autres en nombre infini, depuis la fin du violet jusqu'au rouge extrême, doivent produire l'image oblongue que nous observons. C'est ce que représente la fig. 134, dans laquelle il faut seulement supposer qu'il y a un nombre infini de cercles qui se suivent, depuis le violet jusqu'au rouge extrême, au lieu d'un petit nombre seulement que l'on a tracés.

Si l'image ainsi dispersée est celle du soleil, dont le diamètre apparent est d'environ un demi-degré, chacun de ces différens cercles, vu du centre de l'ouverture circulaire supposée infiniment petite, sous-tendra aussi un angle d'environ un demi-degré. Car chaque espèce de rayons simples venus des bords opposés du soleil forme, en passant par l'ouverture, un cône dont l'angle au centre est égal au diamètre apparent du disque de cet astre ; et, en se rompant dans le prisme avec des angles égaux d'incidence et d'émergence, le cône réfracté a sensiblement la même ouverture que le cône direct. La grandeur de ces images consécutives les faisant empiéter nécessairement les unes sur les autres, il en résulte qu'à la rigueur la lumière n'est nulle part absolument homogène, si ce n'est tout près des côtés rectilignes de l'image où les cercles se détachent les uns des autres.

Il est évident que cette superposition est occasionée uniquement par l'étendue sensible qu'occupe l'image directe S, indépendamment de toute réfraction ; car si cette image était

réduite à un point mathématique, la réfraction produite par le prisme séparant les rayons divers qui la composent, il en résulterait une infinité d'images de ce point, disposées consécutivement en ligne droite; et ces images n'empiétant point les unes sur les autres, puisqu'elles seraient sans étendue sensible, il en résulterait que la lumière serait parfaitement homogène dans chacun des points de l'image réfractée. En général, si l'on parvenait à diminuer l'étendue de l'image directe, à la concentrer pour ainsi dire, les cercles consécutifs dont l'image réfractée se compose diminueraient aussi de grandeur, sans que leur centre fût ni plus ni moins dévié. Ils se dégageraient donc davantage les uns des autres; car, si l'on considère, par exemple, les deux cercles A R A′ R′, B V B′ V′, fig. 134, dont les centres sont éloignés l'un de l'autre de l'intervalle C C′, ces deux cercles se recouvrent évidemment en partie, et se superposent dans l'espace V R′ H H′; mais si leurs diamètres diminuaient, la distance de leurs centres restant la même, ils empiéteraient moins l'un sur l'autre, et pourraient finir par se séparer entièrement. Ainsi, en supposant que le premier appartînt à des rayons susceptibles de produire la sensation du rouge, et le second à des rayons susceptibles de produire la sensation du vert, le rouge de la fig. 134 serait mélangé de vert dans sa partie inférieure, et il en serait tout-à-fait exempt dans la fig. 135.

On peut même assujettir cette séparation des couleurs à une mesure exacte. Pour cela, supposons que C C′ C″ soient les centres des cercles successifs en nombre infini qui sont distribués sur la droite R V, fig. 136, et nommons leur rayon commun r; chacun de ces cercles sera plus ou moins mêlé avec tous ceux dont la surface pourra pénétrer dans l'intérieur de son périmètre. Considérons, par exemple, celui dont le centre est en C, et choisissant un de ses points M situé sur la ligne R V; il est clair qu'en cet endroit il se fera un mélange de tous les cercles, dont les centres seront compris, de part et d'autre de M, sur une longueur L L′ égale à $2r$. Pour exprimer les effets de leur superposition d'une manière comparable, nommons n leur nombre,

et appelons N le nombre total de tous les centres répartis sur la longueur entière de la ligne RV, que nous exprimerons par $l - 2r$, l étant la longueur totale du spectre, mesurée tangentiellement aux images extérieures. Comme nous ne cherchons ici qu'une évaluation approchée qui nous fasse concevoir nettement le phénomène, nous pouvons supposer les centres uniformément distribués sur la droite RV; alors les nombres n et N seront proportionnels à $2r$ et à $l - 2r$, c'est-à-dire aux portions de la droite RV qu'ils occupent; et il en résultera

$$n = N . \frac{2r}{l - 2r}.$$

Cela posé, considérons deux spectres de largeur inégale, mais formés par des prismes de même nature et de même angle, en sorte que le nombre total des centres y soit réparti d'une manière semblable, et sur d'égales longueurs. Alors N et $l - 2r$ étant les mêmes, les valeurs de n deviennent proportionnelles à $2r$, c'est-à-dire qu'elles sont entre elles comme les largeurs des spectres; et ainsi le mélange des rayons hétérogènes est d'autant moindre, que le spectre est plus étroit. Dans l'image directe du soleil, chaque point contient le nombre total N des rayons hétérogènes : ainsi, en lui comparant la lumière réfractée, on peut dire que le mélange des rayons dans un spectre quelconque est à leur mélange dans la lumière immédiate du soleil comme la largeur du spectre est à l'excès de sa longueur sur sa largeur. C'est aussi le résultat énoncé par Newton.

On voit donc que pour affaiblir le mélange des rayons hétérogènes dans les diverses parties de l'image réfractée, il faut trouver le moyen de diminuer l'étendue de l'image directe, de laquelle dépend toujours sa largeur; il faut en même temps conserver assez de lumière pour que cette image soit vive, et enfin il faut encore la rendre exempte de pénombre sur ses bords. On remplit toutes ces conditions en concentrant cette image par une lentille avant de la faire tomber sur le prisme; et voici la disposition de l'appareil employé par Newton pour cet objet.

Soit F le petit trou circulaire par lequel l'image du soleil

entre dans la chambre obscure. A dix pieds de ce trou, et perpendiculairement à la direction des rayons lumineux, Newton plaça une lentille dont la distance focale était de cinq pieds. Ces rayons se trouvèrent par-là concentrés de l'autre côté de la lentille, à une distance qui était encore de dix pieds, et, en les recevant sur un tableau blanc, ils y formèrent une image lumineuse du trou, égale en grandeur au trou lui-même. Cette image, beaucoup plus petite que n'eût été l'image directe du trou, contenait néanmoins autant de lumière, et était par conséquent bien plus brillante.

Immédiatement derrière la lentille, Newton plaça son prisme : cette nouvelle réfraction dispersa l'image en un spectre oblong, coloré, très-étroit, qu'il reçut sur le même carton blanc où il avait d'abord fait tomber l'image directe, avançant ou reculant le carton jusqu'à ce qu'il eût trouvé la distance précise où les côtés rectilignes de l'image étaient terminés de la manière la plus distincte. Alors les petites images circulaires du trou qui composaient le spectre se trouvaient terminées très-nettement sans aucune pénombre ; et comme leurs diamètres étaient très-petits, puisqu'ils n'étaient pas plus grands que la largeur du trou, elles ne s'engageaient l'une dans l'autre que le moins possible. Ce procédé offre donc la possibilité de diminuer indéfiniment la largeur de l'image, puisqu'il suffit de diminuer celle du trou ; et il n'est pas même nécessaire, pour cela, que la lentille soit placée à une distance du trou précisément double de sa distance focale : il suffit que cette distance et celle à laquelle le foyer se forme derrière la lentille soient assez grandes pour que les rayons réfractés par le prisme puissent suffisamment se disperser. Dans tous les cas, lorsque ces distances sont connues par l'observation, on en peut aisément déduire, par un calcul très-simple, les rapports de grandeur du trou et de son image. Par exemple, dans une des expériences faites par Newton, la distance du trou à la lentille étant de 12 pieds, celle de la lentille à l'image directe se trouva de 10 pieds ; la largeur du trou était $\frac{1}{10}$ de pouce : d'où il est facile de conclure que la grandeur de l'image directe était inverse de

ces distances, c'est-à-dire égale à $\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{12}$ ou $\frac{1}{12}$ de pouce (1). La réfraction, dans ces circonstances, fut opérée par un prisme de verre, dont l'angle réfringent était de 62°; et la longueur du spectre se trouva de 6 pouces : ainsi sa longueur était à sa largeur comme 72 à 1 ; ce qui donne le raport de $2r$ à $l-2r$, comme 1 à 71 ; c'est-à-dire que la lumière de l'image réfractée était 71 fois moins composée que celle du soleil. Or, dit Newton, une lumière qui est simple et homogène à ce point, l'est assez pour faire toutes les expériences dont nous avons parlé jusqu'ici ; car le mélange des rayons hétérogènes y sera si faible, que l'œil pourra à peine le découvrir, excepté peut-être dans l'indigo et le violet. Ces deux couleurs sont tellement sombres, qu'elles sont facilement altérées par la faible lumière dispersée, qui, pour l'ordinaire, est rompue irrégulièrement par les inégalités de la matière du prisme.

---

(1) Soit AB le diamètre de l'ouverture circulaire, LL la lentille, et C C′ C″ l'axe commun qui passe par leur centre. Si, par l'extrémité supérieure A de l'ouverture, on conçoit un cône de rayons qui ait la lentille pour base, ces rayons, après la réfraction, iront se réunir en A′, au sommet d'un cône opposé. Il en sera de même des rayons venus de l'autre extrémité B; ils iront se réunir en B′. Les axes de ces cônes seront deux lignes droites AA′, BB′, qui passeront par le centre de figure de la lentille; et la ligne A′B′ menée par les deux sommets de ces cônes sera l'image de l'ouverture AB. D'après cela, les triangles rectangles ACC′, A′C″C′ seront semblables, ainsi que les triangles opposés BCC′, B′C″C′ ; et de cette similitude on tirera

$$A'C'' = AC \cdot \frac{C''C'}{CC'}, \qquad B'C'' = BC \cdot \frac{C''C'}{CC'};$$

valeurs qui, étant ajoutées, donnent $A'B' = AB \cdot \frac{C''C'}{CC'}$. C'est l'expression de la grandeur de l'image; on voit qu'elle est directement comme la distance de cette même image à la lentille, et inversement comme la distance de la lentille à l'objet. Dans l'expérience de Newton, dont nous avons donné le détail, $CC' = 12^{pi}$, $C''C' = 10^{pi}$, et $AB = \frac{1}{10}$ de pouce. Ainsi le diamètre de l'image $A'B' = \frac{1}{10^{po}} \cdot \frac{10}{12} = \frac{1}{12}$ de pouce, comme nous l'avons employé.

Newton employa encore un autre moyen pour avoir une lumière plus simple encore. Ayant fait au volet de sa chambre obscure un trou de deux pouces de diamètre, il y plaça une lentille de verre de sept pieds de foyer ; et au lieu de recevoir sur cette lentille les rayons du soleil, il y reçut le soir ceux de la planète Vénus, dont le diamètre est incomparablement moindre. Ces rayons concentrés par la lentille, et reçus à sept pieds de distance sur un papier blanc, y formèrent une image de l'astre, semblable à un point brillant et incolore. Mais en interposant un prisme à une distance d'un pied ou deux du papier pour réfracter cette lumière blanche, il vit le point lumineux s'allonger comme une petite ligne, peu brillante, mais pourtant bien distincte, et dont la largeur était tout-à-fait insensible. Newton ajoute que l'on pourrait probablement faire la même observation sur la lumière des étoiles de première grandeur ; par exemple, sur Syrius. Mais le moyen le plus simple d'y parvenir pour ces étoiles, et pour Vénus même, c'est de les regarder à travers une bonne lunette astronomique, devant l'objectif de laquelle on place un prisme dont l'angle réfringent est très-petit ; alors l'image de l'astre se dilate en une petite ligne, sans largeur sensible, et qui peut très-aisément s'observer la nuit sur le fond obscur du ciel. Il faut d'ailleurs que le prisme soit d'un très-petit angle, et le grossissement de la lunette peu considérable ; autrement la dilatation de l'image devenant trop grande, la lumière qui la compose s'affaiblit au point qu'on n'y peut plus distinguer de couleur, et qu'elle devient partout d'une pâleur sensiblement uniforme.

Quand on observe l'image du soleil, au lieu de faire l'ouverture F circulaire, il est utile de lui donner la forme d'une fente allongée très-étroite, dont la longueur soit parallèle aux arêtes du prisme. Car si ce trou a un pouce ou deux de longueur, et seulement un dixième ou un vingtième de pouce de largeur, ou encore moins, la lumière de l'image réfractée pourra être aussi aisément épurée que si le trou était circulaire, et l'image devenant plus large, plus lumineuse, sera en même temps plus propre aux expériences.

On peut encore, et avec plus d'avantage, donner à l'ouver-

ture la forme d'un triangle isoscèle fort allongé, dont les grands côtés soient dirigés dans le sens de la longueur du prisme, par exemple, dont la base soit la dixième partie d'un pouce, et la longueur un pouce ou davantage. Car alors, si l'axe du prisme est parallèle à la perpendiculaire menée du sommet de ce triangle au milieu de la base, l'image réfractée VR, fig. 138, se trouvera composée d'une infinité de triangles isoscèles abc, $a'b'c'$... disposés à la suite les uns des autres, depuis V jusqu'en R, et compris entre les deux lignes parallèles VR, V′R′. Ces triangles seront en partie mêlés et superposés les uns sur les autres à leurs bases, mais non pas à leurs sommets; car le sommet de l'ouverture étant un point mathématique, les images de ce point seront toutes séparées les unes des autres par la réfraction, et elles se distribueront ainsi sur la ligne V′R′, où par conséquent la lumière sera parfaitement décomposée; et ainsi la pureté de la lumière ira continuellement en augmentant depuis le côté le plus éclatant VR jusqu'au côté le plus sombre V′R′; ce qui donnera le moyen d'employer cette lumière plus forte ou plus faible, suivant qu'on le jugera convenable.

Mais lorsqu'on fait des expériences de ce genre, il faut, dit Newton, rendre la chambre aussi obscure qu'il est possible, de peur que quelque lumière étrangère ne se mêle avec la lumière de l'image et n'en détruise la simplicité, surtout si l'on a dessein de faire des observations exactes dans la plage V′R′ où la lumière est la plus pure et en même temps la plus sombre; car alors l'influence de la lumière étrangère y deviendrait plus sensible, et y produirait une altération plus marquée. Il faut aussi que la lentille soit bien travaillée et le prisme parfaitement plan, transparent et poli; les bords de la lentille et du prisme doivent être recouverts d'un papier noir partout où la réfraction peut devenir irrégulière. Enfin, si tout le faisceau de lumière qui est introduit dans la chambre n'est pas reçu et réfracté par le prisme, il faut que le reste, qui est inutile à l'expérience, soit intercepté et absorbé par un corps noir, de peur qu'en se réfléchissant de toutes parts dans la chambre, et se mêlant ainsi avec la lumière de l'image, il n'en altère la pureté. Il est avan-

tageux, pour ces expériences, d'employer des prismes à liquides, tels que ceux dont j'ai déjà expliqué la construction; car alors on n'a point à redouter les défauts de transparence ou d'homogénéité dans les matières que le rayon traverse, et la régularité des réfractions en devient plus assurée.

La lumière de l'image réfractée se trouvant ainsi amenée au plus haut degré de pureté et de séparation, si on en fait passer une petite portion à travers un trou rond percé dans un papier noir, comme dans l'expérience rapportée page 401, on peut étudier facilement et isolément ses propriétés dans les différens rayons. Alors, en la réfractant de nouveau à travers un second prisme, on reconnaît, comme dans l'expérience citée, qu'elle ne se divise plus, qu'elle ne change plus de couleur, et que l'image réfractée conserve la forme de l'ouverture par laquelle on l'a transmise. Cette propriété remarquable se conserve non-seulement pour une réfraction, mais pour toutes les réfractions successives que l'on peut faire subir au trait de lumière homogène. Elle n'est pas non plus détruite par la réflexion; car si l'on place dans cette lumière des mouches ou d'autres petits objets, et qu'on les regarde ensuite à travers un prisme, même à travers un prisme très-réfringent, on les voit tout aussi nettement qu'à la vue simple et de la seule couleur qui les éclaire; au lieu qu'on ne peut nullement les distinguer si on les regarde de cette manière, lorsqu'ils sont éclairés par la lumière composée du soleil, les images de leurs diverses parties s'allongeant et se déformant en vertu de la réfrangibilité inégale des différens rayons qui en émanent. On peut faire la même épreuve avec un livre imprimé. S'il est éclairé par une lumière homogène, quelque fine qu'en soit l'impression, les caractères se lisent parfaitement à travers un prisme, tandis que, lorsqu'ils sont éclairés avec la lumière composée, on ne peut nullement les distinguer après la réfraction.

En considérant la marche des faisceaux lumineux rompus par une même surface réfringente sous des incidences diverses, nous avons vu que le sinus de réfraction est toujours en rapport constant avec le sinus d'incidence. Ceci ne peut s'entendre que

de l'axe moyen du faisceau, ou du faisceau tout entier, en faisant abstraction de la dispersion. Car, puisque les divers rayons qui composent le faisceau réfracté sont séparés les uns des autres et diversement inclinés au rayon incident, le rapport de réfraction ne peut pas être le même pour tous; et alors, il devient nécessaire d'examiner si ce rapport une fois déterminé par une première réfraction et pour une incidence déterminée, se conserve sans altération dans toutes les autres; en un mot, il nous faut ici répéter sur chaque rayon en particulier les expériences que nous avons faites page 206, sur l'ensemble du faisceau lumineux.

Ces expériences peuvent se faire de plusieurs manières. La plus directe semblerait être de réfracter successivement le même rayon avec des prismes de même matière, mais d'angles différens, et de mesurer les déviations qu'il subit. Mais alors il faut employer des prismes à liquides; car en se servant de prismes solides, on n'est jamais assuré que deux morceaux différens aient précisément la même réfraction. Il paraît que Newton a employé ce procédé. Il a encore tiré parti, pour cela, de l'expérience que nous avons rapportée page 399, et dans laquelle l'image solaire, réfractée d'abord en haut par un premier prisme, était ensuite rejetée horizontalement par le moyen d'un second prisme de même matière, mais d'un autre angle, qui croisait le premier à angle droit. En effet, considérons d'abord le premier prisme comme un point placé en P, fig. 139; soit PS le rayon solaire direct, et PR, PV, les rayons réfractés reçus à une distance de 10 ou 12 pieds sur un carton blanc perpendiculaire à PS; il est évident qne les angles RPS, VPS exprimeront les déviations éprouvées par les différens rayons, et par conséquent les lignes SR, SV, qui peuvent être mesurées sur le carton, seront les tangentes trigonométriques de ces déviations, en considérant la distance PS du prisme au tableau comme le rayon du cercle. De même, dans la fig. 140, où V′R′ représente l'image rejetée horizontalement par la réfraction du second prisme, les lignes RR′, VV′ seront les tangentes trigonométriques des déviations produites par cette seconde réfrac-

tion. On peut donc mesurer les valeurs de ces tangentes pour différens prismes dont les angles réfringens sont connus, et aussi pour des incidences connues; car nous avons toujours supposé les prismes placés dans la position où l'image devient stationnaire, ce qui fixe l'incidence des rayons lumineux. Avec ces données, on peut voir, par un calcul fort simple, si les déviations observées supposent dans chaque rayon un rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction, et c'est ainsi que Newton s'est assuré, par l'expérience, que cette constance avait lieu réellement.

On pourrait plus exactement encore parvenir à ce même résultat en observant directement la déviation d'un même rayon lumineux à travers un même prisme, sous des inclinaisons diverses, au moyen de l'appareil décrit page 214. Alors, comme on aurait pour but de rendre la dispersion sensible, il faudrait donner aux prismes des angles plus grands que lorsque nous avions dessein d'atténuer cet effet. En mesurant les déviations des différens rayons avec des instrumens divisés, munis de lunettes, on pourra les comparer dans les diverses incidences, et s'assurer que, pour chaque rayon, le sinus d'incidence est toujours en rapport constant avec le sinus de réfraction.

Ces divers procédés sont toujours susceptibles de quelque inexactitude, à cause de la difficulté qu'on éprouve à fixer les limites des différentes couleurs, et à s'assurer que l'on observe réellement les points correspondans de l'image dans les mesures comparatives. Mais lorsque nous nous occuperons de comparer les quantités absolues de la dispersion pour des substances diverses, j'expliquerai une méthode exempte de tous ces inconvéniens, et dont l'application prouve, avec toute l'exactitude possible, la constance du rapport de réfraction pour chaque rayon.

Au reste, si l'on considère la réfraction de la lumière comme l'effet d'une attraction que les corps exercent sur les molécules lumineuses, on peut, ainsi que nous l'avons vu page 264, démontrer par les lois de la mécanique que le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence doit être nécessairement constant

pour chaque espèce de ces particules, et qu'il dépend de l'accroissement de vitesse que l'action du milieu qu'elles traversent tend à leur communiquer. Quant à la cause qui fait que certaines particules lumineuses sont plus déviées par les corps, et que d'autres le sont moins à égale incidence, on ne saurait l'assigner avec certitude. On serait tenté de croire que cette inégalité tient à une différence de masse ou de vitesse; mais alors les corps qui réfractent également une même classe de rayons devraient réfracter aussi également tous les autres. Or, c'est ce qui n'a pas lieu, et nous le prouverons bientôt par des expériences positives. Par exemple, il y a des corps qui réfractent les rayons verts autant et même moins que d'autres corps, tandis qu'ils réfractent davantage les rayons violets. Il faut donc croire que la nature chimique des molécules de la lumière a aussi part à ce phénomène, et fait qu'en traversant différens corps, leurs affinités ne conservent pas entre elles des rapports constans.

Nous avons vu que certains corps cristallisés avaient la propriété singulière de diviser en deux les faisceaux lumineux qui les traversent, et nous avons nommé ce phénomène *la double réfraction*. Dans ce cas, chacun des deux rayons réfractés se trouve aussi dispersé. La loi générale de cette dispersion pour le rayon ordinaire est la même que dans les corps qui réfractent simplement la lumière. Quant au rayon extraordinaire, la loi de sa dispersion est plus composée, parce qu'il éprouve à la fois les forces réfringentes ordinaires et les forces répulsives ou attractives qui émanent de l'axe du cristal. Celles-ci, de même que les précédentes, s'exercent inégalement sur les diverses molécules, et plus énergiquement sur les plus réfrangibles, comme je m'en suis assuré. Ainsi, selon que leur action conspire avec la réfraction ordinaire ou lui est contraire, elles augmentent ou diminuent la dispersion du rayon réfracté extraordinairement. Par exemple, lorsqu'un rayon blanc tombe perpendiculairement sur les faces d'un rhomboïde de spath d'Islande, les forces réfringentes ordinaires ne tendent pas à le disperser; mais la force répulsive qui le rejette vers le petit angle solide de la seconde face, le disperse de manière que les rayons

violets s'écartent plus de la normale que les rayons rouges. Incline-t-on le rayon incident de manière que la réfraction ordinaire contrarie la force répulsive, la dispersion diminue tellement, que, sous une certaine incidence, le rayon extraordinaire est brisé, mais non dispersé. Au contraire, incline-t-on le rayon incident de l'autre côté de la normale, la force réfringente ordinaire conspire avec la force répulsive, et la dispersion du rayon extraordinaire devient plus forte que celle du rayon ordinaire, avec un même ordre de couleurs. Du reste, la réfrangibilité propre de chaque rayon et sa couleur ne sont point altérées ni changées par l'action des cristaux.

Puisque chaque espèce de teinte est ainsi invariablement attachée à chaque espèce de rayons d'une réfrangibilité particulière, nous pouvons, pour abréger, désigner chaque rayon par l'espèce de couleur dont il nous donne la sensation; et ainsi nous nommerons rayons rouges ceux qui sont les moins réfrangibles, et qui produisent la sensation du rouge; rayons jaunes ceux qui produisent la sensation du jaune, et enfin rayons violets ceux qui produisent la sensation du violet; non pas que nous entendions par-là que ces rayons sont réellement rouges, violets ou jaunes, ni qu'ils renferment en eux la couleur, pas plus que les corps sonores ne renferment le son; mais seulement pour exprimer la sensation qu'ils sont capables d'exciter, et qu'ils excitent constamment sur les yeux bien organisés.

Il serait toutefois impraticable d'assigner ainsi à tous les rayons des dénominations particulières; car chaque rayon, doué d'une réfrangibilité différente, produisant sur nos organes la sensation d'une couleur propre, le nombre des nuances qui se suivent dans le spectre doit être infini comme celui des rayons qui les produisent. Mais comme l'œil le plus exercé ne pourrait avoir la sensation distincte d'autant de teintes si peu différentes, il suffit d'établir parmi elles un certain nombre de divisions qui, comprenant toutes les nuances dans leurs intervalles, permettent de fixer leur place et leur caractère

avec une exactitude proportionnée à celle de nos sens. C'est ce qu'a fait Newton ; il a déterminé dans le spectre sept lignes de séparation principales depuis les rayons qui sont les plus réfrangibles jusqu'à ceux qui le sont le moins. En définissant chacune de ces divisions par l'espèce de la teinte qui lui est propre, elles offrent les couleurs suivantes :

VIOLET, INDIGO, BLEU, VERT, JAUNE, ORANGÉ, ROUGE.

Dénominations d'autant plus aisées à retenir, que, rangées dans cet ordre, elles forment un vers alexandrin.

Non-seulement chacun des rayons homogènes compris entre ces diverses limites a son degré propre et invariable de réfrangibilité et de couleur qu'il porte et conserve, quelque réfraction qu'on lui fasse subir, mais, ce qui n'est pas moins remarquable, ces couleurs ne sont pas non plus altérées par les réflexions sur les corps naturels. « Car, dit Newton, tout corps blanc, gris, rouge, vert, bleu, violet, comme le papier, les cendres, la mine de plomb rouge, l'orpiment, l'indigo, la cendre bleue, l'or, l'argent, le cuivre, l'herbe, les fleurs bleues, les violettes, les bulles d'eau teintes de différentes couleurs, les plumes de paon, la teinture du bois de Brésil, et autres choses telles ; tout cela, exposé à une lumière homogène rouge, paraissait entièrement rouge ; à une lumière homogène bleue, paraissait entièrement bleu ; à une lumière verte, entièrement vert, et ainsi du reste ». En un mot, dans la lumière homogène, de quelque couleur que ce fût, tous les corps paraissaient uniquement de la couleur de cette lumière ; avec la seule différence que quelques-uns la réfléchissaient d'une manière plus forte, et d'autres d'une manière plus faible. « Mais, ajoute-t-il, je n'ai point encore vu de corps qui, en réfléchissant une lumière homogène, pût en changer sensiblement la couleur ». On sent que ceci ne s'applique qu'à la lumière parfaitement homogène, et par conséquent, pour répéter ces expériences, il faut avoir épuré l'image solaire avec beaucoup de soin par les procédés que nous avons décrits ; car parmi les corps de la nature qui brillent des plus vives couleurs, il n'en est aucun qui

réfléchisse des couleurs absolument simples et homogènes, comme ces expériences mêmes le prouvent, et comme on peut s'en assurer, puisque toutes ces couleurs peuvent être décomposées par le prisme, et se laissent résoudre en un spectre où l'on reconnaît plusieurs espèces de nuances. Si donc différens corps éclairés par une même lumière blanche nous paraissent avoir des couleurs déterminées, c'est uniquement parce qu'ils réfléchissent plus abondamment les rayons qui produisent la sensation de cette espèce de couleur. Alors, quand on les expose à une lumière bien homogène, où ils n'ont plus à réfléchir que des rayons d'une seule espèce, il faut bien qu'ils paraissent tous de la couleur propre à ces rayons, et il n'y a de différence entre eux que dans la quantité qu'ils peuvent en réfléchir. Mais si on les expose à une lumière mal séparée, alors ils choisissent dans les rayons qui les frappent ceux qu'ils sont les plus aptes à réfléchir; et ces rayons, étant ainsi en plus grande proportion dans la lumière réfléchie que dans la lumière incidente, altèrent sensiblement la teinte de celle-ci : au lieu que cet effet n'arrive jamais quand on expose les corps à une lumière bien homogène.

On peut répéter cette épreuve d'une manière en quelque sorte inverse. Si l'on prend deux corps de couleur diverse et qu'on les éclaire par une même lumière, de laquelle on ait ôté ces couleurs-là, ils paraîtront l'un et l'autre de la même teinte. Par exemple, la couleur de l'or est un jaune presque pur, et celle de l'argent est le blanc, qui renferme toutes les couleurs. Eclairez de l'argent et de l'or par une même lumière naturelle dont vous aurez ôté le jaune, ils paraîtront de la même teinte.

Pour donner de la rigueur à ces définitions, il faut fixer sur le spectre l'étendue comparative que chacune de ces couleurs occupe; c'est ce que fit Newton : ayant introduit un rayon solaire dans sa chambre obscure, il décomposa ce rayon par un prisme de verre avec les précautions indiquées plus haut pour terminer nettement les côtés rectilignes, et faire disparaître toute pénombre. Alors si, dans un endroit quelconque de cette

image, on menait une ligne droite perpendiculaire à ses côtés, on avait sur toute cette ligne droite une même couleur et le même degré de couleur. Il traça donc sur un papier le périmètre du spectre tel que le représente la figure 141, et précisément avec les dimensions que lui donnait son prisme. Alors, posant le papier sur le spectre, il marqua, ou plutôt une autre personne marqua pour lui avec grand soin les lignes droites UU, II, BB, VV, JJ, OO, RR, qui fixaient les limites des sept couleurs principales; de sorte qu'en faisant abstraction des deux extrémités demi-circulaires, l'espace ZZUU comprenait toute l'étendue du violet, UUII tout l'indigo, IIBB tout le bleu, et ainsi du reste. Ces mesures étant répétées plusieurs fois, et prises sur des papiers divers, il se trouva que les côtés rectilignes ZR, ZR de l'image étaient divisés par ces lignes, selon les proportions représentées dans la figure; c'est-à-dire qu'en prenant CZ double de ZR, et regardant cette ligne comme unité, les longueurs CZ, CU, CI, etc. étaient entre elles, sinon exactement, du moins à très-peu près dans le rapport des nombres 1, $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{1}{2}$. La série de ces nombres représente les proportions suivant lesquelles il faudrait diviser une corde pour que ses diverses parties rendissent la série des sons *ut*, *ré*, *mi*♭, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *ut*, dont est formée notre échelle musicale prise dans le mode mineur; seulement le *si* qui en résulterait serait un peu trop haut. Il n'est pas possible d'expliquer à quoi tient cette analogie singulière; mais il est permis de croire qu'elle n'existait qu'approximativement dans les résultats de Newton, et que, frappé de ce rapport singulier entre les perceptions de l'œil et de l'ouïe, il aura cru pouvoir le rendre exact sans trop s'écarter de l'observation. Du moins est-il sûr que, si ce rapport a existé rigoureusement dans les expériences de Newton, il a été amené par l'effet du hasard, d'après la nature du prisme dont il a fait usage; car la proportion de l'espace occupé dans le spectre par les diverses couleurs est différente, selon les diverses substances dont est formé le prisme, ainsi que nous l'avons déjà remarqué. En nous bornant

au cas particulier de son observation, concevons la longueur totale du spectre divisée en 360 parties, ce qui en fera 720 pour la longueur totale CZ; alors prenant sur ce nombre les diverses fractions qui expriment les distances CZ, CU, CI, on aura les limites de chaque couleur, et en les retranchant les unes des autres, on aura les intervalles que ces couleurs occupent; ce sera

pour le violet	80
l'indigo	40
le bleu	60
le vert	60
le jaune	48
l'orangé	27
le rouge	45

Lorsque Newton prit les mesures précédentes, l'angle réfringent de son prisme était de 62° 30′. La position du prisme était toujours celle qui donne la moindre déviation possible, et dans laquelle les angles d'incidence et d'émergence des rayons sont égaux. Il observa l'angle que les rayons incidens directs formaient avec les rayons réfractés qui répondaient à la partie moyenne du spectre, et il trouva cet angle de 44° 40′. La longueur totale de l'image était de 9 pouces $\frac{3}{4}$ ou 10 pouces; sa largeur était de 2 pouces $\frac{1}{8}$; ôtant cette quantité de la précédente, le reste 7 pouces $\frac{3}{4}$ environ exprime la longueur totale occupée par les centres des cercles formés par les rayons hétérogènes. Ce serait par conséquent la longueur de l'image, si le soleil n'était qu'un point. La distance de cette image au prisme était de 18pi $\frac{1}{2}$. Ainsi, en supposant la mesure de l'image prise perpendiculairement aux rayons de moyenne réfrangibilité, on peut regarder cette longueur de 7po $\frac{3}{4}$ comme la corde de l'angle VPR, fig. 142, compris entre les rayons les plus réfrangibles et les rayons les moins réfrangibles, depuis l'endroit du prisme où ils se croisent; d'où il est facile de conclure que cet angle

lui-même était de $2^\circ\ 0'\ 7''$ (1). Avec ces données, on peut calculer les angles de déviation éprouvés par chaque rayon, ainsi que les valeurs des rapports constans de réfraction qui y correspondent pour chacun d'eux. Si, pour fixer les idées, on suppose que les rayons sortent du verre dans l'air sous une incidence commune dont le sinus soit représenté par le nombre 50, les divers sinus d'émergence pour les limites des différentes couleurs auront les valeurs suivantes :

Rouge extrême	77
Limite du rouge et de l'orangé	$77\frac{1}{8}$
de l'orangé et du jaune	$77\frac{1}{5}$
du jaune et du vert	$77\frac{1}{3}$
du vert et du bleu	$77\frac{1}{2}$
du bleu et de l'indigo	$77\frac{2}{3}$
de l'indigo et du violet	$77\frac{7}{9}$
Violet extrême	78

J'exposerai tout-à-l'heure la manière d'obtenir ces nombres; mais je ferai dès à présent remarquer que la limite du violet extrême est nécessairement un peu incertaine, parce que l'extrémité du spectre qui répond aux rayons les plus réfrangibles semble se prolonger indéfiniment, en se dégradant peu à peu d'intensité. Sans doute Newton a choisi pour limite le point où

(1) En effet, si l'on conçoit un cercle décrit du point P avec un rayon PR ou PV représenté par r, que l'on désigne la corde VR par d, et l'angle VPR par x, on aura

$$\sin \tfrac{1}{2} x = \frac{d}{2r}.$$

Dans l'expérience de Newton, on a en pouces, $d = 7{,}75$, $r = 222$,

par conséquent $$\sin \tfrac{1}{2} x = \frac{7{,}75}{444},$$

ce qui, étant évalué par les tables de sinus, donne $x = 2^\circ\ 0'\ 2''$. Newton a pris $5''$ de plus, probablement parce qu'il a fait le calcul en employant quelque méthode d'approximation. Au reste, cette petite différence de $5''$ n'est ici d'aucune importance, car il serait impossible de l'évaluer dans des mesures graphiques, telles que celles que prenait Newton.

la lumière de l'image lui a semblé insensible, mais il est évident que cette partie aurait pu devenir visible, si la lumière incidente eût été plus vive, ou si l'œil de l'observateur eût été plus sensible à son action; ce qui, dans l'un et l'autre cas, aurait reculé la limite assignée par Newton. Ce raisonnement nous montre qu'il faut regarder cette limite comme approximative.

Je passe maintenant à l'exposition des calculs sur lesquels ces résultats sont fondés. Nous avons vu, page 394, qu'en supposant le prisme placé dans la position où la déviation Δ est un minimum, le rapport n du sinus d'incidence au sinus de réfraction est donné par la formule

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\Delta + a)}{\sin \frac{1}{2} a}.$$

à la rigueur, pour appliquer cette expression à chacun des rayons simples, il faudrait amener successivement le prisme dans la position du minimum relative à chacun d'eux; mais à cause du peu de différence qui existe entre leur réfrangibilité, on ne trouverait pas entre ces positions de différence sensible; de sorte que l'on peut supposer le prisme convenablement disposé pour tous les rayons de diverses couleurs, quand il l'est pour les rayons moyens. Considérons d'abord les rayons violets et les rouges qui forment les extrémités du spectre; l'angle qu'ils comprennent est $2^\circ\ 0'\ 7''$, dont la moitié vaut $1^\circ\ 0'\ 3'',5$; retranchant cette quantité de la déviation moyenne $44^\circ\ 40'$, on aura la déviation des rayons rouges; l'ajoutant, on aura celle des violets; cela donnera

$$\begin{array}{ll} \text{rouges} & \Delta' = 44^\circ\ 40' - 1^\circ\ 0'\ 3'',5 \\ \text{violets} & \Delta'' = 44^\circ\ 40' + 1^\circ\ 0'\ 3'',5. \end{array}$$

De là, avec l'angle réfringent du prisme qui est $62^\circ\ 30'$, on déduirait les valeurs de n' et de n'' relatives à ces deux sortes de rayons. Mais à cause de la petitesse de la quantité par laquelle Δ' et Δ'' diffèrent, il devient beaucoup plus exact de calculer le rapport $\frac{n''-n'}{n''+n'}$; en effet, les expressions des deux termes de ce rapport sont

$$n'' - n' = \frac{\sin \frac{1}{2}(\Delta'' + a) - \sin \frac{1}{2}(\Delta' + a)}{\sin \frac{1}{2} a};$$

$$n'' + n' = \frac{\sin \frac{1}{2}(\Delta'' + a) + \sin \frac{1}{2}(\Delta' + a)}{\sin \frac{1}{2} a},$$

et elles peuvent se mettre sous la forme

$$n'' - n' = \frac{2 \sin \frac{1}{4}(\Delta'' - \Delta') \cos \frac{1}{4}(\Delta'' + \Delta' + 2a)}{\sin \frac{1}{2} a};$$

$$n'' + n' = \frac{2 \cos \frac{1}{4}(\Delta'' - \Delta') \sin \frac{1}{4}(\Delta'' + \Delta' + 2a)}{\sin \frac{1}{2} a};$$

de sorte qu'en les divisant l'une par l'autre il vient

$$\frac{n'' - n'}{n'' + n'} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{4}(\Delta'' - \Delta')}{\operatorname{tang} \frac{1}{4}(\Delta'' + \Delta' + 2a)}. \qquad (1)$$

Alors la petitesse du facteur tang $\frac{1}{4}(\Delta'' - \Delta')$ permet de faire très-exactement le calcul avec les tables de logarithmes ordinaires. Pour les deux sortes de rayons que nous avons considérés on a

$$\tfrac{1}{4}(\Delta'' - \Delta') = 30'\ 2''; \quad \tfrac{1}{4}(\Delta'' + \Delta' + 2a) = 53°\ 35',$$

ce qui donne $\quad \dfrac{n'' - n'}{n'' + n'} = 0{,}0064451,$

et par suite $\quad \dfrac{n''}{n'} = 1 + \dfrac{1}{77{,}079} = \dfrac{78{,}079}{77{,}079}.$

Newton a pris en nombres ronds $\frac{78}{77}$ pour le rapport de n'' à n'

Ainsi, en représentant par $\frac{77}{c}$ la valeur absolue de n qui convenait aux rayons rouges dans son expérience, $\frac{78}{c}$ sera celle qui convenait aux rayons violets. Pour avoir les intermédiaires, il faut considérer que, d'après l'équation (1), les différences des valeurs de n relatives à deux couleurs quelconques sont, à très-peu de chose près, proportionnelles aux différences $\Delta'' - \Delta'$ des déviations correspondantes; car, à cause de la petitesse de ces dernières, on pourrait, sans erreur sensible, substituer $2\Delta'$ à $\Delta'' + \Delta'$ dans l'expression de $n'' - n'$. Or, les différences $\Delta'' - \Delta'$ sont elles-mêmes proportionnelles aux intervalles

linéaires mesurés sur le spectre entre les limites des différentes couleurs. Puis donc que nous avons trouvé plus haut les expressions numériques de ces intervalles, il n'y a qu'à partager la différence totale $\frac{1}{c}$ dans les mêmes rapports, et ajouter les résultats successifs à la valeur $\frac{77}{c}$ qui convient aux rayons rouges. Par exemple, l'espace total occupé par les rayons rouges étant $\frac{45}{360}$ ou $\frac{1}{8}$ de la longueur totale du spectre, il n'y aura qu'à ajouter cette fraction au nombre 77 pour avoir le numérateur de n qui convient aux rayons intermédiaires entre le rouge et l'orangé. De même l'espace total occupé par les rayons rouges et orangés étant $\frac{45+27}{360}$ ou $\frac{1}{5}$, il faudra ajouter cette fraction à 77, et l'on aura le numérateur de n, qui convient aux rayons intermédiaires entre l'orangé et le jaune. On continuera ainsi jusqu'au violet extrême, où la quantité à ajouter se trouvant $\frac{360}{360}$, c'est-à-dire 1, on retombera sur le numérateur 78.

D'après ce calcul, la valeur de n pour les rayons situés au milieu de la longueur du spectre, sera $\frac{77,5}{c}$, c étant un nombre que nous n'avons pas encore déterminé; mais nous pouvons maintenant le faire d'après la déviation de ces rayons que Newton avait observée directement, et qu'il nous a dit être de 44° 40′. En effet, avec cette valeur de Δ, notre formule générale donne $n = 1,5512$ et en l'égalant à $\frac{77,5}{c}$, on en tire

$$c = \frac{77,5}{1,5512} = 49,96.$$

Newton a pris en nombres ronds $c = 50$. Ce sera donc là l'expression numérique par laquelle il faudra représenter le sinus commun d'incidence intérieure des rayons sur le verre, quand les sinus de leur émergence dans l'air seront représentés par les nombres insérés plus haut entre 77 et 78.

Le calcul que nous venons de faire, suppose le prisme placé dans la position où l'image réfractée est stationnaire. Mais on peut également conclure les différences des rapports de réfraction, d'après des mesures de déviations prises dans toute autre position du prisme. Pour le faire voir, je reprends les formules de la page 209.

$$\tang(\varphi' + \tfrac{1}{2}a) = \frac{\tang\tfrac{1}{2}(\Delta + a) \cdot \tang[\phi + \tfrac{1}{2}(\Delta + a)]}{\tang\tfrac{1}{2}a}$$

$$\cos\phi = n\cos\phi',$$

qui déterminent généralement le rapport de réfraction n en fonction de l'incidence et de la déviation observées, lorsque l'objet lumineux est placé à une distance infinie. Puis, supposant l'incidence φ constante, ainsi que l'angle réfringent a du prisme, je fais varier Δ d'une petite quantité $d\Delta$, et je cherche le petit accroissement dn qui en résulte dans le rapport de réfraction. Pour cela, il ne faut que différencier ces deux équations, ce qui donne

$$\frac{d\phi'}{\cos^2(\varphi' + \tfrac{1}{2}a)} = \frac{d\Delta}{2\tang\tfrac{1}{2}a}\left[\frac{\tang[\phi + \tfrac{1}{2}(\Delta + a)]}{\cos^2\tfrac{1}{2}(\Delta + a)} + \frac{\tang\tfrac{1}{2}(\Delta + a)}{\cos^2[\phi + \tfrac{1}{2}(\Delta + a)]}\right];$$

$$0 = \cos\varphi'\, dn - n\sin\varphi'\, d\phi';$$

ou, en réduisant les termes de la première au même dénominateur, et tirant dn de la seconde

$$d\phi' = \frac{d\Delta\cos^2(\phi' + \tfrac{1}{2}a)\sin(\varphi + \Delta + a)\cos\varphi}{2\tang\tfrac{1}{2}a\cos^2[\varphi + \tfrac{1}{2}(\Delta + a)]\cos^2\tfrac{1}{2}(\Delta + a)};$$

$$dn = n\tang\varphi'\, d\phi' = \frac{n^2\sin\varphi'}{\cos\phi} \cdot d\phi';$$

enfin, éliminant $d\varphi'$ entre elles, et remplaçant le petit arc $d\Delta$ par son sinus, il vient

$$dn = \sin d\Delta \cdot \frac{n^2\sin\varphi'\sin^2(\varphi + \Delta + a)\cos^2(\varphi' + \tfrac{1}{2}a)}{2\tang\tfrac{1}{2}a\cos^2[\phi + \tfrac{1}{2}(\Delta + a)]\cos^2\tfrac{1}{2}(\Delta + a)}.$$

Ce calcul suppose évidemment les variations angulaires $d\Delta$ $d\varphi'$ assez petites pour que l'on puisse négliger les carrés de leurs sinus. Ainsi, en les appliquant, il suffira de mettre dans le second membre pour Δ, φ' et n les valeurs qui conviennent aux rayons moyens du spectre. De cette manière, le

coefficient de sin $d\Delta$ deviendra constant pour tous les rayons, et en le nommant B, on aura en général

$$dn = \text{B} \sin d\Delta \, ;$$

c'est-à-dire, que les différences des rapports de réfraction seront sensiblement proportionnelles aux différences de déviation.

La comparaison des valeurs de $\frac{dn}{n}$ relativement aux mêmes rayons dans diverses substances est très-propre à montrer si la loi de la dispersion y est différente ou semblable. Pour les obtenir, il faudrait faire successivement tomber un rayon de lumière blanche sur des prismes de différente nature, et observer dans chacun d'eux les valeurs de $d\Delta$ relativement aux limites des différentes couleurs. On mesurerait aussi les valeurs de Δ et n relatives aux rayons moyens; avec ces données, la formule déterminerait les valeurs de $\frac{dn}{n}$ relatives à chaque rayon simple.

Newton fit quelques essais de ce genre; mais parmi les substances qu'il éprouva, le hasard ne lui en offrit point qui eussent des différences de dispersion assez fortes pour être sensibles aux procédés qu'il employait. Il crut donc que la distribution des couleurs y était toujours la même, et que tous les spectres pouvaient se conclure d'un seul par une simple proportionnalité. Si l'on conçoit un faisceau composé de toutes sortes de rayons, tombant à l'intérieur d'une substance quelconque, sous l'incidence commune i, et sortant dans le vide sous l'angle d'émergence r, variable avec la réfrangibilité, les différences $\sin r - \sin i$, calculées pour les divers rayons simples, doivent, selon Newton, conserver toujours entre elles les mêmes rapports. Ainsi, en représentant par (i) et (r) les valeurs des deux angles analogues observés dans le verre, de sorte que $\sin (r) - \sin (i)$ soit la différence de leurs sinus pour un rayon d'une certaine nature, on aura en général, relativement à ce rayon,

$$\sin r - \sin i = \text{A} \left[\sin (r) - \sin (i) \right], \qquad (1)$$

A étant une constante différente pour chaque substance. On conçoit, en effet, qu'une semblable loi est propre à représenter

tous les spectres dont les proportions différeront peu les unes des autres. Alors, parmi toutes les valeurs possibles de l'incidence intérieure i, il convient de choisir celle qui donne $A = 1$, ce que l'on trouvera par cette condition même, c'est-à-dire, en supposant $A = 1$, et cherchant la valeur de i pour un rayon simple quelconque, dont le rapport de réfraction sera connu dans la substance que l'on veut considérer. En effet, si l'on nomme ce rapport n, le sinus d'émergence $\sin r$ sera égal à $n \sin i$, et en substituant sa valeur, on tirera

$$\sin i = \frac{\sin (r) - \sin (i)}{n - 1}.$$

la valeur de i ainsi calculée sera l'incidence commune. Quand on la connaîtra, l'équation (1) où $A = 1$ donnera en général

$$\sin r = \sin i + \sin (r) - \sin (i) ;$$

c'est-à-dire que, pour avoir le sinus d'émergence variable qui convient à chaque rayon simple, il suffira d'ajouter au sinus commun d'incidence la différence des sinus observée dans le verre pour la même espèce de rayons. Alors $\sin i$ et $\sin r$ devenant tous deux proportionnels à $\sin (i) - \sin (r)$, on voit que, si ces derniers ont un même dénominateur, on peut le supprimer dans le calcul.

Par exemple, Newton nous dit que, dans l'eau distillée, le rapport constant de réfraction pour les rayons rouges extrêmes est $\frac{4}{3}$. Or, dans le verre, la différence $\sin (r) - \sin (i)$ relative à ces rayons est 27 quand le sinus commun d'incidence est représenté par le nombre 50. On tire donc de ces données

$$\sin i = \frac{27}{\frac{4}{3} - 1} = 81.$$

Ainsi le nombre 81 représentera donc le sinus commun d'incidence dans l'eau pour que A devienne égal à 1. Il faudra ensuite ajouter ce sinus aux différences $\sin (r) - \sin (i)$ relatives aux divers rayons simples, lesquelles, d'après ce que l'on a vu plus haut, sont 27, $27\frac{1}{8}$, $27\frac{1}{5}$, $27\frac{1}{3}$, $27\frac{1}{2}$, $27\frac{2}{3}$, $27\frac{7}{9}$, 28,
et la somme exprimera les sinus de réfraction qui y correspondent. On obtient ainsi les nombres

108, $108\frac{1}{2}$, $108\frac{1}{5}$, $108\frac{1}{3}$, $108\frac{1}{2}$, $108\frac{2}{3}$, $108\frac{7}{9}$, 109.

Tels seront donc, pour l'eau distillée, les valeurs des sinus d'émergence aux différentes limites des couleurs du spectre, lorsque le sinus commun d'incidence intérieure sera représenté par le nombre 81. Il paraît que ces résultats sont encore assez conformes à l'expérience; mais la loi de proportionnalité de laquelle Newton les a déduits ne peut être employée lorsqu'il s'agit de comparer avec rigueur les dispersions opérées par des substances très-diverses, comme cela a lieu dans la construction des lunettes achromatiques. On trouve alors que la loi de la dispersion est réellement différente suivant la nature chimique des substances, et qu'il faut, pour obtenir des résultats exacts, l'observer sur chaque substance dont on veut faire usage. Nous donnerons les procédés les plus précis pour l'obtenir; et sans insister davantage sur cette erreur d'un si grand homme, nous continuerons plutôt à exposer la série des autres phénomènes qu'il a constatés.

RECOMPOSITION DES COULEURS.

Nous avons vu que la réfrangibilité et la couleur de chaque rayon homogène ne sont changées ni par la réfraction, ni par la réflexion. Nous allons maintenant faire voir que ces propriétés ne sont pas altérées non plus par le mélange des rayons de diverses couleurs; mais que chacun d'eux les conserve dans le mélange, et les transporte invariablement avec lui. Cette importante vérité est prouvée par les expériences suivantes de Newton.

On introduit un trait de lumière solaire dans la chambre obscure, et après l'avoir brisé par un prisme, fig. 143, on reçoit le spectre VR sur une lentille L, placée verticalement à une distance du prisme égale au double de sa distance focale; alors cette lentille réunit les rayons en un foyer qui se trouve placé, de l'autre côté de sa surface, à une distance égale à celle du point P, à partir duquel divergent les rayons réfractés. Ceci a été démontré page 404. Au-delà du foyer, les rayons divergent de nouveau, et vont former sur le tableau blanc T un autre spectre V'R', inverse du pre-

mier VR, parce que l'interposition de la lentille a renversé les couleurs. L'appareil étant ainsi disposé, examinons les diverses modifications que les rayons y subissent. D'abord nous les voyons dispersés en RV par une première réfraction ; cette dispersion subsiste encore après qu'ils ont traversé la lentille, et les couleurs qui appartiennent à chaque rayon ne sont pas changées ; car si l'on place un papier blanc près de la surface postérieure de la lentille L, on y voit encore un spectre pareil à RV, et dans lequel l'ordre des couleurs est le même. A mesure que l'on s'éloigne de la lentille, ce spectre devient plus petit, parce que les rayons qu'elle a rendus convergens se rapprochent de plus en plus les uns des autres ; enfin ils se réunissent au foyer F, et y forment sur le papier une image blanche et circulaire. A la vérité, ils ne se réunissent pas tous rigoureusement en un seul point ; car nous avons vu que le foyer des rayons violets doit être plus près de la lentille que le foyer des rayons rouges, et que ceux des autres rayons sont intermédiaires entre ces deux-là. Mais si l'on représente par ABCD l'espace dans lequel ils se croisent, quoique cet espace ne soit pas un point, il est certain que les rayons s'y rencontrent ; et néanmoins, après en être sortis, ils se séparent de nouveau avec leurs propriétés originelles ; car ils portent ces propriétés dans la formation de l'image R'V', sur laquelle on peut faire toutes les mêmes expériences que l'on ferait sur un autre spectre qui n'aurait point traversé la lentille L, et dont les rayons ne se seraient pas croisés au foyer F ; d'où l'on voit que leur rencontre à ce point n'a nullement altéré leur réfrangibilité ni leurs couleurs, comme cela serait arrivé si, en se croisant, ils eussent exercé quelque action les uns sur les autres.

Revenons maintenant à l'image qui se forme au foyer F ; elle est le résultat de l'impression simultanée que produisent sur notre œil tous les différens rayons qui se réunissent dans cet espace. Ainsi cette réunion est la condition nécessaire pour exciter la sensation de la blancheur ; et les rayons sont encore capables de l'exciter après avoir été dispersés par le prisme P,

et réunis par la lentille L, tout aussi bien que lorsqu'ils étaient réunis primitivement dans le faisceau incident.

A la vérité, nous avons déjà remarqué que les rayons de diverses couleurs ne sont pas rigoureusement réunis dans un même foyer par la lentille, mais qu'ils forment, à partir de sa seconde surface, des cônes d'inégales longueurs, ce qui doit rendre leur mélange moins parfait que dans le faisceau incident. Mais cette réunion, qui n'a pas lieu dans le concours des rayons mêmes, est complétée par l'action du tableau blanc sur lequel ils tombent; car ce tableau, en les réfléchissant de toutes parts, comme ferait un rayonnement direct, les mêle aussi bien qu'ils l'étaient dans la lumière incidente. Aussi n'aperçoit-on alors aucune coloration, excepté sur les bords extérieurs de l'image, où les cônes formés par les rayons les plus réfrangibles débordent toujours un peu. Si l'on avait quelque intérêt d'atteindre cette perfection idéale, on y parviendrait en réunissant les rayons avec un miroir elliptique, au lieu de les réunir avec une lentille. Il faudrait placer un des foyers de ce miroir au point R, fig. 144, d'où les rayons divergent en sortant du prisme; et alors la réflexion sur le miroir MN, les réunissant tous en l'autre foyer R′, donnerait en ce point une image du faisceau parfaitement circulaire, et de même grosseur que R : mais cette rigueur mathématique n'est point nécessaire pour établir des résultats dont nos sens sont les seuls juges.

D'après l'idée que cette expérience nous donne sur la cause de la blancheur, il est présumable que cette sensation sera modifiée si l'on soustrait quelques-uns des rayons qui concourent à la produire. C'est en effet ce qui a lieu; car ayant fixé le tableau au foyer F, fig. 143, où se forme l'image blanche et circulaire, si l'on intercepte sur la lentille quelques-uns des rayons colorés qui concourent à la produire, en couvrant l'espace sur lequel ils tombent avec une règle noire placée transversalement sur le spectre, aussitôt l'image formée au foyer cesse d'être blanche, et la couleur qu'elle prend est celle que doit donner le mélange des couleurs restantes. Mais si l'on ôte la règle, et qu'on laisse passer de nouveau les couleurs in-

terceptées, de manière qu'elles tombent sur cette couleur composée, elles redonneront le blanc. Par exemple, si le violet, le bleu et le vert sont interceptés, le jaune, l'orangé et le rouge qui restent composeront une espèce d'orangé sur le tableau; mais si, après cela, on laisse de nouveau passer les couleurs interceptées, en se mêlant avec cet orangé, elles reproduiront le blanc. De même, si le rouge et le violet sont interceptés, le jaune, le vert et le bleu qui restent composeront une espèce de vert sur le tableau; après quoi, si on laisse passer de nouveau le rouge et le violet, en se mêlant avec le vert, ils reproduiront du blanc. On peut répéter ces décompositions et ces recompositions aussi souvent qu'on le veut; elles se feront toujours de la même manière; elles reproduiront toujours de semblables alternatives, pourvu toutefois que l'œil ait le temps de les apprécier séparément. Car si l'on fait mouvoir très-rapidement la règle sur le spectre RV, il arrive un terme où l'œil ne peut plus saisir la variété des teintes qui se succèdent, et qui sont interrompues par des intervalles de blancheur; et alors on voit toujours du blanc. Cette expérience réussit encore mieux en se servant d'un carton noir, fig. 143, dans lequel on a découpé plusieurs bandes pleines et parallèles, séparées par des bandes vides. Si l'on promène lentement ce réseau devant le spectre RV, on voit se succéder au foyer F une infinité de couleurs diverses, dont aucune n'est réellement blanche, puisqu'il y a toujours un certain nombre de rayons interceptés; cependant, lorsqu'on fait mouvoir le carton très-rapidement, les impressions de ces diverses couleurs, se succédant avec promptitude dans nos organes, produisent encore la sensation du blanc. Cela vient de ce que l'impression produite par une couleur quelconque sur notre œil, subsiste et dure pendant un certain intervalle de temps. Alors, quand les diverses couleurs se succèdent plus rapidement que cet intervalle, les sensations qui en résultent se superposent en partie et doivent conséquemment produire le même effet que des impressions simultanées; c'est-à-dire, qu'elles doivent nous donner le sentiment de la blancheur, comme elles le donnent quand tous les rayons sont réfléchis en même temps du foyer

F. Or, que la sensation produite en nous par la lumière subsiste ainsi un certain temps, c'est ce que prouve l'expérience connue d'un charbon ardent que l'on fait tourner rapidement en cercle; car bien que le charbon ne se trouve à chaque instant qu'en un seul endroit, nous ne distinguons pas la succession de ses positions diverses, et nous ne voyons qu'un cercle de feu continu, rentrant sur lui-même, parce que le charbon revient en chaque point de son cercle avant que la sensation produite par la lumière qu'il avait envoyée de ce point à la révolution précédente soit tout-à-fait terminée. On a cherché à conclure de là le temps que dure la sensation, en cherchant à quel degré de vitesse l'œil commence à distinguer les positions successives du charbon, et on a ainsi trouvé que cette durée est fort sensible. Nous verrons plus tard que la même chose s'observe dans les sensations qu'excite en nous la lumière réfléchie par les corps qui ne sont pas lumineux par eux-mêmes, et qu'on peut produire la sensation de la blancheur en faisant succéder rapidement devant l'œil des papiers diversement colorés, dont les surfaces ont entre elles certaines proportions de grandeur.

Nous avons prouvé que les propriétés colorifiques des rayons lumineux homogènes ne sont pas altérées par les forces réfléchissantes; nous devons donc présumer que ces forces ne détruiront pas non plus la propriété qu'ils ont de former de la blancheur par leur mélange, quand ils ont été séparés. C'est en effet ce que prouve l'expérience. Soit SI un rayon blanc introduit dans la chambre obscure, fig. 145; brisons-le par un prisme ABC, qui, en le dispersant, produise le spectre RV sur un tableau blanc placé au fond de la chambre, à une distance de 5 ou 6 mètres. Supposons maintenant qu'un observateur placé en O, tout près du premier prisme, tienne devant ses yeux un prisme semblable, A′B′C′, formé de la même substance, et ayant le même angle réfringent. Si l'observateur place ce second prisme parallèlement au premier, les rayons des diverses couleurs, émanés des différens points du spectre RV, rencontreront le prisme A′B′C′ précisément sous

les mêmes angles qu'ils formaient à leur émergence avec les surfaces du premier ; et puisque nous avons prouvé d'ailleurs que leur réfrangibilité n'est point changée par la réflexion, ils se conduiront encore ici comme dans le premier prisme, y subiront les mêmes réfractions dans un ordre contraire, et enfin formeront à leur sortie en O un faisceau de rayons émergens parallèles, comme ils en formaient un à leur incidence en I. L'observateur, en recevant tous ces rayons ensemble, doit donc éprouver encore la sensation de blancheur, si toutefois la faculté de produire cette sensation n'est point altérée par la réflexion: c'est en effet ce que l'expérience confirme ; mais, pour la faire avec exactitude, il faut employer diverses précautions.

La première et la plus importante, c'est que le tableau qui réfléchit le spectre soit bien blanc ; car nous avons déjà remarqué que les corps colorés nous paraissent tels parce qu'ils réfléchissent certains rayons plus abondamment que d'autres : par conséquent, si le tableau réflecteur était coloré, les proportions des rayons lumineux, dans le spectre réfléchi, ne seraient plus les mêmes que dans la lumière directe ; et par conséquent le second prisme, en les réunissant, ne donnerait plus un faisceau blanc. De plus, le rassemblement des rayons n'ayant lieu que dans une position particulière du second prisme, lorsqu'il est parallèle au premier, il faut, pour trouver cette position, le faire tourner lentement autour de son axe, de manière à rassembler peu à peu les couleurs, jusqu'à ce qu'enfin on les réunisse tout-à-fait. Enfin il serait bien difficile de trouver deux prismes qui fussent rigoureusement égaux entre eux, et l'on n'y pourrait peut-être parvenir avec certitude qu'en sciant un seul et même prisme dans son milieu, et se servant de ces deux moitiés ; mais cette parfaite égalité n'est pas du tout nécessaire à l'expérience ; et si nous l'avons supposée, c'était seulement pour rendre la recomposition des rayons plus évidente et plus facile à concevoir. Quel que soit le prisme dont on fait usage, pourvu qu'il ne soit pas extrêmement différent du premier, on peut toujours trouver une position, et même une infinité de positions telles qu'il recompose la lumière réfléchie par le spectre.

Pour les trouver, placez-vous d'abord à peu de distance du tableau réflecteur, et mettez le prisme horizontalement devant vos yeux, de façon que son angle réfringent soit tourné en haut comme celui du premier prisme. Dans ce cas, la proximité du tableau fera que les diverses parties du spectre seront réfractées vers votre œil sous des incidences très-inégales. C'est pourquoi elle vous paraîtront seulement déviées de leur place, et plus élevées. Mais les couleurs n'y seront pas encore compensées, c'est-à-dire que, si le violet V est en bas et le rouge en haut dans le spectre, vous verrez aussi le violet en bas, par exemple, en V′, et le rouge en haut, par exemple, en R′. Alors, si vous vous éloignez peu à peu du tableau T, vous verrez l'image du spectre diminuer peu à peu de longueur ; et en vous éloignant toujours, vous trouverez une position où elle sera devenue tout-à-fait circulaire. Enfin, au-delà de cette limite, en vous éloignant davantage, la décomposition des couleurs aura lieu de nouveau, mais dans un ordre renversé, c'est-à-dire que le violet paraîtrait en haut et le rouge en bas.

Cette recomposition de couleurs par des réfractions égales et inverses peut encore se produire avec un seul prisme, au moyen des réflexions intérieures. Voici l'expérience telle que M. Charles me l'a communiquée. Soit ABD, fig. 146, un prisme équilatéral, plaçons-le relativement au rayon incident SI, dans la position qui donne le minimum de déviation pour les rayons moyens, de sorte que ces rayons se réfractent suivant II′, parallèlement à la base du prisme. Dans ce cas, le faisceau émergent, étant reçu sur un carton blanc, donne un spectre coloré V′R′, dans lequel V′ désigne le violet, et R′ le rouge. Mais si l'expérience est faite dans une chambre obscure, on observe encore cinq autres images qui sortent par les diverses faces du prisme, savoir, deux colorées C″, C‴, qui présentent toutes les couleurs du spectre, et trois autres tout-à-fait blanches B′, B″, B‴. Pour concevoir comment ces diverses images se forment, il ne faut que jeter les yeux sur la fig. 146, dans laquelle M. Charles a tracé la route du faisceau lumineux avec toutes les réflexions et réfractions qu'il éprouve.

Car d'abord, à son entrée en I dans le prisme, il éprouve sur la première face AB une réflexion partielle qui produit l'image blanche B'. Ensuite poursuivant sa route, il va se réfracter de nouveau à la seconde surface, et cette seconde réfraction, dispersant les rayons dans le même sens que la première, produit la première image colorée C'. Mais tout le faisceau qui est entré dans le prisme ne contribue pas à cette image. Car une portion de toutes les couleurs se réfléchit intérieurement en I', et retourne vers la surface DA ; là elle se partage encore en deux faisceaux, l'un émergent, I'' B'', l'autre réfléchi I'' I'''. Or, d'après la symétrie de la figure, il est facile de voir que, pour chaque espèce de rayon simple, l'incidence intérieure en I'' est exactement égale à l'angle de réfraction intérieure en I; d'où il suit que tous les rayons, après leur sortie, doivent redevenir parallèles entre eux, comme ils l'étaient en I dans leur incidence. Ainsi le cylindre qu'ils forment alors étant reçu perpendiculairement sur un carton blanc, y formera une tache ronde, composée de toutes les couleurs du spectre, dont les intérieures se superposeront et les extérieures seront séparées ; mais cette séparation étant fort petite, si le rayon incident est mince, elle ne sera pas aperçue lorsqu'on regardera la tache d'un peu loin; et alors celle-ci paraîtra blanche *par superposition*. Quant au faisceau réfléchi I'' I''', il est exactement dans le même cas que s'il provenait de la réfraction d'un rayon blanc I'' B_{I}'', disposé symétriquement à I'' B'', de l'autre côté de la normale au point I''; d'où l'on voit tout de suite qu'étant arrivé en I''', il devra donner par réfraction un spectre coloré C'', exactement pareil à C' ; et par réflexion un faisceau aussi dispersé I''' I^{IV} parallèle à II', mais dans lequel la disposition des couleurs est exactement inverse; c'est-à-dire qu'en I^{IV} les incidences intérieures des rayons sont les mêmes qu'en I. C'est pourquoi le faisceau émergent en I^{IV} doit être composé de rayons parallèles, et donner la troisième image blanche en B'''. Mais la réflexion intérieure, renvoyant une partie du faisceau en I^{V}, donne par émergence un nouveau spectre coloré C''', et le reste se réfléchissant encore, va rejoindre le point d'incidence I, du moins si le prisme est équilatéral,

comme nous l'avons supposé, ce qui fait qu'il ne se forme en tout que six images, comme en effet l'expérience le montre. Cette multiplicité devient souvent un obstacle à la pureté des expériences dans la chambre obscure, à cause de la lumière qu'elle répand de toutes parts ; et l'unique moyen d'en prévenir l'effet, c'est d'étendre sur les surfaces du prisme une couche épaisse d'encre de Chine, en laissant seulement libres les ouvertures nécessaires pour le passage des faisceaux lumineux.

C'est ici le lieu de rapporter une expérience qui semble, au premier coup d'œil, montrer que les propriétés colorifiques des rayons peuvent être altérées par la réflexion, quoiqu'en effet elle prouve réellement le contraire. Pour cela il faut reprendre l'appareil dont nous avons fait usage tout-à-l'heure, et dans lequel les rayons refractés étaient réunis par une lentille, fig. 143. Si l'on place au foyer F un papier blanc perpendiculaire à l'axe du faisceau lumineux, la lumière qui tombe sur le papier paraîtra blanche ; mais si on y substitue un plan métallique poli, qui réfléchisse la lumière dans quelque point de la chambre, elle paraîtra colorée. Il semble donc que les propriétés qu'avaient les rayons, en tombant sur le miroir, se trouvent ici altérées par la réflexion ; mais cette opinion est détruite par un examen attentif. Les rayons lumineux tombent, à la vérité, à très-peu près sur le même point du plan métallique, mais non pas sous les mêmes inclinaisons. Comme ils se réfléchissent en formant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence, il faut nécessairement que la réflexion les sépare ; en sorte qu'ils ne font que suivre au-delà du miroir la divergence qu'ils avaient en parvenant à sa surface ; et c'est ainsi qu'ils auraient divergé au-delà du foyer F, même si on les eût laissé continuer directement leur chemin. Lorsque les rayons tombaient ensemble et perpendiculairement sur le papier, leur réflexion ne se faisait pas de cette manière, parce que le papier n'est pas un corps poli ; chacun d'eux se trouvait alors dispersé dans tous les sens indifféremment, à partir du point d'incidence ; et chaque point du papier dispersant ainsi à la fois tous les rayons qui tombaient sur lui, il s'ensuit que ces rayons

parvenaient ensemble à l'œil. Mais, même dans cette circonstance, la séparation des couleurs se fait encore sentir quand le papier est fort incliné aux rayons, parce que, bien qu'il ne soit pas poli, il n'est pas tout-à-fait mat, et qu'il réfléchit régulièrement une partie de la lumière incidente, principalement lorsque les rayons incidens font de petits angles avec sa surface. Cette propriété est commune à tous les corps, et même au verre dont on a exprès ôté le poli en usant sa surface avec du sable, ainsi que nous l'avons déjà remarqué en parlant de la réflexion.

Dans les expériences précédentes, on a produit du blanc en réunissant les rayons hétérogènes dispersés par la réfraction d'un premier prisme, mais on peut en produire également en réunissant les couleurs différentes données par différens prismes, comme le montre l'expérience que nous allons rapporter.

On forme un grand prisme à liquide en lutant ensemble deux glaces sous un angle de 60 degrés environ, après quoi on verse entre elles de l'eau pure ou tout autre liquide quelconque. Pour que l'expérience ait tout le succès possible, il faut que les côtés AC BC de l'angle réfringent du prisme, fig. 147, aient un ou deux décimètres de longueur. L'étendue dans le sens de l'axe du prisme est indifférente. Quand on a construit cet appareil, on taille un morceau de carton noir, ou une plaque de métal égale à la face antérieure ACDE du prisme, et dans cette plaque on découpe une suite de fentes rectangulaires d'environ deux millimètres de large, séparées les unes des autres par des intervalles de pareilles grandeurs; puis on adapte cette plaque à la face antérieure du prisme, en prenant garde que les grands côtés des ouvertures soient bien parallèles à ses arêtes. On établit l'appareil dans une ouverture de même dimension, faite au volet de la chambre obscure, et on le dispose de manière que la lumière du soleil vienne s'y réfracter. Alors, si l'on reçoit les rayons émergens sur un carton blanc qui leur soit perpendiculaire, et qui soit d'abord placé près de la face postérieure du prisme, par exemple, à une distance d'un décimètre, on voit autant de spectres co-

lorés qu'il y a de fentes, et chacun d'eux contient toutes les couleurs qui se trouvent dans tous les autres spectres formés par des prismes. Entre ces espaces colorés sont d'autres espaces obscurs répondant aux portions de la plaque DC qui ont été conservées. En éloignant le carton davantage, on voit les spectres colorés se dilater de plus en plus, et les espaces noirs qui les séparaient diminuer. Enfin, si l'on éloigne toujours le carton, ces espaces s'évanouissent tout-à-fait, et les couleurs des spectres voisins commencent à empiéter les unes sur les autres; d'abord les inférieures et les supérieures, c'est-à-dire les rayons rouges et les violets, et ensuite les autres, jusqu'à ce qu'enfin, leur mélange étant devenu assez complet, ils forment du blanc, excepté dans les extrémités V et R des faisceaux extrêmes, qui, n'étant pas recouvertes par les autres spectres, conservent les teintes qui leur sont propres. Cela arrivera ainsi quand le carton se trouvera à une distance du prisme égale à dix ou douze fois la longueur du côté AC de l'angle réfringent. En éloignant encore le carton davantage, on est porté à croire que la blancheur serait encore plus parfaite, à cause d'un mélange plus complet des rayons; mais cela n'arrive point ainsi, parce que les rayons violets et bleus de l'extrémité V, et les rayons rouges et jaunes de l'extrémité R, s'étendant de plus en plus, et gagnant l'espace blanc intermédiaire, altèrent peu à peu sa blancheur, et finissent par le couvrir entièrement.

Dans cette expérience, il est évident que chacune des portions du corps réfringent qui répond à une des petites ouvertures, fait la fonction d'un prisme particulier; en sorte que l'appareil tout entier peut être considéré comme un assemblage d'un grand nombre de prismes. Il est évident en effet qu'on arriverait au même résultat, quoique d'une manière plus embarrassante, en plaçant plusieurs prismes de même matière et de même angle les uns au-dessus des autres. Maintenant, si l'on ôte la plaque DACE, on voit que chacun des points du grand prisme peut être considéré comme le centre d'un petit spectre, d'abord infiniment étroit, mais qui empiète de plus en plus

sur ceux qui l'avoisinent, à mesure que l'on reçoit le faisceau réfracté sur un carton placé à une plus grande distance. Ainsi, quand le carton sera d'abord tout près du prisme, ce faisceau paraîtra blanc au milieu et coloré de rouge à une de ses extrémités, de violet à l'autre. Peu à peu ces couleurs extrêmes, ainsi que le jaune et le bleu qui les avoisinent, s'étendant de plus en plus, diminuent l'intervalle blanc qui les séparait ; et enfin, en s'éloignant de plus en plus du prisme, elles se joindront l'une l'autre, et donneront un spectre coloré, sans aucun espace blanc au milieu. Il faut donc se placer à une grande distance d'un pareil prisme pour en obtenir des couleurs parfaitement séparées, parce que le spectre qui en résulte est composé d'un nombre infini de grands rectangles de couleurs diverses qui se recouvrent mutuellement, et dont il faut augmenter considérablement la divergence avant de pouvoir les désunir. C'est ainsi que, dans la fig. 134, où l'on supposait la lumière transmise par une petite ouverture circulaire, le spectre était composé d'une infinité de cercles de différentes couleurs. Pour faire mieux concevoir l'avantage qu'ont à cet égard les petites ouvertures, supposons les prismes placés dans la position où les angles d'incidence sont égaux en somme aux angles d'émergence ; alors, comme on l'a vu dans la page 385, l'image réfractée d'un objet, produite par des rayons homogènes, est égale au diamètre apparent de cet objet. Pour plus de simplicité, ne considérons d'abord qu'une seule espèce de rayons, par exemple, des rayons rouges. Si l'objet est le soleil, et que l'ouverture par laquelle ses rayons rouges s'introduisent soit un point mathématique, l'image réfractée sera un petit cercle rouge dont le diamètre apparent, vu directement du centre de l'ouverture, sera égal au diamètre apparent du soleil. Si l'ouverture a une grandeur sensible, chacun des points qui la composent donnant son image à part, il y aura une infinité de cercles rouges dont les centres seront compris dans un petit cercle AB, égal en grandeur à l'ouverture elle-même, fig. 148 ; de sorte que l'image formée par les rayons rouges sera terminée par les cercles venus du bord de l'ouverture, et

qui auront leur centre sur le contour du cercle A B. De même, si l'ouverture est un grand rectangle vertical 149, les cercles rouges auront tous leur centre dans l'intérieur d'un rectangle A′ B′ égal à l'ouverture elle-même, et leur ensemble formera une image oblongue limitée par les cercles venus des bords de l'ouverture, lesquels auront leurs centres sur les côtés du rectangle A′ B′. Ainsi, plus l'ouverture sera allongée dans le sens de la réfraction, plus on étendra l'espace occupé dans ce sens par les rayons de chaque couleur homogène. Par conséquent il faudra recevoir l'image plus loin du prisme, pour parvenir à les séparer en vertu de la divergence des rayons; et l'on ne cessera de voir du blanc dans le milieu du spectre que lorsque les images violettes se seront complètement séparées des images rouges, c'est-à-dire lorsque les cercles violets, venus du bord le moins réfracté de l'ouverture, auront dépassé les cercles rouges venus de l'autre extrémité. Cet éloignement affaiblira de plus en plus la lumière du spectre, et rendra les expériences plus difficiles. On évite ces inconvéniens en rendant les ouvertures très-petites, dans le sens suivant lequel la réfraction s'exerce, comme nous l'avons expliqué précédemment.

Des Teintes composées, produites par les mélanges des couleurs simples.

Les expériences que nous venons de rapporter prouvent, de la manière la plus rigoureuse, que chaque rayon porte en soi sa faculté colorifique, qui ne peut être changée ni altérée par aucun moyen, non plus que sa réfrangibilité. Mais ce qui est fort remarquable, cette faculté colorifique ne leur est pas particulière; car on peut composer des mélanges artificiels de couleurs qui produisent sur nos organes la même sensation qu'une couleur homogène. Ceci peut se faire de bien des manières: une des plus simples consiste à employer l'appareil de la page 434, fig. 143, où les rayons dispersés par un prisme sont réunis par une lentille en un foyer incolore. Supposons qu'en avant de la lentille on place un carton noir T T, fig. 150, au milieu duquel

on ait percé plusieurs ouvertures rectangulaires VV, II, fermées par des coulisses que l'on puisse ouvrir et fermer à volonté. Si l'on place le carton de manière que le spectre tombe sur ces ouvertures, on pourra laisser passer seulement telle ou telle espèce de rayons, qui, allant toujours se réunir au foyer de la lentille, y peindront, sur un carton blanc, l'espèce de couleur qui résulte de leur mélange. On trouve d'abord, de cette manière, que chaque couleur peut être imitée par le mélange des deux couleurs qui l'avoisinent. Ainsi le mélange de l'orangé et du jaune verdâtre donne le jaune ; le mélange du jaune verdâtre et du vert bleuâtre donne le vert vif. On le fait aussi, mais moins bien, avec le jaune et le bleu. On imite le bleu par le mélange du vert bleuâtre et de l'indigo. Enfin, ce qui est bien remarquable, on imite le violet lui-même en mêlant du bleu avec du rouge. Mais tous ces mélanges étant regardés à travers un prisme se résolvent dans leurs élémens, qui sont séparés par la réfraction, au lieu que les couleurs produites par les rayons homogènes n'en sont point altérées, et c'est là le caractère essentiel qui les distingue.

On peut aussi imiter plus ou moins parfaitement les couleurs simples, en mélangeant les unes avec les autres des poudres diversement colorées, et c'est ainsi que les peintres composent leurs couleurs ; mais ces mélanges n'approchent jamais de la vivacité des couleurs de la lumière, et le prisme prouve aussi leur composition en les séparant.

On peut même, par de pareils mélanges, imiter aussi la blancheur, mais encore d'une manière imparfaite ; car les poudres colorées dont on fait usage pour cela absorbent toujours une grande partie de la lumière qui tombe sur elles, et c'est même parce qu'elles en absorbent ainsi une partie qu'elles paraissent colorées de la couleur complémentaire à celle-là. Aussi ne peut-on, avec de pareils mélanges, composer qu'un blanc grisâtre et sale, tel qu'il résulterait d'un mélange d'une poudre parfaitement blanche avec une poudre noire ; mais en augmentant l'intensité de la lumière dont on les éclaire, on parvient à augmenter leur éclat et à l'égaler à celui des corps

les plus blancs, du papier, par exemple, mais du papier peu éclairé et placé dans un jour défavorable.

Ces mélanges variés à l'infini peuvent donner lieu à une infinité de nuances diverses qui ne font point partie des couleurs simples du spectre; mais il n'est aucune de ces nuances que l'on ne puisse reproduire par un mélange convenable de ces couleurs, avec l'avantage d'un éclat infiniment plus beau. En considérant les diverses portions de lumière simple qui composent le spectre comme autant de forces qui agissent sur l'organe, et mesurant l'influence de ces forces dans les divers mélanges que l'on peut former avec les couleurs prismatiques rassemblées au foyer d'une lentille, suivant le procédé indiqué tout-à-l'heure, Newton est parvenu à une règle empirique avec laquelle on peut d'avance calculer l'espèce de teinte que produira un mélange de rayons simples dont l'espèce et les proportions son données.

Ayant décrit du centre C, fig. 151, un cercle d'un rayon égal à l'unité de longueur, divisez sa circonférence en sept parties proportionnelles aux nombres $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{9}$; de sorte qu'en évaluant ces parties en degrés, vous ayez (1)

$$
\begin{aligned}
RO &= 60^\circ\ 45'\ 34'' \\
OJ &= 34\ \ 10\ \ 38 \\
JV &= 54\ \ 41\ \ \ 1 \\
VB &= 60\ \ 45\ \ 34 \\
BI &= 54\ \ 41\ \ \ 1 \\
IU &= 34\ \ 10\ \ 38 \\
UR &= 60\ \ 45\ \ 34.
\end{aligned}
$$

Considérez maintenant ces différens arcs dans l'ordre où ils se suivent, comme représentant les sept couleurs principales de la lumière simple qui composent le spectre; en sorte que la circonférence entière représente toute la série des nuances par les-

(1) Cette division n'exige qu'une simple règle de société. Comme la somme de toutes les fractions est à 360°, ainsi une des fractions est à l'arc qui lui correspond. La somme des fractions est $\frac{3}{9}+\frac{2}{10}+\frac{2}{16}$, ou $\frac{79}{120}$ Si l'on veut, par exemple, l'arc qui correspond à la fraction $\frac{1}{10}$, sa valeur sera

$$\frac{\frac{1}{10}\cdot 360^\circ}{\frac{79}{120}}, \quad \text{ou} \quad 54^\circ\ 41'\ 1''.$$

quelles cette lumière passe depuis les premiers rayons rouges jusqu'aux derniers rayons violets. Puis ayant déterminé les centres de gravité de tous ces arcs successifs en *rojvbiu*, placez-en chacun d'eux un poids proportionnel à l'arc total qui y correspond, et considérez ces poids comme autant de forces qui tendent à tirer à elles le centre C, et l'œil qu'on y suppose placé. Dans la supposition présente, il est évident que l'œil restera en repos comme placé au centre de gravité de tous les poids, et ce repos répondra à la blancheur parfaite que produit en lui la sensation simultanée de toutes les nuances de la lumière simple, lorsqu'elles sont mélangées selon les proportions où elles se trouvent naturellement dans le spectre. Mais maintenant supposez ces proportions altérées, comme elles le sont toujours dans un mélange coloré qui diffère de la blancheur ; alors il faudra placer sur chaque centre de gravité partiel, non plus le poids total de l'arc correspondant, mais la moitié ou le tiers, ou en général le n^e de ce poids, selon que le mélange donné contiendra la moitié ou le tiers, ou le quart, ou en général la n^e partie de toute la lumière qui compose cette couleur dans le spectre. Cela fait, si vous prenez le centre de gravité commun de tous ces poids partiels, il ne coïncidera plus en général avec le centre du cercle total. Cependant, s'il y coïncide, la couleur du mélange sera encore la blancheur ; si, au contraire, il s'approche beaucoup d'un des centres partiels, le mélange offrira la teinte dominante qui appartient à ce centre. Enfin, quelque part qu'il tombe, en *g*, par exemple, il n'y aura qu'à mener du centre à ce point la ligne C*g*; alors la direction de cette ligne indiquera la teinte dominante du mélange, et sa longueur ou la distance du point *g* au centre indiquera sa vivacité. Par exemple, si C*g* se trouve exactement intermédiaire entre CV et CJ, la couleur composée sera le meilleur jaune; mais si C*g* s'approche davantage de CJ ou de CV, ce jaune tirera davantage sur l'orangé ou sur le vert. Dans la première supposition, si le point *g* tombe très-près de la circonférence, la couleur sera forte et vive au plus haut degré; s'il tombe à moitié chemin entre la circonférence et le centre, la couleur sera moitié moins

forte, telle que serait un mélange du jaune le plus vif avec une égale quantité de blanc. En général, si l'on représente la distance Cg par Δ, le rayon du cercle étant 1, $1 - \Delta$ exprimera très-approximativement la proportion de blanc qui entre dans la couleur composée, et Δ exprimera la proportion excédante que cette couleur contient de la couleur simple vers laquelle Cg se dirige. De sorte que l'on connaîtra ainsi la nature de la teinte et son intensité. Néanmoins on doit ajouter cette restriction, que, si le point g tombe sur la ligne CR, ou très-près de cette ligne, le rouge et le violet étant alors les principaux élémens de la teinte composée, elle ne pourra plus répondre à aucune des couleurs prismatiques, mais elle formera un pourpre tirant sur le rouge ou sur le violet, selon que le point g s'écartera de la ligne CR vers l'une ou vers l'autre de ces couleurs; et dans ces deux cas, le pourpre ou violet composé aura plus de feu et d'éclat que le simple. En général, on remarque la plus grande analogie entre les effets du violet et du rouge; jusque-là, par exemple, qu'avec du bleu et du rouge on forme des mélanges qui produisent sur l'œil la sensation d'un beau violet; et c'est cette espèce de retour des teintes sur elles-mêmes, tout-à-fait analogue à la consonnance des octaves, qui a porté Newton à rapprocher, comme il l'a fait souvent, les impressions des couleurs diverses de celles que produisent les intervalles musicaux.

D'après l'étendue que sa règle assigne aux arcs représentatifs des sept nuances principales du spectre, il ne s'en trouve pas deux dont les centres de gravité soient opposés diamétralement. Ainsi, en quelque proportion que deux de ces nuances soient mêlées, leur centre de gravité commun ne pourra jamais tomber au centre même de la circonférence; ce qui indique qu'elles ne pourront pas former du blanc, mais seulement une teinte pâle fort approchante du blanc. C'est en effet ce que l'expérience confirme: « Car, dit Newton, en mêlant seulement deux couleurs primitives, je n'ai pas encore pu faire un vrai blanc. J'ignore même si on pourrait y parvenir avec trois couleurs; mais ce sont là des curiosités qui ne servent que peu ou point du tout à l'intelligence des phénomènes naturels; car

dans tous les blancs que produit la nature il y a ordinairement un mélange de toutes les couleurs primitives, et par conséquent une composition de toutes les couleurs; ce qui rend la méthode applicable ».

Il ne nous reste plus qu'à réduire cette méthode en formule générale. Pour cela, je rapporterai les centres de gravité partiels de chaque couleur à deux coordonnées rectangulaires $x\,y$ comptées à partir du centre C; la première, suivant la ligne CR qui forme le passage du violet au rouge; la seconde, sur une droite CY perpendiculaire à celle-là. Quand ces coordonnées seront connues, il faudra multiplier chacune d'elles par le nombre de rayons de cette couleur qui entrent dans le composé que l'on veut faire; ce sera le moment statique de chaque couleur; et divisant la somme de tous ces momens par la somme des masses colorifiques, c'est-à-dire par le nombre total des rayons que l'on compose, on aura les coordonnées X Y du centre de gravité du système.

Pour calculer les coordonnées $x\,y$ relatives à chaque couleur, il faut se rappeler que dans un cercle dont le rayon égale l'unité de longueur, si a est un arc quelconque, C sa corde, R la distance de son centre de gravité au centre du cercle, on a

$$R = \frac{C}{a}.$$

Si l'arc a est donné en degrés, sa longueur sera $\frac{2\pi a}{360}$, et celle de sa corde sera $2 \sin \frac{1}{2} a$; de sorte qu'on aura

$$R = \frac{360 \sin \frac{1}{2} a}{\pi a}.$$

En appliquant cette formule aux différens arcs assignés plus haut pour chaque couleur, on trouve

rouge, violet, vert.......... R = 0,953796
orangé, indigo.............. R = 0,985240
jaune, bleu................. R = 0,962472.

Chacune de ces distances doit être prise sur le rayon qui va du centre du cercle au milieu de l'arc correspondant. D'après cela, puisqu'on connaît les nombres de degrés occupés par les arcs

successifs, on peut calculer l'angle u que chaque distance forme avec la ligne menée du centre du cercle au commencement du rouge, ligne que nous avons prise pour axe de x; on trouve ainsi :

rouge, violet............	$u = \pm$	30° 22′ 47″
orangé, indigo..........	$u = \pm$	77 50 53
jaune, bleu..............	$u = \pm$	122 16 42
vert....................	$u = \pm$	180 0 0

Avec ces données, il est facile de calculer les coordonnées $x\ y$ relatives au centre de gravité de chaque couleur; car on aura en général $x = \mathrm{R} \cos u \qquad y = \mathrm{R} \sin u$,
d'où l'on tire les valeurs numériques suivantes :

rouge, violet......	$x = +\ 0{,}822840$	$y = \pm\ 0{,}482350$
orangé, indigo....	$x = +\ 0{,}207398$	$y = \pm\ 0{,}963163$
jaune, bleu.......	$x = -\ 0{,}513992$	$y = \pm\ 0{,}813736$
vert.............	$x = -\ 0{,}953796$	$y = 0.$

Maintenant employons les lettres initiales de chaque couleur pour désigner le nombre de rayons simples de cette couleur qui entrent dans le composé que l'on veut former, en observant toutefois de changer v en u pour le violet; alors les coordonnées X Y du centre de gravité du système seront

$$\mathrm{X} = \frac{(r+u)0{,}822840+(o+i)0{,}207398-(j+b)0{,}513992-v.0{,}953796}{r+o+j+v+b+i+u}$$

$$\mathrm{Y} = \frac{(r-u)0{,}482350+(o-i)0{,}963163+(j-b)0{,}813736}{r+o+j+v+b+i+u},$$

De là on pourra déduire la distance Δ du centre de gravité au centre du cercle, ainsi que l'angle U formé par cette distance avec l'axe des x; car on aura

$$\operatorname{tang} \mathrm{U} = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}; \quad \Delta = \frac{\mathrm{Y}}{\sin \mathrm{U}}, \quad \text{ou} \quad \Delta = \frac{\mathrm{X}}{\cos \mathrm{U}}.$$

La valeur de U indiquera la direction de la distance Δ, et fera ainsi connaître la couleur du composé; la valeur de Δ et de $1 - \Delta$ indiquera ensuite les proportions de lumière simple et de blanc qui la composent.

Pour donner une application de cette méthode, supposons,

comme l'a fait Newton, que l'on veuille composer ensemble une partie de violet, une d'indigo, deux de bleu, trois de vert, cinq de jaune, six d'orangé et dix de rouge, quelle sera la couleur composée qui résultera de ce mélange de lumière simple ?

Pour le savoir, il n'y a qu'à supposer dans nos formules

$$u=1,\ i=1,\ b=2,\ v=3,\ j=5,\ o=6,\ r=10;$$

et en effectuant par logarithmes les multiplications et divisions indiquées, elles donneront

$$X=+\frac{4{,}043694}{28}=+0{,}144417,$$

$$Y=+\frac{11{,}598175}{28}=+0{,}414220;$$

d'où l'on tire $U=70°\ 46'\ 41''$; $\Delta=0{,}438677$.

En construisant d'abord la valeur de U, fig. 150, on voit qu'elle place la distance Δ dans l'intervalle qui appartient à l'orangé simple. Car l'arc R O qu'occupe le rouge est de 60° 45′ 34″, et l'arc O J qu'occupe l'orangé est de 34° 10′ 38″; de sorte que le milieu de l'orangé répond à un arc de 77° 50′ 53″, à partir du point R, d'où nous comptons aussi les angles U. Ainsi la distance Δ ou C G tombera entre les points O et J, et un peu plus près de O que de J ; d'où l'on doit conclure que la couleur composée sera un orangé tirant un peu plus vers le rouge que vers le jaune. Enfin l'intensité de cet orangé sera indiquée par les valeurs

$$\Delta=0{,}438677, \qquad 1-\Delta=0{,}561323;$$

d'où l'on voit que sur cent parties il en contiendra environ 56 de blanc et 44 d'orangé pur ; proportion qui ne doit pas s'entendre des quantités de poudres blanches ou orangées qu'il faudrait mêler ensemble pour le produire, mais des quantités réelles de lumière que de pareilles poudres devraient réfléchir pour le former.

Newton a donné cette méthode comme une représentation empirique, mais fidèle, des résultats qu'il avait obtenus dans la chambre obscure, en formant au foyer d'une lentille des couleurs

composées contenant des proportions connues de lumière simple; et il ajoute qu'il en a soigneusement vérifié l'exactitude. C'était ainsi qu'il procédait toujours, composant les faits isolés pour en faciliter l'application, et composant ensuite les lois particulières pour en déduire les lois générales.

En décrivant la construction que nous venons d'appliquer, Newton ne s'est pas contenté de définir par des nombres les parties de la circonférence qu'il faut assigner aux diverses couleurs simples; il a exprimé aussi ces intervalles par les rapports musicaux, *sol, la, fa, sol, la, mi, fa, sol*. Les valeurs de ces rapports, telles qu'on les emploie aujourd'hui dans la musique, ne s'accorderaient pas avec les nombres que Newton a donnés et qu'il a suivis dans sa construction; mais il n'en faut pas pourtant conclure que ses deux énoncés ne soient point d'accord. Car, au temps de Newton, les mêmes notes étaient souvent employées pour désigner des intervalles différens auxquels les circonstances assignaient leurs valeurs locales, et ces variations bizarres de nomenclatures, connues en musique sous le nom de *muances*, sont, dit-on, encore usitées dans quelques écoles d'Italie. Cela explique pourquoi la même série de notes, *sol, la, fa, sol, la, mi, fa, sol*, est employée plusieurs fois dans l'optique de Newton pour désigner d'autres intervalles tous différens de ceux auxquels il l'a ici appliquée.

Pour n'avoir pas fait la distinction que je viens d'expliquer, la plupart des physiciens, et, je crois, même tous ceux qui ont écrit sur cette partie de l'optique, sont tombés dans une erreur très-grave. Voyant Newton employer ici des rapports musicaux, comme il l'avait déjà fait dans la division du spectre, et trouvant que la traduction numérique de ces rapports dans le système musical adopté aujourd'hui ne s'accordait pas avec les nombres donnés par Newton, ils en ont conclu que Newton s'était trompé dans l'énoncé de ses nombres, et qu'il avait eu le dessein de partager la circonférence entre les diverses couleurs proportionnellement aux espaces qu'elles occupent dans le spectre. Un seul coup d'œil sur la figure même, donnée par

Newton, aurait dû suffire pour détruire cette idée, car elle est conforme à son énoncé numérique, et la symétrie qui en résulte entre les espaces attribués au rouge et au violet, à l'orangé et à l'indigo, au jaune et au bleu, atteste bien une intention réfléchie; mais tout cela n'a pas pu prévaloir contre l'idée que l'on s'était faite. On a changé les nombres de Newton pour les accorder avec cette hypothèse, et l'on a substitué arbitrairement la division chromatique du spectre à la sienne, sans s'embarrasser si elle était ou non conforme avec les effets colorifiques des rayons. On a peine à concevoir une correction aussi peu réfléchie. Newton n'a parlé nulle part de cette prétendue identité entre les divisions chromatiques du spectre et sa construction actuelle, ce qui n'eût été qu'une pure hypothèse; au lieu qu'il dit formellement qu'il a établi sa règle sur l'expérience; et il explique sur quelles expériences elle est fondée. Bien plus, s'il eût fait ce qu'on suppose, non-seulement les proportions qu'il eût données auraient été très-différentes de celles qu'il emploie, et qui lui ont été assignées par l'observation, mais son mode de division ainsi caractérisé n'aurait eu rien de fixe, parce que les espaces occupés par les couleurs dans le spectre ont entre eux des proportions différentes, selon la nature des substances réfringentes dont on fait usage : au lieu que, dans sa manière d'opérer, Newton était tout-à-fait indépendant de ces différences, parce que la lentille qui recevait et concentrait le spectre réunissait toujours sensiblement au même foyer toutes les couleurs qui le composaient. Ainsi lorsque Newton interceptait la moitié, le quart, ou telle autre proportion de l'une de ces couleurs mesurée sur l'espace qu'elle occupait dans le spectre, l'effet qui en résultait sur le foyer était tout-à-fait indépendant de la grandeur absolue de cet espace, et par conséquent la couleur résultante aurait été la même en employant tout autre prisme plus ou moins dispersif. Il faut donc bien se garder de confondre cette règle donnée par Newton avec une hypothèse empirique; elle doit être considérée comme une véritable loi tirée de l'expérience. Nous aurons bientôt l'oc-

casion de la soumettre à plusieurs épreuves très-délicates qui la confirment parfaitement. Ici je me bornerai à faire observer qu'elle fournit les données nécessaires pour effectuer l'expérience indiquée page 437 sur la sensation de la blancheur produite par une succession rapide de papiers diversement colorés. Il ne faut que diviser un cercle de carton suivant les proportions indiquées page 447, puis le peindre des couleurs les plus pures que l'on puisse obtenir, et le faire tourner rapidement autour de son centre.

CHAPITRE II.

Influence de l'inégale réfrangibilité des rayons sur la vision à travers des surfaces réfringentes.

Dès que le phénomène de la dispersion s'est offert à nous dans les expériences de réfraction, page 219, nous avons prévu les effets généraux qui devaient en résulter sur la vision à travers des prismes triangulaires. Les connaissances que nous avons maintenant acquises sur les propriétés individuelles des rayons simples, et sur la constance de leurs propriétés colorifiques, confirment pleinement ces premiers aperçus, et permettent de les énoncer avec plus de précision.

Lorsqu'un point lumineux infiniment petit est vu par réfraction à travers un prisme triangulaire, chaque espèce de rayon simple qui émane de ce point en donne une image colorée de sa teinte particulière. L'inégale réfrangibilité des rayons de diverses espèces fait que ces images sont séparées et placées à côté les unes des autres dans l'ordre que leurs couleurs occupent sur le spectre, celles qui sont formées de rayons les plus réfrangibles étant les plus déviées. Maintenant si, au lieu d'un seul point radieux infiniment petit, on regarde plusieurs points disposés à côté les uns des autres, chacun d'eux produit encore un spectre pareil; mais ces spectres peuvent se superposer en partie, de manière à produire du blanc dans le lieu de leur mélange; c'est ce qui arrive en général quand on regarde ainsi des objets d'une dimension sensible. Aussi quand la surface de ces objets est blanche et également lumineuse, les parties intérieures de l'image réfractée paraissent blanches, et la coloration de l'image ne se fait sentir qu'aux extrémités, dans le sens général de la réfraction.

Pour bien faire ces expériences, il faut placer l'objet blanc sur un fond noir, afin que la lumière envoyée par les corps

environnans, dans le même sens que la sienne, ne puisse pas parvenir à l'œil. Si l'on veut d'abord observer le cas de la séparation des images, on placera ainsi une bande de carton blanche et très-étroite dans une position horizontale, et on la regardera à travers un prisme d'un grand angle dont les arêtes soient parallèles à sa longueur. En effet, d'après cette disposition, chaque petite portion transversale de la bande forme son spectre verticalement et séparément de toutes les autres, ce qui fait qu'on les voit isolément. Mais pour mêler tous ces spectres, il suffit de relever la bande verticalement, fig. 152, sans changer la situation du prisme; aussi, dans cette nouvelle disposition, l'extrémité la moins déviée, et par conséquent la moins réfractée de l'image, paraît rouge; l'extrémité la plus déviée, et par conséquent la plus réfractée, paraît violette; mais ces extrémités sont les seules colorées; car, dans les intermédiaires, la superposition des spectres égaux qui se suivent recompose le blanc. Enfin, les extrémités mêmes seraient incolores, si l'objet était une surface d'une étendue indéfinie et d'une égale teinte, comme l'est, par exemple, la voûte céleste; car alors la superposition des spectres s'étendrait autant que l'ouverture du prisme. Toutefois la recomposition de la blancheur n'aura lieu parfaitement que dans le cas où les parties consécutives de la surface blanche seront également lumineuses; car si elles le sont inégalement, les spectres consécutifs auront des intensités diverses, et leurs couleurs ne pourront pas se compenser entièrement les unes par les autres. C'est ce qui arrive, par exemple, quand on regarde la lune dans une lunette, à travers un prisme, parce que les inégalités dont la surface de cet astre est sillonnée font que tous les points de son disque ne sont pas également lumineux.

Nous venons de supposer que l'on observait par réfraction un objet blanc sur un fond noir; on pourrait aussi observer un objet noir sur un fond blanc, et même cela arrive souvent; car une bande noire tracée sur un carton blanc est une excellente mire. Dans ce cas, pour se rendre compte des effets de la dispersion, il faut considérer chaque partie du fond située de part et d'autre de la bande noire, comme étant elle-même un objet

blanc placé sur un fond noir ; ce qui rentre dans la supposition que nous avons examinée d'abord.

Newton a rapporté un fait facile à observer, et qui, au premier coup d'œil, paraît ne pouvoir pas rentrer dans cette théorie, quoique réellement il n'en soit qu'une conséquence. Ayant disposé horizontalement la base d'un prisme A B C, fig. 153, devant une fenêtre ouverte, placez votre œil en O de manière à recevoir la lumière des nuées réfléchies intérieurement sur sa base ; alors, quand les rayons réfléchis formeront avec cette base un angle d'environ 50°, vous y verrez paraître un arc de couleur bleue d'une certaine largeur S S', qui s'étendra dans toute la longueur du prisme, en tournant sa concavité vers l'œil ; et la partie de la base S B, située au-delà de cet arc paraîtra beaucoup plus brillante que la partie S' A qui se trouve en-deçà. Pour rendre raison de cette singulière apparence, concevez que l'angle de réflexion N S I qui répond à la partie convexe de l'arc soit l'angle auquel la réflexion totale commence pour les rayons rouges les moins réfrangibles, en sorte qu'ils ne puissent se réfléchir totalement à un angle moindre. Supposez de même que N' S' I' soit le plus petit angle de réflexion totale pour les derniers rayons violets : alors, depuis B jusqu'en S, il pourra y avoir des rayons de toute espèce qui subiront la réflexion totale, et parviendront ensuite à l'œil ; mais en-deçà de S, l'incidence intérieure devenant trop voisine de la perpendiculaire, aucun rayon rouge extrême ne pourra être aperçu ainsi. De même, à mesure que le point d'incidence intérieure se rapprochera de A, la possibilité de la réflexion totale vers l'œil cessera successivement, pour les différens rayons, les uns après les autres, jusqu'en S', où cette possibilité cessera même pour les derniers rayons violets ; de sorte qu'entre S' et A, la réflexion totale n'aura lieu pour aucun rayon. Ainsi, en résumant ces résultats, on voit que depuis B jusqu'en S, la réflexion sera vive et brillante, parce qu'elle sera totale et qu'elle comprendra les rayons de toutes les couleurs. Depuis S jusqu'en S', la réflexion totale ira de plus en plus en s'affaiblissant et en se limitant aux rayons les plus réfrangibles, ce qui doit produire une

zone où les couleurs de ces rayons domineront ; enfin, depuis S′ jusqu'à tout autre point plus rapproché de l'œil, la réflexion ne sera plus totale pour aucun rayon. L'œil ne recevra donc de cet espace que la faible portion de lumière produite par la réflexion partielle ; et par conséquent il devra paraître obscur, comparativement à l'intensité brillante de BS.

Fixons les limites de ce phénomène : pour cela il suffit de se rappeler qu'en nommant n le rapport de réfraction pour une substance quelconque, quand la lumière y pénètre en sortant de l'air, la moindre incidence intérieure θ, où commence la réflexion totale, est donnée par la formule

$$\sin\theta = \frac{1}{n},$$

laquelle exprime l'impossibilité de l'émergence avec un rapport constant de sinus égal à n : ceci a été démontré page 274. Or, nous avons trouvé plus haut, d'après Newton, les valeurs de n, pour les diverses limites des couleurs du spectre dans le verre dont il faisait usage, et nous avons eu

pour le rouge extrême $n = \frac{77}{50}$;
pour le violet extrême $n = \frac{78}{50}$.

En mettant successivement ces valeurs dans notre formule, les valeurs de θ qui en proviendront exprimeront les angles d'incidences intérieures qui limitent l'arc bleu dans la réflexion sur la base du prisme. On trouve ainsi :

rouge extrême NSI $= 40.\ 29'\ 30''$;
violet extrême N′S′I′ $= 39^\circ\ 52'\ 10''$.

On voit que, dans cette espèce de verre, l'incidence moyenne qui produit ce phénomène est d'environ 40°, à partir de la normale, ce qui donne 50°, à partir de la surface. D'autres substances donneraient d'autres limites, mais le calcul en serait sans utilité. Ce que ce phénomène renferme de remarquable consiste dans la formation d'un arc coloré au moyen de la réflexion sur une seule surface spéculaire ; et ce paradoxe optique est complètement expliqué par la théorie de Newton. On voit aussi que le complément de cet arc par les rayons qui sortent doit produire au-dessous du prisme un arc où domine le rouge,

à peu près comme dans l'expérience de Newton, rapportée page 407.

Cette théorie donne également l'explication et la mesure des phénomènes de l'arc-en-ciel. On sait que ce météore offre l'aspect d'un et quelquefois de deux arcs, colorés de toutes les couleurs du spectre. Il ne se produit que lorsqu'il pleut, et qu'en même temps le soleil luit; mais la réunion de ces circonstances ne suffit pas pour le faire paraître; il exige certaines positions, des nuées, de l'observateur et du soleil; un de ses caractères, c'est que le centre de l'arc se trouve toujours diamétralement opposé à cet astre. Ces rapports ont fait depuis long-temps penser que l'arc-en-ciel était produit par la réfraction de la lumière dans les gouttes de pluie; et en effet, on le voit se produire également dans l'espèce de pluie artificielle que répandent les jets d'eau et les cascades, surtout lorsque le vent les agite. Pour concevoir comment cette réfraction peut disperser la lumière, considérons un globule d'eau sphérique sur lequel tombe un rayon solaire infiniment mince SI, fig. 154, et suivons la marche de ce rayon. Il subira d'abord en I une première réfraction qui le dirigera vers I'; là une partie de sa lumière se réfractera de nouveau, et sortira dans l'air suivant I'R'; mais le reste se réfléchira dans l'intérieur du globule vers I'', où il se produira un effet pareil, c'est-à-dire qu'une partie du rayon sortira dans l'air, tandis que le reste sera réfléchi intérieurement vers I''', où le même partage s'opérera encore, et ainsi de suite indéfiniment. On peut réaliser cette conception par l'expérience, en faisant entrer dans une chambre obscure un rayon solaire très-mince, réfléchi par un héliostat, et le dirigeant à travers un cylindre de verre rempli d'eau, comme on le voit fig. 155. La marche du rayon dans l'intérieur de l'eau deviendra parfaitement visible par la réflexion partielle de lumière que les molécules de l'eau opèrent, et les émergences successives deviendront également sensibles, en plaçant l'œil sur la direction des rayons émergens. On reconnaît ainsi que ces rayons sont dispersés, et donnent la série des couleurs prismatiques; leur intensité s'affaiblit à mesure qu'on

les observe après un plus grand nombre de partages, et enfin ils deviennent trop faibles pour être aperçus.

Le phénomène de l'arc-en-ciel est produit par les spectres colorés qui sortent ainsi de différentes gouttes d'eau après deux réfractions, séparées par une ou deux réflexions intermédiaires; mais comment la superposition de ces spectres partiels compose-t-elle les couleurs de l'arc et déterminent-elles sa largeur? c'est ce qu'il nous faut examiner.

Pour le faire simplement, considérons d'abord un seul rayon incident de couleur simple, par exemple rouge; puis, supposant qu'il sorte du globule après un certain nombre de réflexions et de réfractions, déterminons le point de son émergence, et calculons l'angle qu'il forme avec sa direction primitive.

Soit, fig. 156, SI un tel rayon que nous supposerons d'abord entrant en I et sortant en I′ après une seconde réfraction, sans réflexion intermédiaire. Par le centre du globule, menons aux points II′ les lignes CIN, CI′N′, qui seront normales à sa surface. Alors SIN sera l'angle d'incidence que nous nommerons i, et CII′ sera l'angle de réfraction que nous nommerons r. Cela posé, à cause de la symétrie de la figure, l'incidence intérieure en I′ sera aussi r, et l'émergence sera i. Prolongeons les rayons incidens et émergens, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en T, et l'angle ITI′ que forment leurs directions sera la déviation que la réfraction a produite; nous la nommerons Δ. Or, il est facile de trouver sa valeur en fonction des angles i et r; car, dans le quadrilatère CITI′, tous les angles sont connus, excepté Δ. En effet, les angles en I et I′ sont tous deux égaux à i; de plus, le triangle CII′ étant isoscèle, l'angle ICI′ est égal à $180-2r$; donc, puisque la somme des quatre angles d'un quadrilatère vaut toujours quatre angles droits, on aura

$$\Delta + 2i + 180 - 2r = 2.180^\circ; \quad \text{d'où} \quad \Delta = 180 + 2r - 2i.$$

Considérons maintenant deux réfractions séparées par une réflexion intermédiaire, fig. 157; la même construction et le même raisonnement sont encore applicables; seulement l'angle ICI″ sera double de ICI′, c'est-à-dire égal à $2(180-2r)$: ainsi, dans le quadrilatère CITI″, on aura encore

$$\Delta + 2i + 2(180-2r) = 2.180; \quad \text{d'où} \quad \Delta = 4r - 2i.$$

Généralement, concevons que le rayon ait eu un nombre ν d'incidences successives dans l'intérieur du globule, l'angle ICI^{ν} deviendra $\nu\,(180 - 2\,r)$, et pourra ainsi devenir obtus; mais en considérant toujours notre quadrilatère comme formé du même côté que dans les figures précédentes, on aura encore

$$\Delta + 2\,i + \nu\,(180 - 2\,r) = 2.180^{\circ};$$

d'où $$\Delta = 2\,\nu\,r - 2\,i - (\nu - 2)\,180^{\circ}.$$

Quand Δ sera positif, le point d'intersection du rayon émergent avec le rayon incident se fera au-delà du globule, comme notre figure le suppose; mais si Δ devient négatif, l'intersection se fera en-deçà, comme le montre la fig. 158.

De ces déterminations générales, les seules qui se réalisent dans le phénomène de l'arc-en-ciel, sont celles d'une et de deux réflexions intérieures, fig. 157 et 158. La première donne l'arc intérieur, la seconde l'arc extérieur, celui-ci plus faible que l'autre, comme exigeant une réflexion de plus. Examinons successivement ces deux cas, en commençant par le premier, qui est le plus simple.

Soit fig. 157, SI un faisceau très-mince de rayons homogènes parallèles entre eux dans leur incidence, qui tombant obliquement sur la surface d'un globule sphérique, s'y réfractent, et après s'y être réfléchis une fois, en sortent de nouveau en I''. Je dis qu'en général ces rayons ne seront plus parallèles entre eux quand ils sortiront du globule. En effet, si nous considérons particulièrement un quelconque d'entre eux, la déviation qu'il éprouvera aura pour expression générale $$\Delta = 4\,r - 2\,i.$$

Or, si l'on nomme n le rapport constant de réfraction pour l'espèce de rayons simples que nous considérons, lorsqu'ils passent de l'air dans l'eau, les angles i et r seront toujours liés entre eux par la proportion

$$\sin i = n \sin r.$$

Ainsi, lorsque l'incidence i vient à varier, n restant le même, ce qui arrive nécessairement pour les divers rayons d'un même faisceau, quelque mince qu'il soit, r varie aussi, et par suite Δ; c'est-à-dire que la déviation éprouvée par les rayons devient

différente, et par conséquent leur parallélisme est troublé par la réfraction.

Pour avoir une idée nette de ces variations, il faut calculer numériquement les valeurs de Δ pour plusieurs rayons incidens successifs répartis sur la surface du globule à de petites distances, fig. 159. On trouve alors que Δ commence à être nul sous l'incidence perpendiculaire où i est aussi nul. Ensuite Δ augmente progressivement jusqu'à une certaine limite de i, qui est d'environ $59^{\circ}\frac{1}{2}$ pour les rayons rouges; de façon qu'un petit pinceau de ces rayons, entrant parallèlement dans le globule en I sous cette incidence, en sort également parallèle, quoique la direction générale du pinceau soit déviée de 42°. Mais pour des valeurs de i plus grandes, c'est-à-dire, pour des incidences des rayons plus considérables, la déviation diminue comme elle avait augmenté, et cette diminution continue jusqu'aux derniers rayons tangens au globule. Or, si l'on reçoit tous les rayons émergens à une assez grande distance du globule pour que celui-ci puisse être considéré comme un point, il est clair que tous ceux qui répondront à des déviations inégales iront en s'écartant les uns des autres à mesure qu'ils s'éloigneront du globule, de sorte qu'ils se trouveront enfin trop affaiblis pour donner la sensation du globule à un œil placé sur leur route; au lieu que cet œil pourra encore être affecté par les rayons émergens qui répondent au maximum de Δ, puisqu'étant parallèles entre eux, ils se transmettent à toute distance sans se séparer. Leur effet sera même d'autant plus vif, que, s'ils sont d'une densité uniforme dans leur incidence, ils se pressent et se condensent quand ils sortent à cette émergence-là. Supposez maintenant une file de pareils globules disposés circulairement à côté les uns des autres, de manière que les rayons réfractés qui en émanent, et que je suppose de la même couleur, puissent ainsi parvenir à l'œil; ils donneront la sensation d'une ligne lumineuse, et plusieurs rangées pareilles placées à côté les unes des autres produiront, à cause de l'ouverture sensible de la pupille, une bande colorée qui lui sera égale en largeur.

Les mêmes considérations s'appliquent également aux cas où les réflexions et les réfractions sont plus nombreuses ; il y a toujours pour chacun d'eux une certaine limite d'incidence à laquelle les rayons émergens très-voisins deviennent sensiblement parallèles, et peuvent se transmettre au loin sans s'affaiblir.

Pour découvrir généralement les incidences précises de ces rayons, que Newton a très-justement désignés par la dénomination d'*efficaces*, il faut appliquer à l'expression de la déviation Δ les conditions analytiques du minimum, ce qui se fera en égalant à zéro sa différentielle. On aura ainsi, pour une seule réflexion intérieure, $d\Delta = 0$, ou $2\,dr = di$.
Or la relation générale de $\sin r$ à $\sin i$, étant aussi différenciée, montre que les accroissemens des angles i et r doivent toujours être liés par l'équation $di \cos i = n\,dr \cos r$.
Substituant pour di sa valeur tirée de la condition du maximum, il vient $2 \cos i = n \cos r$.
Or, on a aussi $\sin i = n \sin r$;
élevant ces deux équations au carré, et les ajoutant, r disparaît, et il reste

$$4 \cos^2 i + \sin^2 i = n^2, \quad \text{d'où} \quad \cos i = \pm \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}.$$

Cette équation déterminera la valeur limite de i pour une réflexion intérieure, quand le rapport de réfraction n sera donné. Connaissant i, on pourra calculer r d'après le rapport constant des sinus, et ensuite Δ d'après son expression générale

$$\Delta = 4r - 2i.$$

Dans le cas de deux réflexions intérieures, et par conséquent de trois incidences, on aura d'abord $\nu = 3$, ce qui donnera

$$\Delta = 6r - 2i - 180°;$$

puis faisant $d\Delta$ nul, et achevant le calcul de la même manière, il viendra pour l'incidence efficace

$$\cos i = \pm \sqrt{\frac{n^2 - 1}{8}}.$$

En général, pour un nombre quelconque ν d'incidences intérieures, on trouvera

$$\cos i = \pm \sqrt{\frac{n^2 - 1}{\nu^2 - 1}}.$$

Appliquons d'abord ces formules aux rayons rouges les moins réfrangibles. On a vu précédemment que, lorsque ces rayons passent de l'air dans l'eau, leur rapport constant de réfraction est $\frac{103}{81}$; ce sera donc la valeur de n. En la substituant dans les formules précédentes, on trouve

une seule réfl. intérieure...	$i = 59^\circ\, 23'\, 30''$	$r = 40^\circ\, 12'\, 10''$	$\Delta = \quad 42^\circ\, 1'\, 40''$,
deux réfl. intérieures....	$i = 71^\circ\, 49'\, 55''$	$r = 45^\circ\, 26'\, 50''$	$\Delta = -50^\circ\, 58'\, 50''$.

Le signe négatif de Δ dans la seconde série indique que l'intersection du rayon émergent avec le rayon incident dont il dérive se fait en avant du globule.

Si nous voulons considérer de même les rayons violets les plus réfrangibles pour lesquels le rapport de réfraction n est $\frac{109}{81}$, on aura

une seule réfl. intérieure ..	$i = 58^\circ\, 40'\, 30''$	$r = 39^\circ\, 24'\, 20''$	$\Delta' = \quad 40^\circ\, 16'\, 40''$,
deux réfl. intérieures....	$i = 71^\circ\, 26'\, 10''$	$r = 44^\circ\, 47'\, 10''$	$\Delta' = -54^\circ\, 9'\, 20''$.

Observons que, dans le cas d'une seule réflexion intérieure, la valeur de Δ est moindre pour les rayons violets que pour les rouges; c'est le contraire après deux réflexions. Il est évident que les autres rayons d'une réfrangibilité intermédiaire entre ces extrêmes donneront aussi des valeurs intermédiaires de Δ.

Maintenant, pour développer les conséquences de ces résultats, supposez qu'un observateur placé en O, fig. 160, regarde une vaste nuée qui soit composée d'une multitude de globules sphériques d'eau. Menons par son œil au centre du soleil la ligne SOC, pour désigner la direction des rayons incidens que nous supposerons d'abord exactement parallèles, ce qui revient à considérer le soleil comme un point infiniment éloigné. Cela posé, il se fera d'abord à la première surface des globules une réflexion par-

tielle de toutes les couleurs qui composent la lumière incidente, ce qui formera une teinte blanchâtre plus ou moins sombre, répandue sur toute la surface de la nuée; mais, en outre, si elle est suffisamment étendue, on y verra deux arcs concentriques colorés de toutes les couleurs du spectre. Car si par l'œil O on mène la droite OV, formant avec OC un angle de 40° 17′, et qu'on la fasse tourner autour de OC, en décrivant une surface conique, tous les globules d'eau qui se trouveront sur le prolongement de cette surface auront précisément la position requise pour que les rayons violets les plus réfrangibles, après y avoir subi deux réfractions et une réflexion intermédiaire, en sortent parallèles et arrivent à l'œil en O; et cela n'aura lieu ainsi dans aucun autre endroit de la nuée. De sorte qu'en vertu de ces seuls rayons, le spectateur verra sur la nuée un arc violet dont OC sera l'axe et C sera le centre. Mais en outre, il y verra de même une infinité d'autres arcs concentriques et extérieurs au précédent, dont chacun sera formé par une seule espèce de rayons simples; et à mesure que ces rayons seront moins réfrangibles, leurs arcs seront d'un plus grand diamètre; de sorte que le plus large, composé du rouge extrême, sous-tendra un angle ROC de 42° 2′. Ainsi la largeur totale de la bande colorée sera 42° 2′ — 40° 17′ ou 1° 45′; et le rouge y sera en dehors, le violet en dedans.

Ce sera le contraire après deux réflexions. En effet, si l'on mène par l'œil les lignes OR′, OV′ formant avec OC des angles de 50° 59′, et 54° 9′, puis qu'on les fasse tourner toutes deux sous ces inclinaisons autour de OC, comme axe, la première rencontrera tous les globules qui, après avoir fait subir aux rayons rouges extrêmes deux réfractions séparées par deux réflexions intermédiaires, peuvent les renvoyer à l'œil parallèles entre eux; et la seconde donnera la limite analogue pour les rayons violets extrêmes. Entre ces deux arcs, il y en aura d'autres de toutes les couleurs intermédiaires du prisme; et leur ensemble formera une seconde bande colorée ayant pour largeur 54° 9′ — 50° 59′ ou 3° 10′. Cette bande aura ses couleurs dans un ordre inverse de la première, c'est-à-dire que le

rouge y sera en dedans, le violet en dehors, et la distance des deux arcs rouges sera 50° 59′ — 42° 2′ ou 8° 57′.

Telles devraient donc être les dimensions et les distances des deux arcs-en-ciel qui paraissent sur les nuées, si le soleil n'était qu'un point. Mais cet astre a un diamètre apparent sensible, dont la valeur moyenne peut être supposée d'environ 30′. D'après cela, si l'on considère les arcs que nous venons de déterminer comme produits par des rayons émanés du centre du disque, les rayons émanés des bords ou de l'intérieur formeront autant d'arcs pareils et de même grandeur, mais qui auront chacun pour axe la ligne menée de l'observateur au point du disque d'où ils seront émanés. Par conséquent, si du point C on décrit une circonférence de cercle C′ C″ C‴ égale au diamètre apparent du soleil, il ne se formera pas seulement autour de ce point un arc violet intérieur à la distance de 40° 17′; mais il y aura autant de ces arcs qu'il y a de points dans le cercle C′ C″ C‴ qui peuvent devenir centres à leur tour; c'est-à-dire qu'il se formera une bande circulaire violette, d'une largeur égale au diamètre apparent du soleil, et dont le rayon intérieur sera 40° 17′—15′ ou 40° 2′, l'extérieur 40° 17′ + 15′ ou 40° 32′. De même l'arc rouge qui se trouvait à 42° 2′ de O C deviendra une bande rouge, dont le bord extérieur aura pour rayon 41° 47′, et l'extérieur 42° 17′; de sorte que la largeur totale de l'iris compris entre ces extrêmes sera 42° 17′ — 40° 2′ ou 2° 15′, plus grande de 30′ que si le soleil n'était qu'un point. De même la largeur de l'iris extérieur, que nous avions trouvée de 3° 10′, deviendra 3° 40′, son rayon intérieur qui était 50° 59′ deviendra 50° 44′, et l'extérieur qui était 54° 9′ deviendra 54° 24′; enfin la distance des deux iris, qui était d'abord 8° 57′, sera réduite à 8° 27′. Mais à cause de la largeur et de la superposition des arcs partiels qui les composent, leurs couleurs seront beaucoup moins tranchées que dans la première supposition. Or ces dimensions, déterminées par le seul calcul, sont exactement conformes à celles que l'observation indique, du moins quand les couleurs des arcs sont les plus vives et les mieux marquées. Car Newton, ayant un jour mesuré un arc-en-

ciel par le moyen des instrumens qu'il avait alors, trouva que le plus grand diamètre de l'iris intérieur était d'environ 42 degrés, et que la largeur du rouge, du jaune et du vert de cet iris, pris ensemble, était d'environ 63 ou 64 minutes, outre trois ou quatre minutes qu'on y pouvait ajouter en considération du rouge extérieur qui était affaibli et obscurci par l'éclat des nuées d'alentour. La largeur du bleu était d'environ 40 minutes au moins, sans compter le violet, qui était si fort obscurci par l'éclat des nuées, qu'il ne put en mesurer la largeur. Mais en supposant que la largeur du bleu et du violet pris ensemble fût égale à celle du rouge, du jaune et du vert réunis, toute la largeur de cet iris intérieur devait être d'environ 2° 15′, comme ci-dessus. La plus petite distance entre cet iris et l'iris extérieur était d'environ 8° 30′. L'iris extérieur était plus large que l'intérieur; mais la teinte en était si faible, surtout du côté bleu, qu'il ne fut pas possible d'en mesurer la largeur distinctement. Une autre fois que les deux arcs paraissaient plus distincts, Newton trouva que la largeur de l'iris intérieur était de 2 degrés 10 minutes, et que dans l'extérieur la largeur du rouge, du jaune et du vert, était à la largeur des mêmes couleurs dans l'iris intérieur comme 3 à 2.

Newton, dans l'endroit de l'optique où il expose cette admirable théorie, attribue la première idée de l'explication de l'arc-en-ciel à Antoine de Dominis, archevêque de Spalatro, qui, dit-il, la confirma par des observations faites sur une boule de verre remplie d'eau, et placée dans diverses situations par rapport au soleil et à l'œil de l'observateur. Newton ajoute que Descartes a rectifié l'observation de l'arc-en-ciel extérieur. Mais probablement il n'avait point lu par lui-même l'ouvrage de Dominis : car il aurait vu que ce prélat, après avoir vaguement conçu que l'arc-en-ciel pouvait être produit par réfraction dans les gouttes d'eau, n'a point cherché à confirmer cette idée par les expériences dont parle Newton, et la manière dont il expose la formation de ce météore n'a aucun rapport avec la vérité. C'est réellement à Descartes, et à Descartes seul, que ces expériences appartiennent. Ce philosophe a fait pour la

véritable théorie de l'arc-en-ciel tout ce qui était possible à une époque où l'inégale réfrangibilité des rayons de la lumière n'était pas connue. En effet, il détermine d'abord, au moyen du calcul numérique, la marche des rayons lumineux qui pénètrent dans une goutte d'eau, et en sortent ensuite après une ou plusieurs réflexions. Ce calcul lui fait voir que, de tous les rayons qui peuvent ainsi tomber sur cette goutte, il n'y a que ceux qui y pénètrent sous un certain angle qui puissent revenir au spectateur sans s'écarter les uns des autres, et par conséquent sans s'affaiblir. Par-là il reconnaît généralement les véritables circonstances dans lesquelles le phénomène de l'arc-en-ciel peut se produire, et elles sont conformes à l'observation. Il restait à assigner la cause des couleurs. Descartes, sans la connaître, la ramène avec beaucoup de sagacité à un autre phénomène plus simple ; celui de la décomposition de la lumière par le prisme, et il montre que la partie de la goutte d'eau dans laquelle la lumière se réfracte doit disperser de la lumière, comme le ferait un prisme d'eau à faces planes, dont l'angle réfringent serait égal à celui que forment entre eux les plans tangens de la goutte aux points où les rayons entrent et sortent. Il confirma cette théorie par une expérience très-détaillée : « Ayant rempli d'eau à cet effet une grande fiole de verre toute ronde et fort transparente, j'ai trouvé, dit-il, que le soleil venant, par exemple, de la partie du ciel marquée A F Z, fig. 161, et mon œil étant au point E, lorsque je mettais cette boule en l'endroit B C D, sa partie D me paraissait toute rouge, et incomparablement plus éclatante que le reste ; et que soit que je l'approchasse, soit que je la reculasse, et que je la misse à droite ou à gauche, ou même que je la fisse tourner en rond autour de ma tête, pourvu que la ligne D E fît toujours un angle d'environ 42 degrés avec la ligne E M qu'il faut imaginer tendre du centre de l'œil vers celui du soleil, cette partie D paraissait toujours également rouge ; mais que, sitôt que je faisais cet angle D E M tant soit peu plus grand, cette rougeur disparaissait, et que, si je le faisais un peu moindre, elle ne disparaissait pas tout à coup, mais se divisait auparavant comme en deux par-

ties moins brillantes, et dans lesquelles on voyait du jaune, du bleu et d'autres couleurs. Puis regardant aussi vers l'endroit de cette boule qui est marqué K, j'ai aperçu que, faisant l'angle K E M d'environ 52 degrés, cette partie K paraissait aussi de couleur rouge, mais non pas si éclatante que D; et que, le faisant quelque peu plus grand, il n'y en paraissait plus aucune. D'où j'ai connu manifestement que tout l'air qui est vers M étant rempli de telles boules, ou en leur place de gouttes d'eau, il doit paraître un point fort rouge et fort éclatant en chacune de celles de ces gouttes dont les lignes tirées vers l'œil font un angle d'environ 42 degrés avec E M, comme je suppose celles qui sont marquées R; et que ces points regardés tous ensemble, sans qu'on remarque autrement le lieu où ils sont que par l'angle sous lequel ils se voient, doivent paraître comme un cercle continu de couleur rouge; et qu'il doit y avoir tout de même des points en celles qui sont marquées S et T, dont les lignes tirées vers E sont des angles un peu plus aigus avec E M qui composent des cercles de couleurs plus faibles, et que c'est en ceci que consiste le premier et principal arc-en-ciel; puis derechef, que l'angle M E K étant de 52 degrés, il doit paraître un cercle rouge dans les gouttes marquées X, et d'autres cercles de couleurs plus faibles dans les gouttes marquées Y; et que c'est en ceci que consiste le second et moins principal arc-en-ciel; et enfin qu'en toutes les autres gouttes marquées V il ne doit paraître aucune couleur ».

« Examinant après cela plus particulièrement en la boule B C D ce qui faisait que la partie D paraissait rouge, j'ai trouvé que c'était les rayons du soleil qui, venant d'A vers B, se courbaient en entrant dans l'eau au point B, et allaient vers C; d'où ils se réfléchissaient vers D, et de là, se courbant derechef en sortant de l'eau, tendaient vers E. Car sitôt que je mettais un corps opaque ou obscur en quelque endroit des lignes A B, B C, C D, ou D E, cette couleur rouge disparaissait; et quoique je couvrisse toute la boule, excepté les deux points B et D, et que je misse des corps obscurs partout ailleurs, pourvu que rien n'empêchât l'action des rayons A B C D E, elle ne laissait pas de

paraître. Puis cherchant aussi ce qui était la cause du rouge qui paraissait vers K, j'ai trouvé que c'était les rayons qui venaient d'F vers G, où ils se courbaient vers H, et en H se réfléchissaient vers I, et en I se réfléchissaient derechef vers K; puis enfin se courbaient au point K, et tendaient vers E. De façon que le premier arc-en-ciel est causé par des rayons qui parviennent à l'œil après deux réfractions et une réflexion, et le second, par d'autres rayons qui n'y parviennent qu'après deux réfractions et deux réflexions; ce qui empêche qu'il ne paraisse tant que le premier ».

« Mais la principale difficulté restait encore, qui était de savoir pourquoi y ayant plusieurs autres rayons qui, après deux réfractions et une ou deux réflexions, peuvent tendre vers l'œil, quand cette boule est en autre situation; il n'y a toutefois que ceux dont j'ai parlé qui fassent paraître quelques couleurs; et pour la résoudre, j'ai cherché s'il n'y avait point quelque autre sujet où elles parussent en même sorte, afin que par la comparaison de l'un et de l'autre je pusse mieux juger la chose ». C'est alors que Descartes compare la dispersion produite par la goutte d'eau à celle que produit un prisme à faces planes. Voilà la véritable physique mathématique, celle qui ramène les faits à d'autres faits par le calcul, indépendamment de toute hypothèse, et qui les rattache ainsi les uns aux autres par des nœuds indissolubles. Il ne manquait à cette théorie, pour la rendre complète, que la connaissance de l'inégale réfrangibilité de la lumière, et la mesure de cette inégalité dans les différens rayons simples, pour pouvoir calculer les incidences précises où ils sortent parallèles, et en déduire les diamètres intérieurs et extérieurs des arcs. C'est ce qu'a fait Newton; et cette addition est sans doute un des plus beaux résultats de la physique mathématique. Mais il faut remarquer, à l'avantage de Descartes, que son travail n'a reçu aucune atteinte d'une découverte si imprévue, et il en sera toujours ainsi quand on prendra uniquement l'expérience pour guide.

On observe aussi quelquefois dans le ciel d'autres météores lumineux d'une forme régulière, que l'on appelle des couronnes

et des parélies. Descartes a tenté d'expliquer ces phénomènes; mais il n'a donné à cet égard que des considérations hypothétiques incompatibles avec les faits. Huyghens a été plus heureux, et par un examen attentif de ces phénomènes il a été conduit à en donner une représentation assez fidèle pour que Newton n'ait pas cru nécessaire d'y rien ajouter; en conséquence je vais les exposer d'après lui.

Les couronnes sont, comme leur nom l'indique, des cercles lumineux qui paraissent quelquefois autour du soleil, ou la nuit autour de la lune. Ils sont ordinairement d'une blancheur uniforme; quelquefois cependant, lorsqu'ils sont plus vifs, ils présentent les couleurs de l'arc-en-ciel extérieur, le rouge en dedans. L'espace qu'ils embrassent est ordinairement plus sombre que la partie du ciel qui les environne : leur diamètre intérieur sous-tend le plus souvent un angle de 45 degrés; mais il va quelquefois jusqu'à 90 et davantage. Les circonstances nécessaires pour les produire paraissent être un temps calme et un ciel parsemé seulement de légères vapeurs. La seule description de ces apparences exige que les particules qui les produisent puissent intercepter la lumière du soleil par leur interposition directe sur la ligne menée de l'œil à cet astre, et même tout autour de cette ligne jusqu'à une distance angulaire plus ou moins considérable; mais au-delà de ce terme, il faut qu'elles puissent transmettre et ramener les rayons vers l'œil; enfin, pour satisfaire à la dispersion de couleurs qui s'observe quelquefois dans les couronnes, il faut que le retour des rayons vers l'œil soit opéré par réfraction. Toutes ces conditions seront remplies, si l'on conçoit dans l'air une multitude de globules sphériques dont les parties extérieures soient transparentes, et les intérieures opaques comme des globules de glace AA, fig. 162, renfermant un noyau de neige C. Telle est aussi l'idée de Huyghens : pour prouver la possibilité de l'existence de pareils globules dans l'atmosphère, il s'appuie de l'autorité de Descartes, qui assure avoir vu des grains de grêle ainsi conformés.

Pour montrer comment les effets des couronnes résulteraient de cette supposition, Huyghens trace la fig. 163, dans laquelle

B est le lieu de l'œil, BA l'axe mené de l'œil au centre du soleil, C, M, F, les grains de grêle à noyau opaque. Or, en considérant d'abord le grain C situé sur l'axe BA, et représentant par HK, LK les rayons solaires qui, par réfraction, deviennent tangens à son noyau, et qui par conséquent sont les premiers qui se puissent transmettre, il est clair que ce globule, non-seulement ne transmettra pas de rayons en B, mais n'en enverra point non plus dans tout l'intérieur du cône LKH. Par conséquent, si nous concevons un autre cône contraire, dont le sommet soit dans l'œil et dont les côtés BD, BE soient parallèles aux rayons limites HK, LK, tous les grains contenus dans l'intérieur de cette surface conique n'enverront point non plus de lumière à l'œil, ce qui produira sur la surface du ciel une aire circulaire plus obscure que le reste, puisqu'il ne s'y transmettra de rayons que ceux qui passent directement entre les globules ; mais les autres grains situés hors de cette surface, tels que FF, pourront envoyer, par réfraction dans l'œil, une partie des rayons qui leur arrivent, et qui passeront au-delà de leur noyau. Ainsi le diamètre apparent de la couronne dépendra du rapport qui existera entre la grosseur du noyau opaque et l'épaisseur de son enveloppe transparente. Par exemple, si le diamètre du noyau et le diamètre extérieur du globule sont entre eux comme 195 à 406, la couronne sous-tendra dans l'œil un angle de 45 degrés. Il est évident, d'ailleurs, à l'inspection seule de la figure, que les rayons rouges, étant les moins réfrangibles, doivent aussi paraître les moins déviés, et par conséquent les moins écartés de l'axe BA. Le rouge paraîtra donc en dedans de la couronne, et les autres couleurs suivront autour de celle-là dans l'ordre de la réfrangibilité. Mais comme l'espace angulaire sous-tendu par chacune d'elles aura une certaine grandeur dépendante du diamètre apparent du soleil, leur superposition pourra les affaiblir assez pour que le rouge qui confine au noyau opaque soit seul aperçu. Huyghens confirma ces considérations par l'expérience, en observant les apparences qu'offrait un globe mince de verre rempli d'eau, ayant dans son intérieur un noyau sphérique opaque, et placé

dans des positions diverses par rapport à l'oeil et au soleil.

Quoique cette ingénieuse explication satisfasse très-bien au phénomène des couronnes, on ne doit pas cependant lui attribuer une réalité physique. Car en limitant les apparences à la description qu'Huyghens en donne, on pourrait, comme nous le verrons plus tard, y satisfaire avec de simples globules d'eau liquide, au moyen d'une propriété de la lumière que Newton a découverte, et qu'Huyghens n'a pas connue. La question serait décidée directement, si, lorsque ces phénomènes paraissent, on pouvait s'assurer, par l'expérience, de la forme des corps qui les produisent. Il n'est pas impossible que les aérostats n'en fournissent quelques jours l'occasion. Jusque-là tout ce que l'on peut faire, c'est d'observer avec soin ces couronnes, lorsqu'elles paraissent, de mesurer exactement leur diamètre, de remarquer l'ordre de leurs couleurs, lorsqu'elles en présentent, de noter les circonstances météorologiques qui les accompagnent, surtout d'observer attentivement s'il s'en produit seulement une ou plusieurs concentriques les unes aux autres; et, dans ce dernier cas, quels sont leurs diamètres apparens. Car la simplicité ou la multiplicité des arcs, et les rapports de leurs diamètres fourniraient, comme on le sentira plus tard, le plus sûr moyen de décider quelles sont les causes qui les produisent.

C'est par des considérations analogues qu'Huyghens a expliqué les parélies. Ces phénomènes consistent dans l'apparition simultanée de plusieurs soleils, images fantastiques du soleil véritable. Ces images se montrent toujours sur l'horizon à la même hauteur que le vrai soleil, et elles sont toujours unies les unes aux autres par un cercle blanc pareillement horizontal, dont le pôle est au zénith. Ce cercle monte et descend sur l'horizon en même temps que le vrai soleil, et son demi-diamètre apparent est toujours égal à la distance de cet astre au zénith. Les images du soleil qui paraissent sur ce cercle, du même côté que le soleil véritable, présentent les couleurs de l'arc-en-ciel, et quelquefois le cercle lui-même est coloré dans la partie qui les avoisine. Au contraire, les images qui se forment du côté du cercle opposé au soleil sont toujours incolores; d'où l'on peut

conjecturer qu'elles sont produites par réflexion, ainsi que le grand cercle, et les autres par réfraction. En outre, quand ces phénomènes se produisent, on voit ordinairement autour du soleil une ou plusieurs couronnes circulaires concentriques qui offrent les couleurs de l'arc-en-ciel; et enfin on voit quelquefois naître sur ces couronnes mêmes, ou sur les points du grand cercle, d'autres linéamens d'arcs pareils, et même des arcs tout entiers. L'apparition de ce météore, la plus complète que l'on connaisse, est celle que Hevelius a observée à Dantzick le 20 février 1661. Elle est représentée fig. 164.

Pour concevoir la manière dont ces phénomènes peuvent se produire, il faut, comme l'a fait Huyghens, considérer d'abord ce cercle blanc, horizontal, qui entoure le zénith, et sur lequel se trouve toujours le vrai soleil, fig. 165. La blancheur de ce cercle, uniformément constatée dans toutes les observations de ce genre, indique qu'il est produit par réflexion; alors le problème se réduit à ceci : Supposant un nombre infini de corpuscules suspendus dans l'air, quelle forme faut-il leur attribuer pour que les rayons solaires réfléchis sur leurs surfaces forment toujours avec l'horizon le même angle que les rayons incidens dont ils dérivent? Il est évident que cette condition ne peut être remplie qu'en donnant aux corpuscules la forme de petits cylindres verticaux; et en effet, si l'on suppose que le soleil éclaire une infinité de pareils cylindres, il en résultera nécessairement un cercle blanc horizontal qui aura son pôle au zénith, et dont le demi-diamètre sera le complément de la hauteur du soleil sur l'horizon. Maintenant, pour satisfaire au phénomène des soleils colorés qui paraissent de part et d'autre, du soleil véritable, il suffit de supposer ces cylindres formés d'une partie extérieure transparente et d'un noyau cylindrique opaque, fig. 166. Car alors, par une réfraction latérale, opérée perpendiculairement à leur axe, ils produiront un effet analogue à celui des globules de grêle dans les couronnes, et avec plus d'éclat encore, à cause de leur forme allongée et du parallélisme de leur disposition, d'où résulteront les apparences des soleils colorés. Enfin, si l'on suppose, comme il est très-vraisemblable, que les extrémités

de ces cylindres soient l'une et l'autre arrondies, ils produiront dans ce sens les effets résultans de la sphéricité, et de là pourront naître les couronnes colorées concentriques au soleil véritable. Or, Descartes assure, dans le livre des météores, qu'il a quelquefois observé de pareils cylindres de grêle renfermant un noyau intérieur neigeux, opaque, et pareillement cylindrique. Enfin Huyghens a pour ainsi dire imité cette formation par l'expérience, en plaçant à diverses distances angulaires de son œil et du soleil, un cylindre de verre mince rempli d'eau, avec un noyau cylindrique opaque dans l'intérieur, et il a vu se réaliser ainsi, par l'expérience, tous les phénomènes que le calcul lui avait indiqués. Il a également montré comment ces calculs représentaient avec fidélité les circonstances caractéristiques du phénomène. Mais pour atteindre les derniers détails de l'observation d'Hevelius, il lui a fallu distribuer dans l'atmosphère, sous beaucoup de positions diverses, les corpuscules cylindriques et globulaires qu'il avait imaginés. Cette complication, qui paraît inhérente à ce genre de phénomènes, ne doit pas être une raison de rejeter l'idée d'Huyghens, mais plutôt un encouragement à observer exactement leurs apparences, pour pouvoir les lui comparer. La loi de la double réfraction, si long-temps méconnue, nous a appris qu'il ne fallait pas traiter légèrement les spéculations d'un génie si élevé; et Newton lui-même paraît les avoir adoptées dans cette circonstance, puisqu'en parlant des parélies dans son optique, il renvoie à l'explication d'Huyghens.

CHAPITRE III.

De l'Achromatisme.

La recherche des véritables rapports suivant lesquels la lumière se disperse dans les diverses substances n'a pas seulement conduit à reconnaître l'erreur de la loi que Newton avait donnée; elle a fait découvrir encore le moyen de corriger dans les lunettes la diffusion du foyer produite par l'inégale réfrangibilité des différens rayons. C'est pourquoi nous allons exposer ici, dans le plus grand détail, les preuves qui détruisent l'assertion de Newton, et en même temps nous exposerons les expériences qu'il faut lui substituer.

D'abord on peut s'assurer directement que la dispersion se fait par des lois très-différentes dans les différens milieux. Pour le prouver d'une manière incontestable, nous avons, M. Cauchoix et moi, construit des prismes avec diverses substances, et après avoir mesuré leurs angles, nous avons, suivant le procédé indiqué page 214, observé au cercle répétiteur la déviation des différens rayons, c'est-à-dire, l'angle que ces rayons, après leur sortie du prisme, formaient avec le rayon incident direct. Les différences de ces angles exprimaient les espaces occupés par les diverses couleurs dans chacun des deux spectres. Or, leur comparaison montre que ces espaces, comparés dans les diverses substances et pour des prismes de même angle ou d'angles divers, sont bien loin d'être proportionnels entre eux, comme le voudrait la loi de dispersion donnée par Newton.

Suivant cette loi, toute substance qui réfracte plus fortement qu'une autre devrait aussi disperser davantage. Cela est en effet ainsi pour l'ordinaire, mais non pas toujours. Par exemple, nous nous sommes assurés que l'huile de térébenthine réfracte moins que le crownglass de France, dans des circonstances pareilles : cependant nous avons trouvé qu'elle disperse davantage.

Plusieurs autres conséquences que Newton avait également conclues d'observations faites sur des dispersions faibles et presque égales ont pareillement besoin d'être modifiées. Par exemple, il assure que lorsqu'un trait de lumière, après avoir subi plusieurs réfractions successives, se trouve redressé parallèlement à sa direction primitive, il se trouve aussi recomposé. Voici des preuves du contraire. Le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction est pour l'huile de térébenthine 1,48156; pour notre crownglass 1,5117. Supposons qu'avec ces substances on construise deux prismes dont les angles réfringens soient très-petits, et tels que celui du liquide soit à celui du crown comme 0,5117 est à 0,4816, ou comme 1,0625 est à l'unité. Si l'on applique ces prismes l'un contre l'autre, de manière que leurs angles réfringens soient dirigés en sens opposés, et si ensuite on les fait traverser presque perpendiculairement par un trait de lumière blanche, on trouvera, par l'expérience, que l'axe moyen du faisceau émergent sera parallèle à celui du faisceau incident. On verra tout-à-l'heure, par le calcul, que la chose doit être ainsi; mais je la donne, pour le moment, comme un simple fait dont tout le monde peut s'assurer. Ainsi, suivant Newton, la lumière, étant redressée, devrait paraître incolore, ce qui n'arrive point. La dispersion produite par l'huile de térébenthine prédomine et produit des couleurs qui deviennent surtout sensibles lorsque l'on regarde l'objet réfracté à travers une lunette achromatique qui amplifie son image sans en changer la coloration. On pourrait faire des épreuves semblables en employant des prismes formés d'autres substances, pourvu que l'on variât leurs angles réfringens suivant des proportions convenables, que nous apprendrons plus bas à déterminer.

Enfin, il n'y a pas plus de réalité dans une autre assertion de Newton, qui est l'inverse de la précédente, et qui consiste en ce que la lumière émergente ne peut être incolore que quand elle est redevenue parallèle à la lumière incidente. Car si l'on assemble deux prismes de crownglass et d'huile de térébenthine, tels que l'angle réfringent du premier soit à celui du second comme 1,19326 est à l'unité, et qu'on joigne ces prismes en les op-

posant l'un à l'autre, l'excès de l'angle réfringent du crown et celui de sa force réfringente, produiront dans le faisceau réfracté une déviation considérable, et cependant ce faisceau restera sensiblement incolore. On obtiendra le même effet en assemblant un prisme de crownglass avec un prisme d'huile essentielle de citron dont les angles soient entre eux comme 1,2667 est à l'unité; ou bien encore un prisme de crownglass avec un de flintglass français dont les angles soient entre eux comme 1,6847 est à 1. Dans tous ces cas, et dans une infinité d'autres pareils, la lumière émergente est déviée considérablement. Néanmoins elle est sensiblement incolore. Tout au plus, sur les bords de l'image, aperçoit-on quelques franges colorées très-étroites, qui s'affaiblissent extrêmement à mesure que l'on diminue l'angle du prisme, et qui, dans un grand nombre de cas, deviennent tout-à-fait insensibles.

Je viens d'exposer ces résultats comme de simples faits que chacun peut constater ; il me reste à montrer comment on peut les découvrir ; comment on peut déterminer pour chaque substance ses vrais rapports de dispersion avec toutes les autres ; comment enfin on peut obtenir les angles sous lesquels il faut assembler des prismes de substances données pour que leur interposition ne produise aucune coloration dans les objets. C'est ce qu'on appelle déterminer les conditions de l'*achromatisme*.

Pour les découvrir, nous examinerons d'abord la marche d'un rayon homogène quelconque, à travers un nombre quelconque de prismes, dont les angles et les forces réfringentes sont donnés : nous fixerons par le calcul les déviations que les rayons éprouvent. Alors, pour que les objets paraissent sans couleurs, il faudra que tous ces rayons, supposés de nature diverse, deviennent parallèles entre eux après leur émergence, comme ils le sont à leur incidence. Si ce parallélisme a lieu, le faisceau émergent produira nécessairement sur l'œil le même effet que la lumière directe, puisqu'il sera composé de la même manière, et c'est ce que l'expérience confirme. Nous verrons, par le calcul, si cette condition peut être remplie exactement

ou seulement avec un degré d'approximation suffisant pour nos organes ; et enfin, je décrirai un instrument qui fera connaître dans tous les cas, avec la plus grande exactitude, les rapports des angles qui y satisfont.

Considérons, fig. 167, un nombre quelconque de prismes réfringens A'CB', A''CB'' ... etc. assemblés autour du même point C, et séparés les uns des autres par des prismes d'air B'CA'', B''C'A''... etc. Supposons que n_1 n_2 n_3 soient les rapports constans du sinus d'incidence au sinus de réfraction pour un rayon homogène d'une nature déterminée, lorsqu'il passe de l'air dans ces différens prismes ; appelons a_1 a_2 a_3... a_ν leurs angles réfringens et b_1 b_2 b_3... les angles dièdres compris par les intervalles d'air qui les séparent. Enfin concevons qu'un rayon lumineux homogène SI vienne traverser successivement tous ces prismes, en faisant avec leurs diverses surfaces les angles successifs désignés dans la figure par φ φ_1 φ_2 φ_3 ... φ_ν, et cherchons à déterminer la marche de ce rayon, ainsi que les déviations qu'il doit éprouver.

Il est visible que tout se réduit à calculer successivement les angles φ_1 φ_2 φ_3 ... φ_ν lorsque l'on donne l'angle φ formé par le rayon incident avec la première surface réfringente A'C. Or, cela est très-facile ; car, puisque le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence est toujours une quantité constante pour le même rayon et la même substance, il est visible que les angles cherchés seront assujettis aux équations qui expriment cette condition, c'est-à-dire, qu'on aura

(1)
$$\begin{aligned} \cos\varphi &= n_1 \cos\varphi_1 \\ \varphi_2 &= \varphi_1 + a_1 \\ \cos\varphi_3 &= n_1 \cos\varphi_2 \\ \varphi_4 &= \varphi_3 + b_1 \\ \cos\varphi_4 &= n_2 \cos\varphi_5 \\ \varphi_6 &= \varphi_5 + a_2 \\ \cos\varphi_7 &= n_2 \cos\varphi_6 ; \end{aligned}$$

et enfin
$$\begin{aligned} \varphi_{4\nu-2} &= \varphi_{4\nu-3} + a_\nu \\ \cos\varphi_{4\nu-1} &= n_\nu \cos\varphi_{4\nu-2} ; \end{aligned}$$

au moyen de ces équations tous les angles $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3 \ldots$ pourront être calculés successivement. Lorsqu'on les connaîtra, on aura bien aisément la déviation totale éprouvée par le rayon de lumière ; car si après son émergence et par un point quelconque de sa direction on mène une droite OS parallèle au rayon incident SI, l'angle ROS que nous désignerons par Δ sera la déviation demandée. Or, si l'on prolonge le rayon émergent OR jusqu'au point K, où il rencontre la première surface CA', et si ensuite on prolonge la ligne CA' jusqu'à sa rencontre avec OS en D, l'angle ODK sera égal à φ comme alterne interne, et le triangle OKD donnera

$$\Delta + \varphi + \text{OKD} = 180^\circ, \quad \text{ou} \quad \Delta = 180^\circ - \text{OKD} - \varphi\,;$$

mais l'angle OKD étant extérieur au triangle KCR, on a

$$\text{OKD} = 180^\circ - \varphi_{4\nu-1} + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \ldots + b_{n-1} + a_n\,;$$

par conséquent

$$\text{H} = \varphi_{4\nu-1} - \varphi - a_1 - b_1 - a_2 - b_2 \ldots - a_n\,;$$

ce qui donne un moyen facile d'obtenir Δ lorsque l'on a calculé l'angle d'émergence $\varphi_{4\nu-1}$.

Nous avons supposé dans la figure que les angles réfringens des prismes étaient tous dirigés du même côté. Cette supposition avait l'avantage de donner plus de symétrie aux formules, ce qui permettait de les étendre facilement à un nombre de prismes quelconque. Mais si un ou plusieurs prismes avaient leurs angles réfringens tournés en sens contraire des autres, il suffirait de supposer ces angles réfringens négatifs ; et achevant le calcul avec cette seule modification, on arriverait aux résultats qui conviendraient au cas particulier qu'on se serait proposé.

Pour donner un exemple de ceci, nous allons appliquer la formule à un cas qui nous sera fort utile, c'est celui où l'on suppose que les angles réfringens des prismes sont tous très-petits, et que le rayon lumineux les traverse presque perpendiculairement à leurs surfaces ; alors les angles $b_1\ b_2\ b_3$ compris entre les prismes doivent être aussi fort petits. Les choses étant ainsi supposées, les angles $\varphi\ \varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3 \ldots$ etc. seront très-peu différens de l'angle droit, et par conséquent leurs cosinus seront très-petits. On pourra donc regarder ces cosinus comme pro-

portionnels aux angles $90 - \varphi$, $90 - \varphi_1$, $90 - \varphi_2'$... qui sont les complémens de $\varphi \varphi_1 \varphi_2$ ...; et cette supposition sera d'autant plus approchée de la vérité, que les incidences et les émergences des rayons sur les surfaces réfringentes approcheront davantage de la perpendiculaire. En introduisant d'abord ces modifications dans les trois premières équations qui se rapportent au premier prisme, elles deviennent

$$90 - \varphi = n_1 (90 - \phi_1)$$
$$\varphi_2 = \varphi_1 + a$$
$$90 - \varphi_3 = n_1 (90 - \varphi_2).$$

On peut prendre dans la première la valeur de φ_1, et la substituer dans la seconde; puis dans celle-ci on connaîtra φ_2, et on pourra la substituer dans la troisième; on aura ainsi

$$\varphi_1 = 90^0 - \frac{(90 - \varphi)}{n_1}$$
$$\varphi_2 = 90 + a_1 - \frac{(90 - \phi)}{n_1}$$
$$\varphi_3 = \varphi + n_1 a_1.$$

On connaît donc ainsi l'angle d'émergence φ_3, pour le premier prisme, en fonction de l'angle d'incidence φ. On aura de même, pour le second prisme ϕ_7 en fonction de φ_4, et ainsi de suite jusqu'au dernier, pour lequel on aura $\varphi_{4\nu-1}$ en fonction de $\varphi_{4\nu-4}$. Or, si l'on écrit toutes ces équations les unes sous les autres, en y joignant celles qui appartiennent aux prismes d'air interposés, on formera le tableau suivant :

$$\phi_3 = \varphi + n_1 a_1$$
$$\varphi_4 = \varphi_3 + b_1$$
$$\varphi_7 = \varphi_4 + n_2 a_2$$
$$\varphi_8 = \varphi_7 + b_2$$
$$\vdots$$
$$\varphi_{4\nu-1} = \varphi_{4\nu-4} + n_\nu a_\nu.$$

Ajoutant ces équations membre à membre, tous les angles d'incidence et d'émergence disparaissent, excepté le premier et le dernier, ce qui donne

$$\phi_{4\nu-1} = \varphi + b_1 + b_2 \ldots + b_{\nu-1} + n_1 a_1 + n_2 a_2 \ldots + n_\nu a_\nu.$$

Or, la valeur de la déviation Δ est généralement

$$\Delta = \phi_{4\nu-1} - \phi - a_1 - b_1 - a_2 - b_2 \ldots - a_\nu;$$

par conséquent, en mettant pour $\phi_{4\nu-1}$ sa valeur, il vient

$$\Delta = (n_1 - 1)\, a_1 + (n_2 - 1)\, a_2 + (n_3 - 1)\, a_3 + \ldots (n_\nu - 1)\, a_\nu;$$

expression très-simple et très-symétrique.

Dans toutes les expériences que l'on peut tenter avec des prismes solides ou liquides, les rapports de réfraction $n_1\, n_2 \ldots n_\nu$ seront plus grands que l'unité; par conséquent $n_1 - 1$, $n_2 - 1 \ldots n_\nu - 1$, seront des quantités positives. Si, de plus, tous les angles réfringens des prismes sont tournés dans le même sens, $a_1, a_2, a_3 \ldots a_\nu$, seront également positifs. Ainsi la valeur de la déviation Δ sera toute entière composée de quantités positives; de sorte qu'elle ne pourra jamais devenir nulle, à moins que chacun des termes qui la composent ne devienne nul séparément. Il est donc impossible que le rayon émergent soit parallèle au rayon incident, lorsque les prismes sont ainsi disposés.

Mais si quelques-uns des prismes ont leurs angles réfringens tournés en sens contraire des autres, les valeurs de a correspondantes à ces prismes, deviendront négatives; une partie des termes qui composent l'expression de Δ, s'entre-détruiront mutuellement, et il pourra même arriver que la compensation soit telle qu'elle rende Δ nulle. Supposons, par exemple, qu'il n'y ait que deux prismes, que le premier soit formé de crownglass, pour lequel on ait $n_1 = 1{,}5117$, et le second d'huile de térébenthine, pour laquelle on ait $n_2 = 1{,}48156$, on aura alors

$$n_1 - 1 = 0{,}5117, \qquad n_2 - 1 = 0{,}48156;$$

Par conséquent, si l'on veut que la déviation moyenne du faisceau lumineux à travers ces deux prismes soit nulle pour de très-petites incidences, il faudra que leurs angles réfringens a_1 et a_2 soient assujettis à la condition

$$0 = 0{,}5117\, a_1 + 0{,}4816\, a_2;$$

ce qui donne $\dfrac{a_2}{a_1} = -\dfrac{0{,}5117}{0{,}4816} = -1{,}0625$,

comme nous l'avons annoncé page 478. L'opposition de signe

de a_2 par rapport à a_1, indique que le second prisme doit être placé en sens contraire du premier.

En général, quelles que soient les incidences des rayons et les angles des prismes, si, dans nos formules complètes, nous mettons successivement pour n n_1 n_2.... les rapports de réfraction qui conviennent aux différens rayons homogènes, le calcul des équations (1) effectué par les tables de logarithme, nous donnera successivement les angles ϕ_1 ϕ_2 ϕ_3.... ϕ_{4v-1} que ces divers rayons forment à leur émergence avec la dernière surface du dernier prisme; et par conséquent on connaîtra aussi pour chacun d'eux la valeur de Δ, c'est-à-dire la déviation qu'il éprouve. Si nous supposons que le faisceau incident SI, fig. 168, soit un trait de lumière solaire directe, et par conséquent incolore, les divers rayons hétérogènes dont ce faisceau sera composé rencontreront la première surface du premier prisme sous le même angle ϕ; mais en traversant les prismes, ils éprouveront des réfractions inégales, suivant leur inégale réfrangibilité; par conséquent, en sortant du dernier prisme, ils pourront et devront même, en général, être inclinés les uns par rapport aux autres, de parallèles qu'ils étaient d'abord. Supposons que ces directions diverses soient représentées par les lignes rr', oo'... uu'; alors on conçoit que de chaque point d'émergence, il ne pourra parvenir qu'un seul rayon à l'observateur placé en O; mais cet observateur pourra recevoir aussi les autres rayons par des points d'émergence différens; et pour trouver ces points, il suffira de mener du point O des droites OR, OO.... OU, respectivement parallèles aux droites rr', oo'.... uu'. En effet, puisque ces droites représentent les directions diverses des rayons à leur émergence, lorsqu'ils sont entrés parallèlement dans le premier prisme, il est clair que si ces rayons retournaient sur eux-mêmes par les mêmes droites, ils ressortiraient de nouveau parallèles par la première face des prismes, comme lorsqu'ils y étaient entrés. De même, en supposant les surfaces des prismes indéfiniment étendues, les rayons émergens OR... OU donneront des rayons incidens

I′S, I″S... parallèles entre eux, mais qui répondront à différens points d'incidence. Or, puisque nous supposons le point lumineux infiniment éloigné, tous les rayons incidens homogènes SI′... SI″... existent réellement dans la lumière incidente composée qui arrive à ces points, suivant des directions parallèles; par conséquent, chacun parviendra réellement en O à l'observateur, et lui donnera une image colorée du point lumineux. La teinte de toutes ces images, formée par la succession des rayons de réfrangibilité inégale, composera un spectre coloré, analogue à celui que produit un trait de lumière solaire à travers un seul prisme; mais l'arrangement des couleurs pourra y être fort différent, car cet arrangement varie suivant la disposition et la nature des prismes réfringens que la lumière traverse.

Dans tous les cas, la disposition des couleurs sera indiquée par les valeurs de la déviation Δ. Si cette déviation, par exemple, est moins grande pour les rayons rouges que pour les violets, l'extrémité rouge du spectre sera la moins écartée du rayon direct OS, comme dans la vision par un seul prisme. Mais le contraire arrivera, si la déviation Δ est plus grande pour les rayons rouges que pour les autres, et l'ordre des couleurs sera renversé.

Entre ces deux oppositions, il peut arriver le cas où les valeurs de Δ seraient toutes égales entre elles; alors les divers rayons émergens OR, OU... deviendraient parallèles entre eux; et comme ils se réunissent au même point O, il s'ensuit qu'ils coïncideraient absolument. Dans ce cas, l'observateur placé en O recevra tous ces rayons ensemble, suivant une direction commune, et avec les mêmes proportions d'intensité qu'ils ont dans la lumière incidente directe; il ne pourra donc y faire aucune différence d'avec cette dernière; et par conséquent, si la lumière incidente est blanche, le rayon émergent lui paraîtra blanc aussi. Lorsque ce cas aura lieu, les différens prismes que le rayon traverse formeront un assemblage *achromatique*, et n'altéreront nullement les couleurs propres des objets.

Jusqu'ici nous n'avons considéré qu'un seul point rayon-

nant très-éloigné. Si l'objet lumineux avait une étendue sensible, quoiqu'il fût toujours très-éloigné, on pourrait appliquer à chacun de ses points en particulier tout ce que nous venons de dire. Par conséquent chacun d'eux donnerait, en général, un spectre coloré, et ces différens spectres se superposant les uns sur les autres, confondraient leurs couleurs. Si l'objet est d'une teinte uniforme, s'il est blanc, par exemple, cette superposition, reproduite également partout, recomposera une teinte uniforme dans le milieu de l'image. Mais les bords seront toujours frangés de couleurs, dans une étendue d'autant plus grande, que la réfraction produite par le système des prismes sera plus considérable; si, au contraire, l'objet était composé de couleurs différentes, cette superposition n'étant plus égale, son image serait partout altérée, et l'on ne pourrait plus distinguer ses diverses parties. La même chose arriverait si son diamètre apparent, vu à travers le prisme, était moindre que l'étendue de la dispersion; et c'est ainsi que la lumière solaire, transmise à travers un seul prisme de verre dont l'angle réfringent est considérable, donne déjà une image colorée dans toute son étendue.

Supposons maintenant les prismes calculés et disposés de manière que les divers rayons hétérogènes partis du même point sortent parallèles entre eux après leur émergence. Alors chacun des points de l'objet donnera une image unique, parfaitement distincte, colorée de sa couleur naturelle, et séparée de toutes celles des autres points. On verra donc alors l'objet comme à la vue simple, quoique son image soit déviée; c'est le cas de l'*achromatisme*.

Essayons d'abord de remplir cette condition, en supposant que l'objet lumineux soit un point, sans diamètre sensible et placé à une distance infinie. Il faudra que la déviation Δ soit la même pour tous les rayons hétérogènes partis de ce point. Or, on a généralement

$$\Delta = \varphi_{4v-1} - \varphi - a_1 - b_1 - a_2 - b_2 \ldots - a_v.$$

L'angle d'incidence φ est commun à tous les rayons, ainsi que

les angles réfringens a_1 b_1 a_2 b_2..., etc. ; il suffit donc que l'angle d'émergence ϕ_{4v-1} soit aussi constant, et en effet il est visible que cette constance rend les rayons émergens parallèles.

Or, nous avons donné plus haut les relations générales qui lient l'angle d'incidence ϕ à l'angle d'émergence ϕ_{4v-1}. Les valeurs qui en résultent pour ce dernier angle varient d'une couleur à une autre, l'incidence restant la même, parce que les rapports de réfraction n_1 n_2.... changent. Il faut donc chercher les variations que ces changemens produisent dans les angles d'émergence ϕ_{4v-1} ; et en les égalant à zéro, on aura les conditions nécessaires pour que tous les rayons émergens sortent parallèles ; d'où l'on voit qu'il y aura autant de ces conditions qu'il y aura de rayons hétérogènes, et par conséquent, à parler en toute rigueur, il devra y en avoir une infinité.

Mais cette rigueur n'est pas indispensablement nécessaire pour les applications; car lorsque les rayons extrêmes et les moyens, par exemple, sortent parallèles entre eux, les rayons intermédiaires s'en écartent de quantités fort petites, à cause du peu de différence qui existe entre les rapports de réfraction pour les différentes couleurs du spectre. Cet écart peut même devenir assez faible pour que l'œil ne l'aperçoive pas ou le tolère facilement ; et alors l'achromatisme, sans être rigoureux, sera suffisant pour les usages optiques. On le rendrait encore plus exact en accordant ainsi un plus grand nombre de rayons ; d'où l'on voit qu'en général il nous faut d'abord chercher la condition de l'achromatisme pour deux rayons, relativement auxquels les valeurs de n_1, n_2... soient peu différentes ; après quoi il ne restera plus qu'à appliquer cette condition à un nombre de rayons suffisant pour que la lumière émergente soit sensiblement recomposée.

Supposons donc qu'ayant appliqué les formules de la page 479 à un rayon homogène d'une certaine couleur, nous veuillions les appliquer à un autre rayon relativement auquel les rapports constans de réfraction dans les différens prismes soient $n_1 + \delta n_1$,

$n_2 + \delta n_2 \ldots$ et désignons en général par $\varphi + \delta\varphi$, $\varphi_1 + \delta\varphi_1 \ldots$ etc. les angles que le second rayon forme avec les différentes surfaces des prismes. Dans le cas particulier qui nous occupe, δn_1, $\delta n_2 \ldots$ seront de très-petites quantités dont nous pourrons négliger les carrés ou les produits : en outre, $\delta\varphi$ sera nul, puisque les rayons de diverses couleurs qui composent la lumière incidente arrivent au premier prisme ensemble, suivant une même direction. Alors $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2 \ldots$ seront aussi des quantités fort petites du même ordre que δn_1, $\delta n_2 \ldots$ dont elles dépendent. D'après cela, on voit que leurs valeurs s'obtiendront en différenciant les équations successives par lesquelles les angles φ, φ_1, $\varphi_2 \ldots$ sont liés entre eux. Appliquons ceci, par exemple, au premier prisme ; les équations générales seront

$$\cos\varphi = n_1 \cos\varphi_1 \,; \quad \varphi_2 = a + \varphi_1 \,; \quad \cos\varphi_3 = n_1 \cos\varphi_2.$$

Si nous y faisons varier n_1 de δn_1, et φ de $\delta\varphi$, pour plus de généralité, il viendra :

$$\sin\varphi\,\delta\varphi = n_1 \sin\varphi_1\,\delta\varphi_1 - \cos\varphi_1\,\delta n_1$$
$$\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1$$
$$\sin\varphi_3\,\delta\varphi_3 = n_1 \sin\varphi_2\,\delta\varphi_2 - \cos\varphi_2\,\delta n_1.$$

Tirons de la première la valeur de $\delta\varphi_1$, et substituons-la dans la seconde, nous aurons $\delta\varphi_2$. Substituons celle-ci dans la troisième, nous aurons $\delta\varphi_3$. On trouve ainsi

$$\delta\varphi_3 = -\frac{\delta n_1 \cos\varphi_2}{\sin\varphi_3} + \frac{\delta n_1 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_3} + \frac{\delta\varphi . \sin\varphi . \sin\varphi_2}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_3},$$

les deux premiers termes peuvent se réunir en un seul ; en les réduisant au même dénominateur, ils deviennent

$$\frac{\delta n_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_3} \quad \text{ou} \quad \frac{\delta n_1 \sin a_1}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_3}.$$

Ainsi, après cette réduction, on a enfin

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta n_1 \sin a_1}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_3} + \frac{\delta\varphi . \sin\varphi \sin\varphi_2}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_3}.$$

Telle est donc la valeur de $\delta\varphi_3$ en fonction de δn_1 et de $\delta\varphi$ pour le premier prisme ; on aura de même dans le second la valeur de

$\delta\phi_7$ en fonction de a_2, de n_2, et de l'incidence ϕ_4. Cette valeur, absolument pareille à la précédente, sera

$$\delta\phi_7 = \frac{\delta n_2 \sin a_2}{\sin\phi_5 \sin\phi_7} + \frac{\delta\phi_4 \sin\phi_4 \sin\phi_6}{\sin\phi_5 \sin\phi_7}.$$

Pour le troisième prisme, on aurait encore

$$\delta\phi_{11} = \frac{\delta n_3 \sin a_3}{\sin\phi_9 \sin\phi_{11}} + \frac{\delta\phi_8 \sin\phi_8 \sin\phi_{10}}{\sin\phi_9 \sin\phi_{11}},$$

et ainsi de suite pour tant de prismes que l'on voudra. Il ne reste plus qu'à lier ces expressions entre elles. Or, de même que l'on a trouvé $\delta\phi_2 = \delta\phi_1$, on trouvera

$$\delta\phi_4 = \delta\phi_3$$
$$\delta\phi_8 = \delta\phi_7$$
$$\delta\phi_{12} = \delta\phi_{11},$$

et ainsi de suite; de sorte que suivant le nombre des prismes on aura pour le dernier angle $\phi_{4\nu-1}$ les formules suivantes :

pour 1 prisme,

$$\delta\phi_3 = \frac{\delta n_1 \sin a_1}{\sin\phi_1 \sin\phi_3} + \frac{\delta\phi \sin\phi \sin\phi_2}{\sin\phi_1 \sin\phi_3};$$

pour 2 prismes,

$$\delta\phi_7 = \frac{\delta n_2 \sin a_2}{\sin\phi_5 \sin\phi_7} + \frac{\delta n_1 \sin a_1 . \sin\phi_4 \sin\phi_6}{\sin\phi_1 \sin\phi_3 \sin\phi_5 \sin\phi_7}$$
$$+ \frac{\delta\phi \sin\phi \sin\phi_2 \sin\phi_4 \sin\phi_6}{\sin\phi_1 \sin\phi_3 \sin\phi_5 \sin\phi_7};$$

pour 3 prismes,

$$\delta\phi_{11} = \frac{\delta n_3 \sin a_3}{\sin\phi_9 \sin\phi_{11}} + \frac{\delta n_2 \sin a_2 . \sin\phi_8 \sin\phi_{10}}{\sin\phi_5 \sin\phi_7 \sin\phi_9 \sin\phi_{11}}$$
$$+ \frac{\delta n_1 . \sin a_1 \sin\phi_4 \sin\phi_6 \sin\phi_8 \sin\phi_{10}}{\sin\phi_1 \sin\phi_3 \sin\phi_5 \sin\phi_7 \sin\phi_9 \sin\phi_{11}}$$
$$+ \frac{\delta\phi . \sin\phi \sin\phi_2 \sin\phi_4 \sin\phi_6 \sin\phi_8 \sin\phi_{10}}{\sin\phi_1 \sin\phi_3 \sin\phi_5 \sin\phi_7 \sin\phi_9 \sin\phi_{11}}.$$

La loi de ces formules est évidente, et peut être étendue sans difficulté à un nombre quelconque de prismes d'angles réfrin-

gens quelconques. Quand on voudra en faire usage, il faudra commencer par calculer les valeurs successives des angles $\varphi\, \varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3 \ldots$, relativement à un des rayons que l'on compare, en partant de l'angle d'incidence φ qui doit être donné, et des valeurs de $n_1\, n_2 \ldots$ qui doivent être aussi données relativement à ce même rayon. Ces angles $\varphi\, \varphi_1\, \varphi_2 \ldots$ étant connus, on les substituera dans notre formule, ainsi que $\delta n_1\, \delta n_2 \ldots$, et elle donnera, avec une approximation toujours suffisante, la valeur de la dernière différence $\delta \varphi_{4\nu-1}$, laquelle, ajoutée à $\varphi_{4\nu-1}$, forme l'angle d'émergence qui convient au second rayon. Ceci suppose uniquement, comme condition essentielle, que les deux rayons que l'on compare traversent réellement tous les prismes, et sortent du dernier par réfraction ; car si l'un d'eux devait se réfléchir intérieurement, au lieu de se transmettre, il arriverait que quelqu'un des angles d'émergence $\varphi_3\, \varphi_7\, \varphi_{11} \ldots$ deviendrait nul, ou presque nul, ce qui rendrait sa différence infinie, ou du moins très-considérable, de très-petite que nous l'avons supposée dans notre calcul. Mais lorsqu'on a pour but de comparer les dispersions de la lumière à travers diverses substances, on a toujours grand soin de se tenir éloigné du cas précédent, et l'on dispose les prismes pour qu'ils transmettent la lumière, non pour qu'ils la réfléchissent intérieurement. Ainsi le cas d'exception que nous venons de remarquer dans nos formules ne se rencontrera jamais dans les applications. De plus, il faudra, pour l'homogénéité du calcul numérique, exprimer le petit angle $\delta \varphi$ en parties du rayon des tables qui est ici pris pour unité ; et alors $\delta \varphi_3\, \delta \varphi_7 \ldots \delta \varphi_{\nu-1}$ se trouveront exprimés d'une manière semblable ; ou, ce qui revient au même, il faudra, dans la formule, remplacer ces petits angles par leurs sinus.

Maintenant il nous est facile d'établir en général les conditions nécessaires pour le parallélisme des rayons émergens. Il suffit d'écrire que les variations du dernier angle d'émergence sont nulles, quand on passe d'un de ces rayons à l'autre. Par exemple, si nous ne considérons que trois prismes, il faut égaler à

zéro la valeur de $\delta\varphi_{11}$, et de plus il faudra maintenant y supposer $\delta\varphi$ nul pour exprimer que les rayons incidens sont parallèles; on aura ainsi, après avoir supprimé les facteurs communs,

$$\begin{aligned} 0 = &+ \delta n_1 \sin a_1 \sin \varphi_4 \sin \varphi_6 \sin \varphi_8 \sin \varphi_{10} \\ &+ \delta n_2 \sin a_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 \sin \varphi_8 \sin \varphi_{10} \\ &+ \delta n_3 \sin a_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 \sin \varphi_5 \sin \varphi_7 ; \qquad \text{(A)} \end{aligned}$$

équation dans laquelle $a_1\, a_2\, a_3$ désignent les angles réfringens des prismes successifs, et $\delta n_1\, \delta n_2\, \delta n_3$ les variations des rapports constans de réfractions dans les prismes pour les deux rayons que l'on veut rendre parallèles. De plus, comme nous négligeons les carrés de ces petites quantités, on voit que les angles $\varphi\, \varphi_1\, \varphi_2 \ldots$ peuvent être calculés pour un quelconque des rayons que l'on compare, ou si l'on veut, pour le rayon moyen entre eux.

Supposons d'abord, comme dans la page 480, que les angles réfringens $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ sont tous très-petits, et que le rayon lumineux les traverse presque perpendiculairement à leurs surfaces. Cela nécessite, comme on l'a dit alors, que les angles $b_1\, b_2 \ldots$ compris entre les prismes, soient pareillement fort petits. Dans ce cas, les angles d'incidence et d'émergence $\varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3 \ldots$ sont très-peu différens de l'angle droit, et par conséquent leurs sinus, qui seuls entrent dans la formule, seront presque égaux à l'unité; c'est-à-dire que leurs valeurs pourront être représentées par $1 - \alpha$, $1 - \beta$, $1 - \gamma$, $\alpha\, \beta\, \gamma$ étant des quantités fort petites. Par conséquent, si l'on substituait ces valeurs dans l'équation de l'achromatisme, elle se trouverait composée de deux parties: l'une, qui sera la plus importante, sera indépendante de $\alpha\, \beta\, \gamma$; l'autre, qui se trouvera multipliée par les diverses puissances de ces quantités, sera très-petite par rapport à la première. On peut donc, pour une première approximation, se borner d'abord à détruire la partie de l'équation qui est indépendante de $\alpha\, \beta\, \gamma \ldots$ puisque l'autre s'affaiblira de plus en plus à mesure que l'on diminuera les angles réfringens des prismes et les incidences des rayons. Or, cette première partie s'obtiendra en substituant l'unité à la place de $\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots$; de sorte que l'on aura ainsi

$$0 = \delta n_1 \sin a_1 + \delta n_2 \sin a_2 + \delta n_3 \sin a_3 \ldots$$

C'est la condition de l'achromatisme pour les très-petits angles.

On peut facilement vérifier ce résultat, en le tirant directement de l'expression que nous avons trouvée pour ce cas page 481. Nous avons eu alors

$$\Delta = (n_1 - 1)\, a_1 + (n_2 - 1)\, a_2 + (n_3 - 1)\, a_3 \ldots.$$

Par conséquent, relativement à un autre rayon homogène, mais d'une réfrangibilité différente, ce serait

$$\Delta_1 = (m_1 - 1)\, a_1 + (m_2 - 1)\, a_2 + (m_3 - 1)\, a_3 \ldots.$$

Retranchez ces valeurs de Δ et de Δ_1 l'une de l'autre, il vient

$$\Delta - \Delta_1 = (n_1 - m_1)\, a_1 + (n_2 - m_2)\, a_2 + \ldots.$$

ou, en exprimant les différences des rapports de réfraction par δn_1 $\delta n_2 \ldots$ comme nous l'avons fait tout-à-l'heure,

$$\Delta - \Delta_1 = a_1\, \delta n_1 + a_2\, \delta n_2 + \ldots.\ a_\nu\, \delta n_\nu.$$

Or, $\Delta - \Delta_1$ est précisément la différence de déviation des deux rayons homogènes que l'on compare. Si l'on veut que ces deux rayons soient parallèles, il faut que $\Delta - \Delta_1$ soit nul, ce qui donne $0 = a_1\, \delta n_1 + a_2\, \delta n_2 + \ldots.\ a_\nu\, \delta n_\nu$;

ou en substituant aux rapports des petits arcs a_1 $a_2 \ldots$ ceux de leurs sinus

$$0 = \delta n_1 \sin a_1 + \delta n_2 \sin a_2 \ldots. + \delta n_\nu \sin a_\nu,$$

comme précédemment. Supposons que l'on ait déterminé directement les valeurs de $n\, n_1\, n_2 \ldots$ pour deux des rayons du spectre, en observant immédiatement les déviations de ces deux rayons à travers les substances que l'on veut compenser. En retranchant ces rapports les uns des autres, on connaîtra δn_1 $\delta n_2 \ldots$ Par conséquent si l'on met pour ces quantités leurs valeurs dans la formule, on aura entre les angles réfringens des prismes une équation à laquelle ils devront satisfaire pour que les deux rayons que l'on a considérés, après avoir traversé l'assemblage de ces prismes, sortent parallèles entre eux.

La différence de réfrangibilité qui existe entre les différens rayons est inégale dans les diverses substances, mais elle a toujours lieu dans le même sens; c'est-à-dire que dans toutes les substances les rayons violets, par exemple, sont plus réfrangibles que les rayons bleus; les bleus sont plus réfrangibles que les verts, et ainsi de suite. Par conséquent, les valeurs de

δn_1, δn_2, δn_3.... seront toutes de même signe, positives ou négatives. Si de plus les angles réfringens des prismes sont tous dirigés dans le même sens, les valeurs de $a_1\, a_2 \ldots a_\nu$ seront aussi toutes de même signe; par conséquent tous les termes de $\Delta - \Delta_1$ ne pourront pas s'entre-détruire, comme notre équation le suppose, et l'achromatisme sera impossible avec cette disposition.

Mais si quelques-uns des angles réfringens sont tournés en sens contraire des autres, alors la valeur de a qui y correspond sera de signe contraire à celles-là, par exemple, négative. Il pourra donc s'établir entre les différens termes de l'équation une compensation telle que leur somme soit nulle, et l'achromatisme sera possible.

S'il n'y a que deux prismes, cette condition suffira pour déterminer leurs rapports; car on aura alors

$$0 = \delta n_1 \sin a_1 + \delta n_2 \sin a_2,$$

ce qui donne
$$\frac{\sin a_2}{\sin a_1} = -\frac{\delta n_1}{\delta n_2}.$$

Le signe négatif de $\sin a_2$ indique que l'angle réfringent du second prisme doit être dirigé en sens contraire du premier; au moyen de ces conditions, les deux rayons que l'on a considérés sortiront des deux prismes parallèles entre eux.

Si l'on connaissait encore les valeurs de $\delta n_1\, \delta n_2\, \delta n_3 \ldots$ pour un de ces rayons comparés à un troisième rayon du spectre, en mettant ces nouvelles valeurs dans l'équation générale, on aurait une nouvelle condition, à laquelle les angles réfringens $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ devraient satisfaire pour que le troisième rayon sortît parallèle aux deux autres, et par conséquent pour que les trois rayons sortissent parallèles entre eux. Cette nouvelle condition ne pourrait pas être satisfaite en général, si l'on n'employait que deux prismes, puisque la condition du parallélisme des deux premiers rayons suffit pour déterminer le rapport $\frac{\sin a_2}{\sin a_1}$; mais en employant trois prismes, on pourra accorder les trois rayons; car on aura ainsi deux équations entre les trois angles $a_1\, a_2\, a_3$,

et l'on en tirera les valeurs de $\frac{\sin a_2}{\sin a_1}$ et $\frac{\sin a_3}{\sin a_1}$. En général, on ne pourra ainsi accorder qu'un nombre de rayons égal à celui des prismes, quoiqu'il puisse accidentellement arriver que d'autres rayons satisfassent aussi à ces mêmes équations, et s'accordent par conséquent avec les premiers.

La méthode précédente ne fait connaître les angles réfringens des prismes qu'en les supposant fort petits ; dans le cas où ces angles seraient trop grands pour que cette supposition fût admissible, il faudra regarder les rapports ainsi déterminés comme une première approximation, que l'on pourra corriger par un second calcul que nous allons exposer.

Pour fixer les idées, supposons que l'achromatisme doive être établi entre deux prismes seulement ; dans ce cas, l'équation de condition rigoureuse à laquelle il faudra satisfaire sera

$$\text{(A)} \quad 0 = \delta n_1 \sin a_1 \sin \phi_4 \sin \phi_6 + \delta n_2 \sin a_2 \sin \phi_1 \sin \phi_3.$$

Dans l'hypothèse des petits arcs, on a simplement

$$0 = \delta n_1 \sin a_1 + \delta n_2 \sin a_2, \quad \text{d'où} \quad \sin a_2 = -\frac{\delta n_1}{\delta n_2} \sin a_1,$$

comme nous l'avons trouvé plus haut. Supposons qu'on se soit donné arbitrairement a_1, alors la valeur de $\sin a_2$ et par conséquent de celle de a_2 se trouvera déterminée ; mais si a_1 n'est pas très-petit, la valeur de a_2, ainsi calculée, ne sera pas tout-à-fait celle qui convient à l'équation (A). Pour obtenir cette dernière, on calculera la marche du faisceau lumineux à travers les deux prismes a_1 et a_2, tels qu'ils viennent d'être déterminés, en les plaçant l'un par rapport à l'autre, comme ils doivent l'être dans l'assemblage que l'on en veut former. Dans ce calcul, il suffit d'employer le rapport de réfraction qui convient aux rayons moyens ; on obtiendra donc ainsi les valeurs de $\phi_1\ \phi_2\ \phi_3\ \phi_4 \ldots$ Nous ne parlons pas de la première incidence ϕ qui doit être donnée. Ces valeurs ne seront pas tout-à-fait rigoureuses, puisque la valeur employée pour l'angle a_2 n'est pas tout-à-fait celle qui convient à l'achromatisme ; mais du moins elles sont plus rapprochées de la vérité que si l'on

regardait les angles $\varphi\,\phi_1\,\varphi_2\ldots$ comme des angles droits, et qu'on supposât leurs sinus égaux à l'unité. On peut donc, avec avantage, substituer ces valeurs dans l'équation (A); alors tout y sera connu, excepté le rapport $\frac{\sin a_2}{\sin a_1}$, et par conséquent on en pourra tirer une nouvelle valeur de ce rapport, qui sera plus exacte que la première, parce que l'on y aura eu égard aux incidences et aux émergences des rayons; ensuite en remettant pour a_1 sa valeur première, on aura a_2.

Si cette nouvelle valeur de a_2 diffère très-peu de la précédente; par exemple, si la différence est tellement petite que l'on ne puisse pas en tenir compte dans la construction des prismes, on devra s'arrêter là. Mais si l'on craint que la différence ne soit de quelque importance, il n'y aura qu'à recommencer de nouveau le calcul des angles $\phi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4\ldots$ avec cette nouvelle valeur de a_2, et cette fois ils seront beaucoup plus exacts que la première. On substituera donc dans l'équation (A) leurs sinus calculés d'après ces valeurs, et l'on en tirera une nouvelle expression du rapport $\frac{\sin a_2}{\sin a_1}$, lequel, cette fois, donnera $\sin a_2$ et a_2, avec toute la précision que l'on pourra désirer dans les expériences les plus délicates.

Cette méthode est générale, quel que soit le nombre des angles réfringens $a_1\,a_2\ldots$; mais lorsqu'il n'y a que deux prismes, on peut l'abréger et arriver directement à la valeur exacte de a_2. Pour cela il suffit de remarquer que, pour satisfaire à l'équation (A) lorsqu'on s'est donné à volonté a_1, il suffit de faire varier convenablement a_2, c'est-à-dire l'angle réfringent du second prisme. Or, cela peut se faire sans changer aucunement les valeurs des angles $\varphi\,\varphi_1\,\varphi_2\,\phi_3\,\varphi_4\,\phi_5$, qui dépendent uniquement du passage du rayon lumineux à travers le premier prisme, et de son incidence sur la première face du second. Il faut seulement convenir de ne point changer le prisme d'air qui les sépare; alors le changement de a_2 n'influera que sur l'angle φ_6; or, on a généralement

$$\varphi_6 = \phi_5 + a_2;$$

et substituant cette valeur dans l'équation (A), elle devient

$$0 = \delta n_1 \sin a_1 \sin \varphi_4 \sin(\varphi_5 + a_2) + \sin_2 \sin a_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3.$$

En développant $\sin(\varphi_5 + a_2)$, et divisant par $\cos a_2$, on trouve

$$\text{tang}\, a_2 = -\frac{\delta n_1 \sin a_1 \sin \varphi_4 \sin \varphi_5}{\delta n_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 + \delta n_1 \sin a_1 \sin \varphi_4 \cos \varphi_5};$$

expression qui donnera tout de suite la valeur exacte de a_2. On pourrait encore employer cette méthode dans le cas de plusieurs prismes, si, pour établir l'achromatisme, on se contentait de faire varier l'angle réfringent du dernier, en se donnant à volonté les angles réfringens des autres, ainsi que leurs positions entre eux et par rapport à la surface antérieure du dernier; car dans ce cas, comme dans le précédent, tous les angles $\varphi\, \varphi_1 \ldots$ jusqu'à φ_{4v-3} seraient constans; de sorte que l'avant-dernier ou φ_{4v-2} serait le seul sur lequel influerait le changement de l'angle réfringent a. Or, on aurait encore ici

$$\varphi_{4v-2} = a_v + \varphi_{4v-3}.$$

Substituant cette valeur de φ_{4v-2} dans l'équation de l'achromatisme, on en tirerait tang a_v, précisément comme nous venons d'obtenir tang a_2.

Tous ces calculs supposent que l'on connaît les valeurs de $\delta n_1\, \delta n_2\, \delta n_3 \ldots$ relativement aux différens rayons homogènes dont on veut déterminer le parallélisme. On peut y parvenir en observant les déviations des différentes couleurs du spectre, dans les prismes dont on veut se servir; mais nous avons déjà remarqué que cette méthode ne pouvait pas donner les valeurs de $\delta n_1\, \delta n_2 \ldots$ avec beaucoup de précision. Car les limites des couleurs n'étant pas rigoureusement tranchées, il est presque impossible de fixer exactement la même teinte et la même nuance de chaque teinte dans toutes les observations successives que l'on fait avec les diverses substances; et des différences insensibles dans ce genre d'observation, deviennent extrêmement fortes et insupportables quand elles se manifestent dans le mélange des couleurs, surtout lorsqu'on se propose d'appliquer ces déterminations à la construction des lunettes achromatiques, où la moindre erreur est énormément agrandie par le

grossissement. Mais on peut déterminer δn_1 $\delta n_2 \ldots$ d'une manière infiniment plus exacte, en se servant pour cela des équations mêmes de l'achromatisme. Car supposez, par exemple, que l'on pût tailler et disposer deux prismes ou davantage, de manière à en former directement un assemblage achromatique, on pourrait regarder ce système de prismes comme satisfaisant aux équations de condition établies plus haut. Donc, en mesurant leurs angles réfringens, ainsi que les incidences et les émergences des faisceaux lumineux sur leurs surfaces, on pourrait substituer ces valeurs dans nos équations au lieu de $a_1\, a_2 \ldots \varphi\, \varphi_1\, \varphi_2 \ldots$ Alors tout y serait connu, excepté δn_1 δn_2 $\delta n_3 \ldots$, et par conséquent on pourrait se servir des équations elles-mêmes pour conclure ces quantités. Telle est la marche que nous avons suivie, M. Cauchoix et moi, en nous servant pour cela d'un appareil extrêmement simple, qui donne toutes les combinaisons achromatiques possibles, avec la plus grande perfection. Cet appareil est représenté dans la figure 169.

A l'extrémité d'une bonne lunette achromatique et parallèlement à son axe, on fixe deux tiges métalliques T T opposées diamétralement ; elles sont percées transversalement de deux trous A, dans lesquels passent les axes de deux châssis de cuivre C C, qui peuvent ainsi tourner librement autour des lignes droites A A, perpendiculairement à l'axe de la lunette. Sur ces châssis on attache les prismes dont on veut établir la compensation, et alors l'appareil est tel que le représente la figure. Pour que l'expérience réussisse complètement, il faut que les angles des prismes soient tels, qu'en les opposant l'un à l'autre, ils soient près déjà de former un système achromatique. Pour cela, on commence d'abord par observer directement, à travers ces prismes, les réfractions des rayons rouges et des rayons violets (1). On substitue ces réfractions dans la formule de l'achromatisme, en n'y supposant que deux prismes, et l'on en déduit,

(1) On pourrait employer pour cela la méthode de Newton, exposée page 424.

comme dans la page 493, une première valeur rapprochée pour le rapport des sinus des angles réfringens. Les deux prismes *pp* sont donc construits d'après cette première détermination; et si l'on a bien opéré, ils ne doivent pas être extrêmement différens de leur valeur véritable : c'est celle-ci qu'il faut trouver et obtenir avec la dernière exactitude. Pour cela, on doit se rappeler que l'équation de l'achromatisme ne renferme pas seulement les angles réfringens des prismes et les rapports de réfraction, elle contient aussi les angles d'incidence et d'émergence du rayon sur les diverses surfaces réfringentes; en effet, suivant que chacun des prismes est différemment incliné sur la direction des rayons lumineux, la déviation qu'il leur fait subir est différente, ainsi que la dispersion qui en résulte. Supposons donc que l'on ait disposé la lunette et les deux prismes de manière que l'on puisse voir à travers ce système un objet blanc très-éloigné : si l'image de cet objet se trouve pareillement blanche, les prismes sont bien placés, et cette position est réellement celle qui donne l'achromatisme; mais on sent qu'il est très-peu probable que l'on y parvienne ainsi du premier coup. Il arrivera en général qu'après avoir opposé les angles réfringens des deux prismes, l'image de l'objet paraîtra encore très-sensiblement colorée : alors on tournera lentement un des prismes, dans le sens que l'on verra être propre à diminuer les couleurs. Si l'un des prismes ne suffit pas, on les fera ainsi varier tous les deux, et l'on trouvera enfin la position dans laquelle la compensation est la plus parfaite; on fixera les prismes dans cette position, et il ne restera plus qu'à mesurer les angles qu'ils font entre eux, et avec les rayons qui les traversent. Pour faire toutes ces opérations d'une manière commode et exacte, nous employons la lunette d'un cercle répétiteur, dont le limbe est rendu vertical, comme le représente la figure 171, et nous disposons les châssis qui portent les prismes, ainsi que les prismes eux-mêmes, de manière que les angles réfringens restent toujours parallèles à ce limbe dans toutes les positions possibles des châssis et de la lunette sur l'horizon. Cela exige

d'abord que les axes des châssis soient disposés perpendiculairement au plan du limbe. A cet effet, les tiges T T, qui les portent, sont fixées à un tambour circulaire qui embrasse le tuyau de la lunette. Ayant donné à celle-ci une direction quelconque, on place sur un des châssis une glace à faces parallèles, et on essaye de la rendre horizontale par le seul mouvement du châssis. Il est clair qu'on ne peut y parvenir généralement, à moins que l'axe du châssis ne soit horizontal lui-même, et par conséquent perpendiculaire au plan du limbe. Cette condition offre donc un moyen de le régler, et elle est susceptible de beaucoup d'exactitude, si, comme nous le faisions, l'on constate l'horizontalité de la glace à l'aide d'un niveau très-sensible. Cette opération une fois faite, et bien vérifiée dans plusieurs positions de la lunette, on fixe le tambour; puis on place sur les châssis les prismes que l'on veut compenser, en les disposant de manière que leurs angles réfringens soient à-peu-près parallèles au plan du limbe, et l'on entreprend de nouveau de rendre leurs surfaces supérieures horizontales par le seul mouvement des châssis. Il est clair que cela n'est plus possible, à moins que les angles réfringens ne soient exactement parallèles au plan du limbe. On tourne donc peu à peu les prismes sur leurs châssis par des vis de rappel, jusqu'à ce que cette condition soit exactement satisfaite; alors ils se trouvent convenablement disposés. Néanmoins, pour plus de certitude, il est bon que la lunette soit munie intérieurement d'un micromètre, que l'on règle de manière qu'un de ses fils coïncide avec l'arête verticale de quelque tour éloignée. Alors, quand les prismes sont placés devant la lunette, et réglés par le niveau, si l'on regarde de nouveau l'arête de la tour réfractée par leur système, elle doit coïncider encore avec le fil vertical; ce qui donne un moyen simple de vérification. L'objet qui nous sert de mire pour déterminer l'achromatisme, est une bande de beau papier blanc collée sur un carton noir; sa largeur est d'environ un décimètre, sa longueur d'un mètre. Nous plaçons le carton verticalement à une distance de cent mètres environ, de manière que la longueur de la bande blan-

che soit horizontale. Une plus grande distance ne permettrait pas de juger aussi bien de l'achromatisme, parce qu'elle affaiblirait trop les teintes. Il faut aussi que le carton soit fixe, immobile, et que l'endroit où on le place soit bien éclairé. Les dispositions que nous venons de décrire facilitent extrêmement le mouvement de la lunette et des deux prismes qui conduit à l'achromatisme. Car lorsqu'on tient l'image de la mire dans la lunette, elle ne peut plus se déplacer que verticalement; ainsi, tandis qu'on fait tourner lentement d'une main un des prismes pour détruire les couleurs, ce qui déplace nécessairement l'image, on peut, de l'autre main, en faisant tourner la lunette, l'y ramener avec beaucoup de facilité. Si les angles réfringens des deux prismes sont trop disproportionnés pour que les couleurs puissent être corrigées par le seul changement d'incidence, on s'en apercevra bien facilement; car supposant, par exemple, que le second prisme soit trop fort, et que le sommet de son angle réfringent soit dirigé vers la terre, alors ce prisme, s'il agissait seul sur la lumière, donnerait une image colorée de la mire dans laquelle les rayons rouges, comme les moins réfrangibles, seraient les plus hauts; et les rayons violets, comme étant les plus réfrangibles, se trouveraient les plus bas. Maintenant si l'image de la mire, vue à travers les deux prismes opposés, présente constamment cette disposition de couleurs dans toutes les situations que l'on peut leur donner, c'est une preuve certaine que la dispersion du premier prisme, qui agit en sens contraire de la dispersion produite par l'autre, n'est jamais assez forte pour l'égaler, encore moins pour la surpasser; par conséquent, la diminution des couleurs que l'on pourra produire avec ces deux prismes, sera très-loin d'être la meilleure que l'on puisse obtenir. Dans ce cas, il faudra affaiblir un peu l'angle réfringent du second prisme qui est reconnu trop fort; après quoi on le replacera sur l'appareil. Si on l'a ainsi diminué suffisamment, on trouvera qu'en faisant mouvoir les deux prismes tour à tour, on obtient des images de la mire dans lesquelles les franges rouges sont tournées vers le haut, et d'autres images dans lesquelles,

au contraire, ces mêmes franges sont tournées vers le bas. Dans les premières, le prisme postérieur domine; dans les dernières, c'est le prisme antérieur. Entre ces états opposés, on trouve une ou plusieurs situations dans lesquelles les franges qui bordent l'image sont les moindres possibles. Ces combinaisons donnent les compensations les plus favorables. On s'arrête à celle qui paraît la meilleure, c'est-à-dire dans laquelle les franges colorées sont les plus courtes, et surtout les plus sombres; alors on y fixe les prismes et la lunette elle-même par leurs vis de pression. Il faut éviter avec le plus grand soin les franges jaunes ou rouges; car ces deux couleurs étant plus éclatantes que toutes les autres, leur effet se fait bien plus fortement sentir quand on transporte ces résultats dans la construction des lunettes, ce qui est leur principal objet. Par une raison contraire, il faut s'arrêter de préférence aux positions des prismes qui donnent des franges de couleurs obscures et foncées, par exemple, d'un rouge de brique ou d'un bleu verdâtre; car l'effet de ces couleurs étant moins vif, on les apercevra plus difficilement dans les lunettes, et elles seront tout-à-fait insensibles dans les observations faites de nuit. De plus, il est utile que la lunette dont on se sert pour déterminer l'achromatisme des prismes grossisse 50 ou 60 fois les diamètres des objets, afin que les franges colorées qui bordent l'image réfractée en deviennent plus sensibles, et soient plus faciles à apercevoir.

Pour calculer les valeurs de δn_1, $\delta n_2 \ldots$ d'après cette expérience, il faut connaître les angles $\varphi\, \varphi_1\, \varphi_2 \ldots$ que les rayons compensés forment avec les surfaces réfringentes. Voici comment on y parvient : on commence par fixer le grand niveau du cercle dans une position horizontale, afin qu'il réponde de l'immobilité du limbe. Puis, lorsque la lunette est bien dirigée sur la mire à travers les prismes, on lit sur le limbe du cercle la division à laquelle elle s'est arrêtée. Cela fait, on détache la lunette sans toucher aux prismes, et on la fait tourner jusqu'à ce que la surface antérieure du premier prisme devienne horizontale; ce dont on s'assure en y posant un niveau Ensuite on lit de nouveau la division à laquelle la lunette s'est

arrêtée ; cette lecture, comparée à la précédente, fait connaître l'angle parcouru par la lunette sur le limbe, et cet angle est précisément celui que la première face du prisme fait avec l'horizon dans la position où l'on a observé l'achromatisme : je donnerai tout-à-l'heure la démonstration de ce résultat. On connaît aussi par des mesures précédentes, la distance de la mire au zénith ; de là, par le calcul, on conclut l'angle que les rayons lumineux forment avec la première surface réfringente. Alors, comme l'angle du premier prisme est connu, ainsi que le rapport moyen de réfraction qui convient à sa substance, on peut suivre par le calcul la marche des rayons qui le traversent, et l'on détermine ainsi les angles $\phi\, \phi_1\, \phi_2\, \phi_3$ qu'ils forment successivement avec les diverses surfaces réfringentes. Il ne reste plus qu'à connaître l'inclinaison des faces par lesquelles les prismes se regardent, ou la valeur du prisme d'air compris entre eux. Pour cela on opère comme tout-à-l'heure, on fait mouvoir la lunette sur le limbe jusqu'à ce que la première surface du second prisme devienne horizontale à son tour ; et cette position étant connue, l'angle compris entre les deux surfaces est déterminé. On peut donc alors continuer par le calcul la marche des rayons dans le second prisme, et trouver les valeurs des angles $\phi_4\, \phi_5\, \phi_6\, \phi_7 \ldots$ Cela fait, tout est connu dans l'équation de l'achromatisme, excepté les quantités δn_1 et δn_2. On peut donc déterminer le rapport de ces deux dernières par l'équation même. Je vais maintenant démontrer comment les incidences des rayons et les inclinaisons des prismes peuvent se conclure de ces observations.

Soit OCL, fig. 172, la direction de la lunette dans la position où l'on a observé l'achromatisme; et supposons que SIA désigne la situation dans laquelle la première face du prisme antérieur se trouve alors placée et fixée. Par le point I, où l'axe de la lunette rencontre cette face, menons l'horizontale IH dirigée dans le plan vertical du limbe : l'angle AIH sera la dépression de la première surface réfringente au-dessous de l'horizon; c'est cet angle qu'il faut déterminer.

Or, si l'on fait tourner ensemble la lunette CL et le prisme

qu'elle porte jusqu'à ce que la face SIA devienne horizontale en S'I'A', je dis que l'angle L'CL parcouru par la lunette sur le limbe, sera égal à l'angle cherché HIA. En effet, par le point C menez l'horizontale CH' parallèle à IH; l'angle HIL sera égal à H'CI. De plus, le prisme étant fixé à la lunette, l'angle LIA sera égal à l'angle L'I'A', ou à son égal I'CH'; ainsi l'angle total I'CI sera égal à l'angle total HIA, ce qui est précisément la proposition que nous voulions démontrer.

Par exemple, en compensant un prisme de flint avec un prisme de crown dans une de nos expériences, les verniers de la lunette de notre cercle ont marqué successivement

surface du flint horizontale............	437° 48′ 9″,9
dans la position de l'achromatisme.......	357 56 36,6
différence ou HIA.................	79 51 33,3

c'est la dépression de la première face du prisme de flint, ou l'angle qu'elle forme avec l'horizon. Pour ne jamais se tromper dans ce calcul, il faut, comme nous l'avons fait ici, compter toujours les arcs sur le limbe dans un même sens, même lorsque les divisions qui les terminent dépassent 360°.

La même opération répétée sur la première surface du second prisme donnera de même sa dépression au-dessous de l'horizon. Nous nommerons D_1 celle du prisme antérieur, D_2 celle du prisme postérieur.

Avec ces données, on peut aisément conclure l'angle b_1 compris entre les deux prismes; car en désignant ceux-ci par SA'B', SA''B'', comme le représente la fig. 171, S étant leur arête commune; si par le point S on mène l'horizontale SH, on connaîtra déjà l'angle HSA', qui est égal à D_1 ou à la dépression de la première surface du prisme antérieur. En lui ajoutant l'angle réfringent A'SB' que nous avons toujours nommé a_1, on aura l'angle total HSB' dont la valeur sera $D_1 + a_1$, et le retranchant de HSA'' qui est égal à D_2, c'est-à-dire à la dépression de la première surface du second prisme, la différence sera précisément l'angle B'SA'' compris

entre les deux prismes, lequel est représenté par b_1 dans nos formules; on aura ainsi

$$b_1 = D_2 - D_1 - a_1.$$

Nous avons supposé dans la fig. 171 que l'angle réfringent du premier prisme était tourné vers le zénith. On peut toujours le disposer dans ce sens. Lorsque la valeur de b_1 ainsi calculée se trouvera positive, ce sera une preuve que le prisme d'air est dirigé comme la figure le représente, c'est-à-dire que son angle refringent est tourné dans le même sens que celui du prisme antérieur. Si, au contraire, b_1 se trouve négatif, cela signifiera que l'angle du prisme d'air est tourné en sens opposé, comme le représente la fig. 172. Mais s'il est bon de comprendre les significations de ces signes, il est inutile d'avoir recours aux figures pour en faire usage. Il ne faut qu'employer l'angle b_1 avec son signe, et l'introduire ainsi dans nos formules; le calcul seul fera le reste.

Maintenant il ne reste plus qu'à faire voir comment on peut trouver l'angle MIA′ ou ϕ formé par le rayon incident MI avec la première surface du prisme antérieur. A cet effet, par le point d'incidence I, menons la ligne horizontale IH parallèle à SH, l'angle HIM sera la dépression de la mire au-dessous de l'horizon, dépression que nous nommerons M. L'angle cherché MIA′ égal à HIA′ — HIM, c'est-à-dire

$$\phi = D_1 - M.$$

Nous avons supposé que la mire était au-dessous de l'horizon de l'observateur. Si elle était au-dessus, on rendrait M négatif dans l'expression de ϕ; il n'y aurait pas d'autre changement à y faire.

Pour réunir tous ces résultats, nous nommerons L la division marquée par le vernier de la lunette dans la position où l'on a observé l'achromatisme, et nous appellerons L_1 L_2 les divisions marquées par ce même vernier lorsque les premières faces du prisme antérieur et du prisme postérieur deviennent successivement horizontales. Nous aurons ainsi

$$D_1 = L_1 - L; \quad D_2 = L_2 - L; \quad b_1 = D_2 - D_1 - a_1; \quad \phi = D_1 - M;$$

φ et b_1 étant ainsi connus, on aura tous les autres angles $\phi_1\ \varphi_2\ \phi_3\ \phi_4\ \varphi_5\ \varphi_6$ par les formules

$$\cos\varphi = n_1 \cos\phi_1$$
$$\varphi_2 = a_1 + \varphi_1$$
$$\cos\varphi_3 = n_1 \cos\varphi_2$$
$$\varphi_4 = b_1 + \phi_4$$
$$\cos\varphi_4 = n_2 \cos\varphi_5$$
$$\varphi_6 = a_2 + \varphi_5,$$

dans lesquelles a_2 sera toujours de signe contraire à a_1, lorsque l'achromatisme sera effectué. On calculera les angles successifs par les tables de logarithmes; après quoi il ne restera plus qu'à les substituer dans la formule de l'achromatisme

$$\frac{\delta n_1}{\delta n_2} = -\frac{\sin a_2 \sin\phi_1 \sin\varphi_3}{\sin a_1 \sin\phi_4 \sin\phi_6},$$

et elle donnera le rapport de compensation

$$\frac{\delta n_1}{\delta n_2}, \quad \text{ou} \quad \frac{\delta n_2}{\delta n_1}.$$

Voici un exemple numérique de ces calculs appliqué à la compensation d'un prisme de crown français avec un prisme de flintglass également français et de la fabrique de M. Dartigues; voici d'abord les données fondamentales du calcul :

	Flint antérieur.	Crown postérieur.
Rapport de réfract...	$n_1 = 1,57189$	$n_2 = 1,50308$
Logar. de ce rapport..	$\log n_1 = 0,1964154$	$\log n_2 = 0,1769821$
Angle réfringent.....	$a_1 = 14^\circ\ 57'\ 30''$	$a_2 = -24^\circ\ 30'\ 0''$
Indication du vernier dans la position de l'achromatisme.....	$L = 357^\circ\ 56'\ 37''$	$L = 357^\circ\ 56'\ 37''$
Indication du vernier quand la face antér. du prisme est horiz..	$L_1 = 437^\circ\ 48'\ 10''$	$L_2 = 460^\circ\ 26'\ 24''$
Dépression de la mire au-dessous de l'horiz.	$M = 6^\circ\ 57'\ 15''$	$M = 6^\circ\ 57'\ 15''$

Substituant ces données dans nos formules, elles donnent

$$D_1 = 79^\circ\ 51'\ 33'' \qquad D_2 = 102^\circ\ 29'\ 47''\ ;$$
$$b_1 = +\ 7^\circ\ 40'\ 44'' \qquad \varphi = 72^\circ\ 54'\ 18''.$$

Ensuite, achevant le calcul des angles par logarithmes, on trouve

$$\begin{array}{lll}
l \cos \varphi = \bar{1},4682837 & l \cos \varphi_2 = \bar{2},8626683 - & l \cos \varphi_4 = \bar{1},3914378 - \\
l\, n_1 = 0,1964154 & l\, n_1 = 0,1964154 & l\, n_2 = 0,1769821 \\
\hline
l \cos \varphi_1 = \bar{1},2718683 & l \cos \varphi_3 = \bar{1},0590837 - & l \cos \varphi_5 = \bar{1},2144557 - \\
\\
\varphi_1 = 79^\circ\ 13'\ 18'' & \varphi_3 = 96^\circ\ 34'\ 44'' & \varphi_5 = 99^\circ\ 25'\ 50'' \\
a_1 = 14^\circ\ 57'\ 30'' & b_1 = +\ 7^\circ\ 40'\ 44'' & a_2 = -\ 24^\circ\ 30'\ 0'' \\
\hline
\varphi_2 = 94^\circ\ 10'\ 48'' & \varphi_4 = 104^\circ\ 15'\ 28'' & \varphi_6 = 74^\circ\ 55'\ 50''
\end{array}$$

Ces valeurs étant trouvées, on en tire

$$\begin{array}{ll}
\log \sin a_2 = \bar{1},6177270 - & \log \sin a_1 = \bar{1},4118158 \\
\log \sin \varphi_1 = \bar{1},9922714 & \log \sin \varphi_4 = \bar{1},9864123 \\
\log \sin \varphi_3 = \bar{1},9971307 & \log \sin \varphi_6 = \bar{1},9848024 \\
\hline
\qquad \bar{1},6071291 - & \qquad \bar{1},3830305 \\
\qquad \bar{1},3830305 & \\
\hline
\log \left(\dfrac{\delta n_1}{\delta n_2}\right) = 0,2240986 & \dfrac{\delta n_1}{\delta n_2} = 1,67532.
\end{array}$$

Le rapport de compensation de ces deux prismes est donc 1,67532. On aurait opéré de la même manière, si b_1 se fût trouvé négatif au lieu d'être positif; seulement sa valeur serait devenue soustractive. En général, en se servant de ces formules, il n'y a aucun besoin des constructions géométriques pour diriger le calcul; le seul jeu des signes algébriques suffit.

Lorsqu'on emploie le procédé que nous venons de décrire, on trouve toujours plusieurs positions des deux prismes dans lesquelles ils se compensent également bien. Pour en sentir la raison, il faut se rappeler que lorsqu'un seul prisme réfracte un rayon lumineux, la déviation est susceptible d'un minimum, pour lequel l'image réfractée devient stationnaire; après

quoi elle augmente précisément comme elle avait diminué ; de sorte qu'à égale distance, avant et après ce minimum, il existe des positions où le prisme réfringent agit sur le rayon d'une manière égale. Or, lorsqu'un rayon lumineux passe à travers deux prismes, ces positions équivalentes subsistent encore, et produisent une infinité d'arrangemens dans lesquels la compensation est sensiblement la même. Lorsqu'on a trouvé l'un de ces arrangemens, et que l'on a déterminé tous les élémens qui y répondent, on peut déranger les prismes, et chercher à reproduire l'achromatisme. On tombera ainsi le plus souvent sur quelque position très-différente de la première, sans pouvoir en aucune manière prévoir si le résultat s'accordera ou non avec celui que l'on a d'abord obtenu. Cet accord, s'il a lieu, donnera donc une très-grande probabilité à la compensation ainsi déterminée. Or, à moins de s'en être assuré par l'expérience, on peut difficilement imaginer à quel point ces déterminations si différentes dans leurs élémens peuvent s'accorder dans leurs conséquences, lorsqu'elles sont obtenues par ce procédé où l'œil et la main conspirent à la fois, et concourent ensemble à trouver, à choisir parmi toutes les positions successives des prismes, celle dans laquelle l'achromatisme est le plus parfait. Je rapporterai ici quelques exemples de ces déterminations.

Compensation de l'huile essentielle de citron avec le crownglass de la fabrique de Saint-Louis.

Rapport de réfraction moyen pour le crownglass.	$n_1 = 1,5117$
pour l'huile essentielle de citron......	$n_2 = 1,4729$
Angle réfringent du prisme de crown........	19° 54′ 30″
Angle réfringent du prisme de liquide......	— 14° 46′ 13″

Incidences et émergences des rayons moyens sur les surfaces réfringentes, dans la position de l'achromatisme.

Première expérience.	Seconde expérience.
$\phi = 74° 28' 0''$	$\phi = 52° 33' 45''$
$\phi_1 = 79\ 47\ 45$	$\phi_1 = 66\ 17\ 20$
$\phi_2 = 99\ 42\ 15$	$\phi_2 = 86\ 11\ 50$
$\phi_3 = 104\ 45\ 45$	$\phi_3 = 84\ 14\ 45$
$b_1 = 10\ 33\ 20$	$b_1 = 35\ 37\ 34$
$\phi_4 = 115\ 9\ 5$	$\phi_4 = 119\ 52\ 19$
$\phi_5 = 106\ 52\ 41$	$\phi_5 = 109\ 45\ 50$
$\phi_6 = 92\ 6\ 18$	$\phi_6 = 94\ 59\ 37$

Les valeurs des incidences et des émergences des rayons sont bien différentes dans ces deux expériences; les angles d'air compris entre les deux prismes diffèrent aussi beaucoup. Néanmoins, en substituant ces deux systèmes dans l'équation de l'achromatisme, ils donnent pour $\frac{\delta n_2}{\delta n_1}$ absolument les mêmes valeurs. En effet, on trouve

par la première expér. $\frac{\delta n_2}{\delta n_1} = -\frac{\sin a_1 \sin \phi_4 \sin \phi_6}{\sin a_2 \sin \phi_1 \sin \phi_3} = 1,26678$

par la seconde...... $\frac{\delta n_2}{\delta n_1} = -\frac{\sin a_1 \sin \phi_4 \sin \phi_6}{\sin a_2 \sin \phi_1 \sin \phi_3} = 1,26658$

La moyenne de ces évaluations est............ $= 1,26668$

C'est la valeur de $\frac{\delta n_2}{\delta n_1}$ pour l'huile essentielle de citron comparée au crownglass Saint-Louis. On voit qu'elle disperse plus que lui, quoiqu'elle réfracte moins.

Voici un autre exemple encore plus frappant :

Compensation d'un Crownglass français avec un Flintglass de la fabrique française de Dartigues.

Rapport de réfraction pour le flint,

$n_1 = 1,570,146$ Angle réfringent $a_1 = 15° 0' 0''$.

Rapport de réfraction pour le crown,

$n_2 = 1,5043340$ Angle réfringent $a_2 = -24° 31' 0''$.

	1re compens.	2e compensat.	3e compensat.
φ	98° 1′ 25″	94° 16′ 55″	70° 39′ 40″
φ_1	95 5 54	92 43 28	77 51 26
φ_2	110 5 54	107 43 28	92 51 26
φ_3	122 40 0	118 34 1	94 29 26
b_1	+4 39 40	+5 14 40	+14 55 31
φ_4	127 19 40	123 48 41	109 24 57
φ_5	113 46 11	111 42 34	102 45 58
φ_6	89 15 11	87 11 34	98 14 58
$\dfrac{\delta n_1}{\delta n_2} = -\dfrac{\sin a_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3}{\sin a_1 \sin \varphi_4 \sin \varphi_6} =$	1,690748	1,69483	1,692234
Moyenne des trois expériences......			1,692604

Dans ces expériences, les valeurs des incidences et des émergences des rayons qui donnent les compensations des mêmes prismes ont été très-diverses. Néanmoins elles conduisent précisément aux mêmes rapports de dispersion; cela devait être ainsi d'après nos formules. Mais ces formules supposent que pour chaque rayon homogène et pour un même prisme, le sinus de réfraction est au sinus d'incidence en raison donnée, quelle que soit l'inclinaison. Si cette proportion n'avait pas réellement lieu dans la nature, nos formules devraient s'écarter extrêmement de l'expérience; puisqu'au contraire elles s'accordent parfaitement avec elle, c'est une preuve que le rapport de réfraction est réellement constant pour chaque rayon homogène. Ceci s'accorde avec les expériences de Newton sur le spectre solaire; mais l'épreuve à laquelle nous soumettons ici les rayons est infiniment plus délicate, et c'est pourquoi dans la page 419, nous l'avons annoncée comme complément des résultats de Newton sur cet objet.

Quelques soins que l'on apporte à ces expériences, si l'on emploie une lunette qui grossisse cinquante ou soixante fois les

images, et si on se sert de prismes dont l'angle réfringent soit au moins de quinze degrés, comme nous l'avons toujours fait, on s'aperçoit bientôt que l'achromatisme rigoureux est tout-à-fait impossible, excepté dans le cas unique où les deux prismes sont composés d'une seule et même substance. Car lorsque les angles réfringens des prismes sont très-près de la proportion qui détermine le meilleur achromatisme, on peut successivement faire passer chaque couleur d'un côté à l'autre de l'image, sans trouver une position intermédiaire dans laquelle les franges colorées disparaissent entièrement. Cette impossibilité prouve de la manière la plus sensible que la dispersion des rayons lumineux ne se fait pas du tout suivant les mêmes lois dans les substances dont la nature chimique n'est pas la même, et elle montre que lorsqu'on a accordé ensemble deux quelconques des rayons homogènes, de manière qu'ils soient parallèles entre eux à leur sortie des prismes, les autres rayons du spectre se trouvent inclinés par rapport aux autres, et forment des franges sur les bords de l'objet. D'après cela, il est évident que pour obtenir des compensations plus parfaites, il faudrait employer plus de deux prismes. On en emploie jusqu'à trois dans certaines constructions de lunettes achromatiques ; un plus grand nombre affaiblirait trop la lumière par les réflexions successives que leurs surfaces lui feraient éprouver, et d'ailleurs lorsque l'achromatisme de ces instrumens est déterminé avec soin par le procédé que je viens d'exposer, leurs imperfections ne viennent plus de l'inégale réfrangibilité des rayons de lumière, mais d'une autre cause beaucoup plus influente, comme nous le dirons en son lieu.

Enfin la quantité absolue de la dispersion mesurée entre deux couleurs déterminées est aussi variable que la loi même suivant laquelle les divers rayons se suivent dans chaque spectre. C'est ce que notre procédé montre clairement par la diverse nature des franges colorées que l'on obtient quand on compense diverses substances les unes par les autres.

Lorsque l'on compare ainsi des substances dont les forces réfringentes sont très-inégales, on trouve en général que leurs

forces dispersives le sont aussi, et dans le même sens; les plus réfringentes étant les plus dispersives. Par exemple, l'oxide de plomb, introduit dans la composition du verre, augmente considérablement sa force dispersive; il augmente aussi sa force réfringente, quoique dans une proportion moindre. De toutes les substances que nous avons essayées, M. Cauchoix et moi, celle qui nous a paru avoir la plus grande force dispersive est le liquide connu en chimie sous le nom *de soufre carburé.* La dispersion qu'il produit est décuple de celle de l'eau dans des circonstances égales; aussi la force réfringente du soufre et celle du charbon solide sont elles l'une et l'autre très-considérables. Cependant cette correspondance entre les accroissemens de la réfraction et ceux de la dispersion est bien loin d'être générale, surtout lorsque les rapports de réfraction diffèrent peu. L'huile essentielle de citron et celle de térébenthine, l'acide muriatique, soit pur, soit saturé de muriate ammoniaco-mercuriel, dispersent plus que le crownglass, et cependant réfractent moins, comme nous nous en sommes assurés. Beaucoup d'autres substances présentent la même inversion; ainsi les rapports des forces dispersives des corps avec leur composition chimique paraissent encore bien plus difficiles à prévoir que ceux de leurs forces réfringentes.

C'est Jean Dollond, célèbre opticien anglais, qui a le premier constaté par l'expérience l'erreur de Newton sur la possibilité d'obtenir une compensation achromatique exacte, en conservant un excès de réfraction. Euler avait soupçonné cette possibilité, en considérant qu'elle était réalisée dans la construction de l'œil, qui, en effet, lorsqu'il est bien conformé, réunit au fond de la rétine tous les rayons qu'il réfracte, et y peint les objets avec leurs couleurs propres, comme on peut s'en assurer en dépouillant la partie postérieure d'un œil de ses enveloppes, et observant par derrière la rétine les images qui s'y forment. Mais cette remarque sur un organe aussi composé ne suffirait pas pour démêler les véritables principes de la compensation des dispersions; Euler proposa plusieurs lois hypothétiques qui auraient produit cet effet. Ce fut en éprou-

vant ces lois que Dollond fut conduit à répéter l'expérience de Newton sur la compensation par des prismes de différentes substances, et le hasard, ou une heureuse conjecture, l'ayant porté à en essayer de très-différentes, comme le crownglass et le flintglass, il reconnut que la réfraction produite par le crown restait prédominante, quand les angles des prismes étaient tels que la coloration fut sensiblement compensée. Cette découverte devint le principe des lunettes achromatiques, comme nous l'expliquerons ailleurs. Mais, quoiqu'on en ait fait un grand usage, on n'a pas mis beaucoup d'art à la perfectionner, car on s'est borné à suivre les rapports de compensation donnés par Dollond, même dans des cas où ils n'étaient plus applicables; et lorsqu'on a senti l'indispensable besoin de s'en écarter, à cause de la grande différence des substances, on y a suppléé par des tâtonnemens dispendieux et imparfaits. C'est ce qui nous a portés, M. Cauchoix et moi, à chercher pour cela un procédé exact, tel que celui que j'ai expliqué plus haut.

FIN DU TOME TROISIÈME.

TABLE

DES LIVRES ET DES CHAPITRES

CONTENUS DANS CE VOLUME.

LIVRE QUATRIÈME.

Du Magnétisme.

LIVRE CINQUIEME.

De la Lumière.

CATOPTRIQUE.

DIOPTRIQUE.

ANALYSE DE LA LUMIÈRE.

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

Page 5, ligne 8 *d'en bas*, *rayez* comme.

Idem. l. 12 : 45° 51′ 87″, *lisez* 44° 8′ 40″.

40, l. 10 *d'en bas :* un barreau, *lisez* un tel barreau.

43, l. 16 : elles, *lisez* elle.

74, l. 3 *et* 10 : dernière, *lisez* première.

Idem. l. 2 *d'en bas :* quelque, *lisez* quelle que.

98, l. 13 : proportionnels, *lisez* proportionnelles.

111, l. 12 : coupa, *lisez* coupe.

Idem. fig. 33, *lisez* fig. 32.

116, l. 13 : appliqué, *lisez* expliqué.

120, l. 8 *d'en bas :* suspendu, *lisez* appliqué.

128, l. 8 *d'en bas :* dont, *lisez* d'où.

129, l. 3 : M″N″E″, *lisez* M″N′E″.

147, l. 7 *d'en bas :* moins, long suivant, *lisez* moins long, suivant.

154, l. 5 *d'en bas :* cercle SC, *lisez* cercle, SC.

167, l. 9 *d'en bas :* d'indice, *lisez* d'incidence.

176, l. 6 : CR′, *lisez* C′ R.

217, l. 13 : I′ O′ S, *lisez* I′ O S.

218, l. 10 : ABC, *lisez* BAC.

231, l. 15 : l'autre. Suivons, *lisez* l'autre suivant.

232, l. 6 *en remontant :* plus ou autant, ou moins, *lisez* moins ou autant, ou plus.

240, l. 18 : les, *lisez* ces.

249, l. 6 *d'en bas :* X‴, *lisez* X″.

264, l. 18 : Y, *lisez* Y′.

267, l. 14 *d'en bas :* V cos θ 2, *lisez* V cos θ″.

279, l. 14 : réflexion : *lisez* réfraction.

353 (titres du tableau) :

extraord. θ' | ordin. θ_1', *lisez* extraord. θ_1' | ordin. θ'

355, l. 9 *d'en bas :* direction, *lisez* la direction.

385, l. 5 : fig. 123, *lisez* fig. 122.

386, l. 4 *et* 6 : S O S′, *lisez* s O s′.

392, l. 10 *d'en bas :* surfaces, *lisez* faces.

409, l. 14 : réfringens de, *lisez* réfringens, de...

414, *à la note*, *ajoutez :* Fig. 137.

470, l. 17 : sont, *lisez* font.

480, l. 8 : B″C′A″, lisez B″C A‴.

481, l. 16 : H, *lisez* Δ.

Page 485, l. 8 : teinte, *lisez* suite.

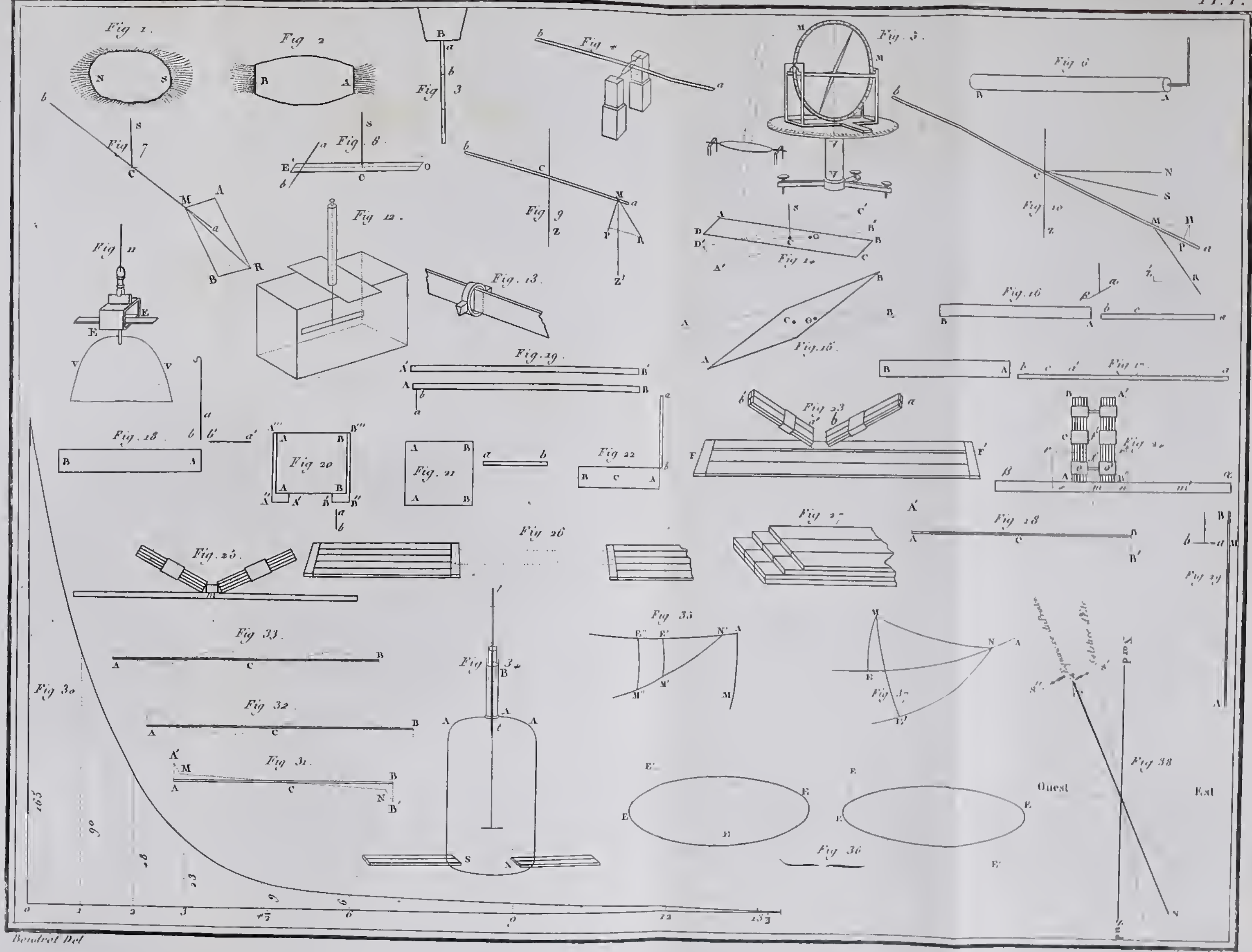
503, l. 9 *d'en bas :* 171, *lisez* 171 *bis.*

504, l. 12 : 172, *lisez* 172 *bis.*

Idem. l. 17 : MIA, *ajoutez* fig. 171.

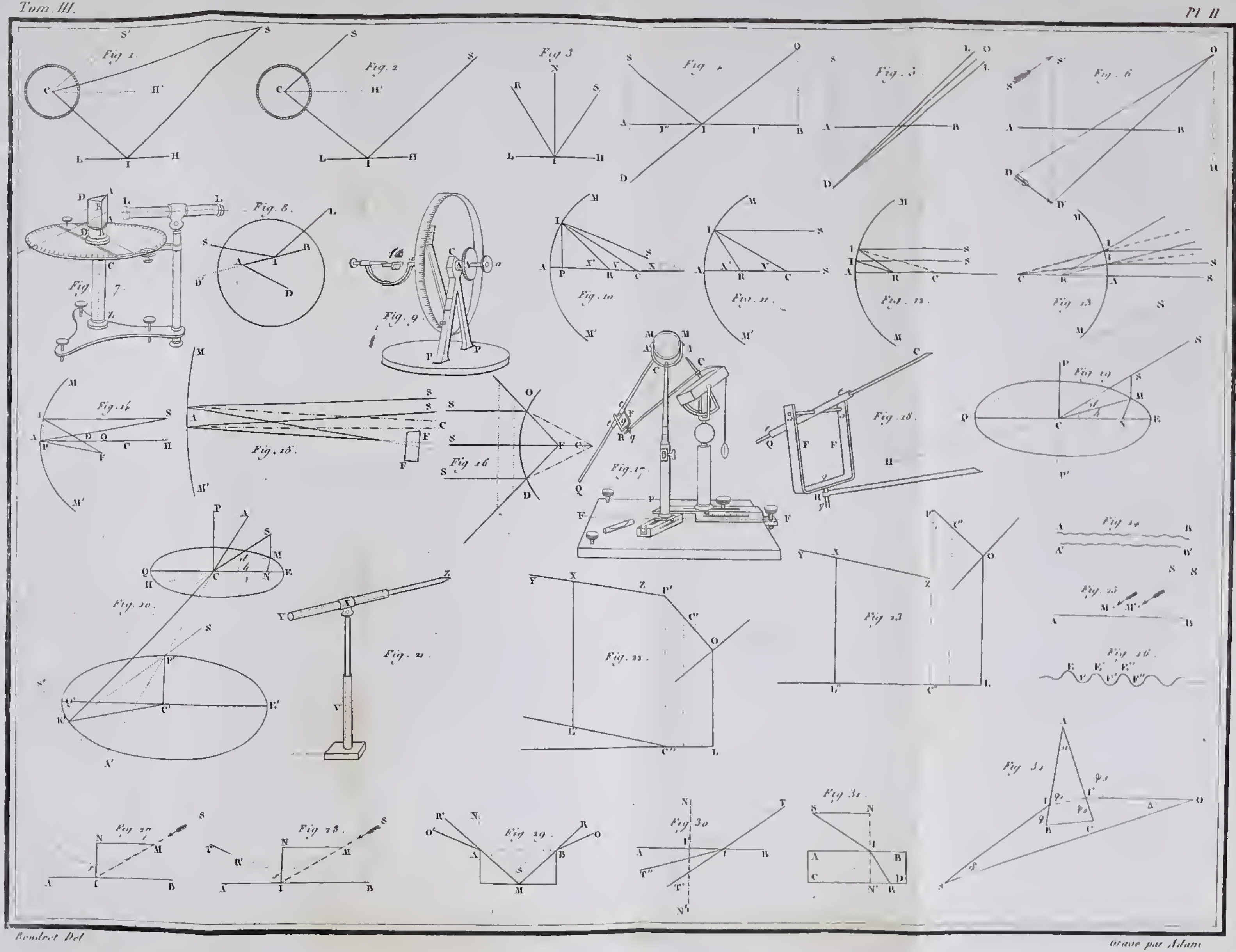
Idem. l. 21 : l'angle, *lisez* on aura donc l'angle.

505, *au tableau :* RLINT, *lisez* FLINT.



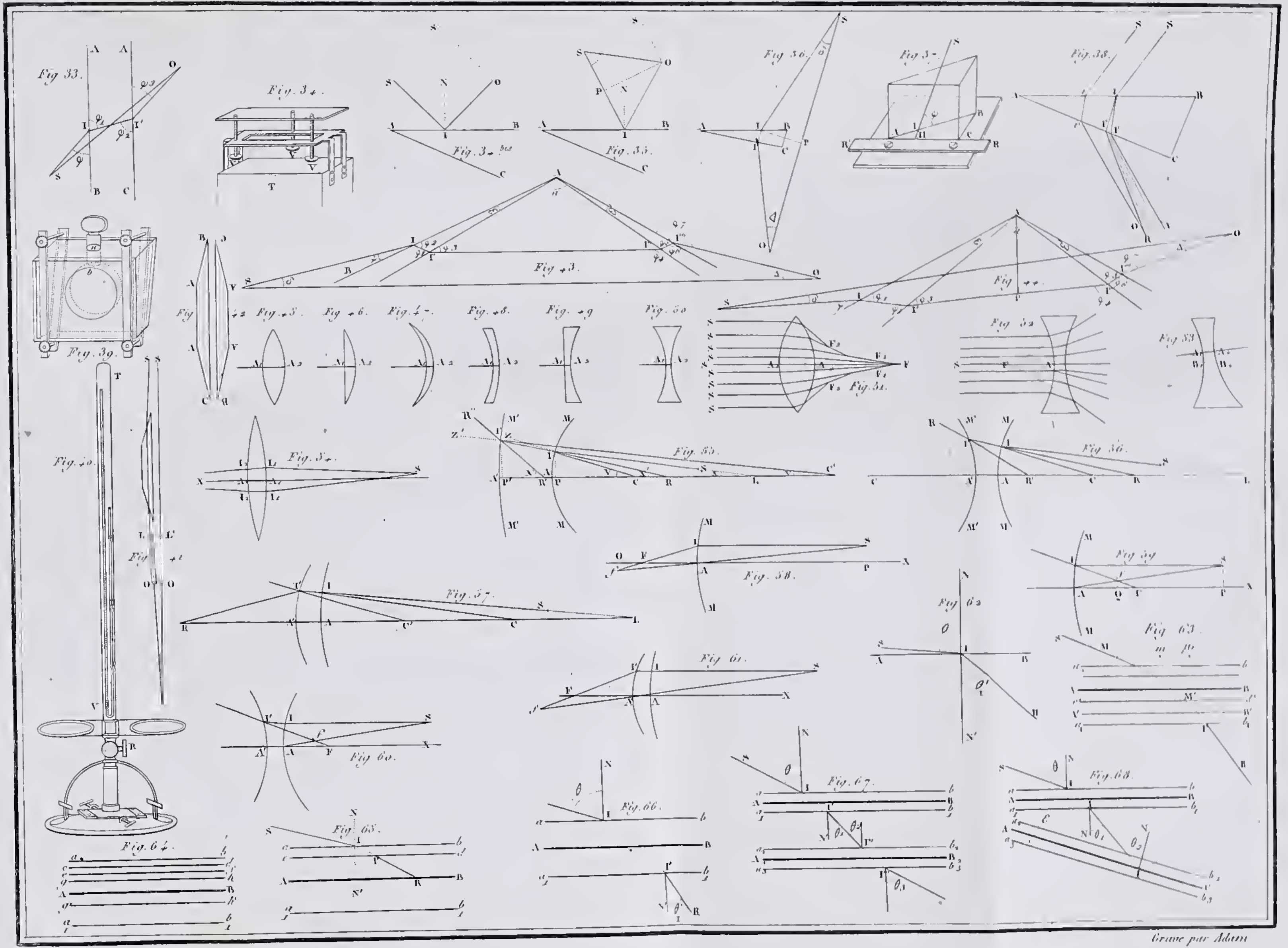
Boudrot Del.

Gravé par Adam

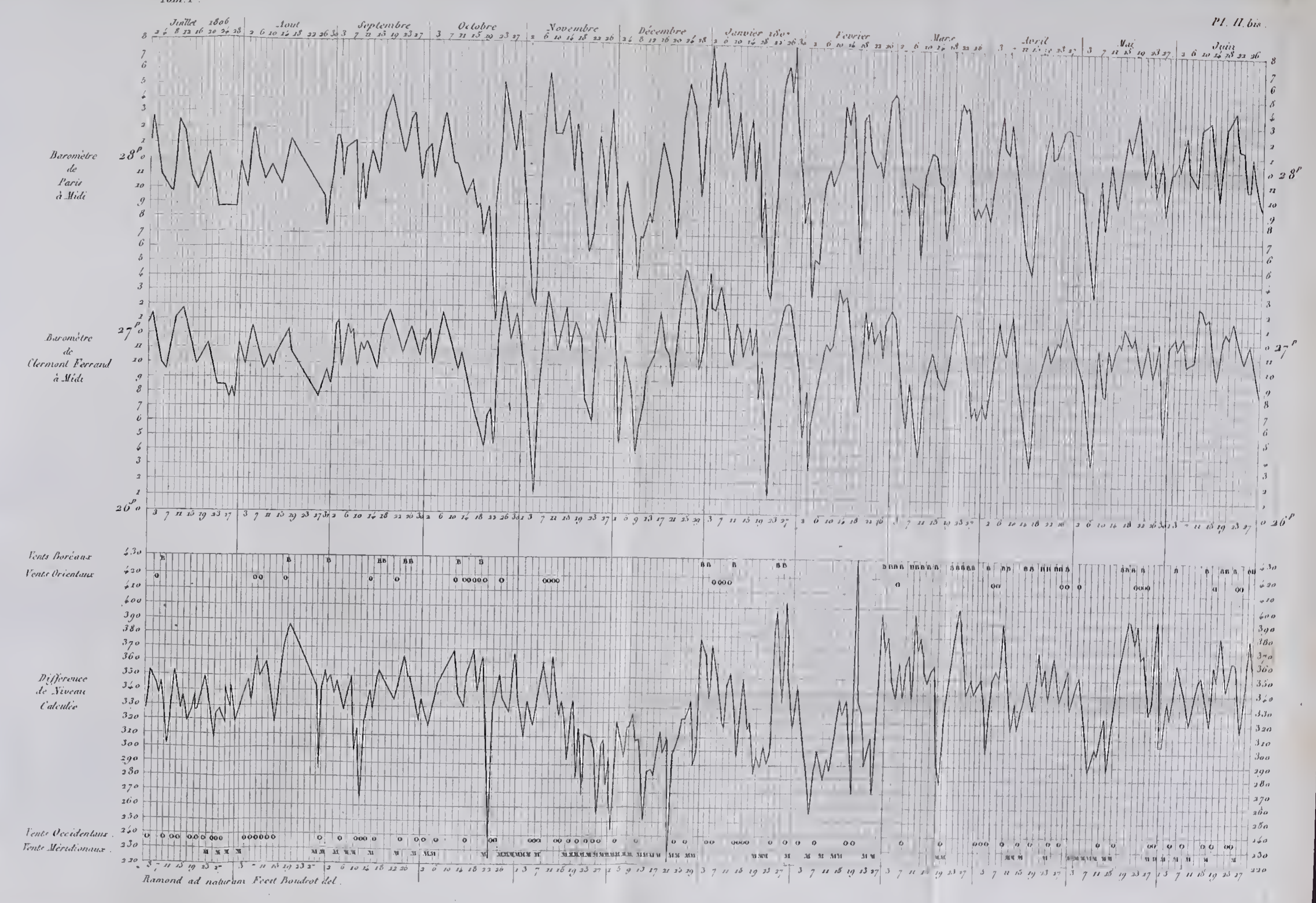


Boulret Del.

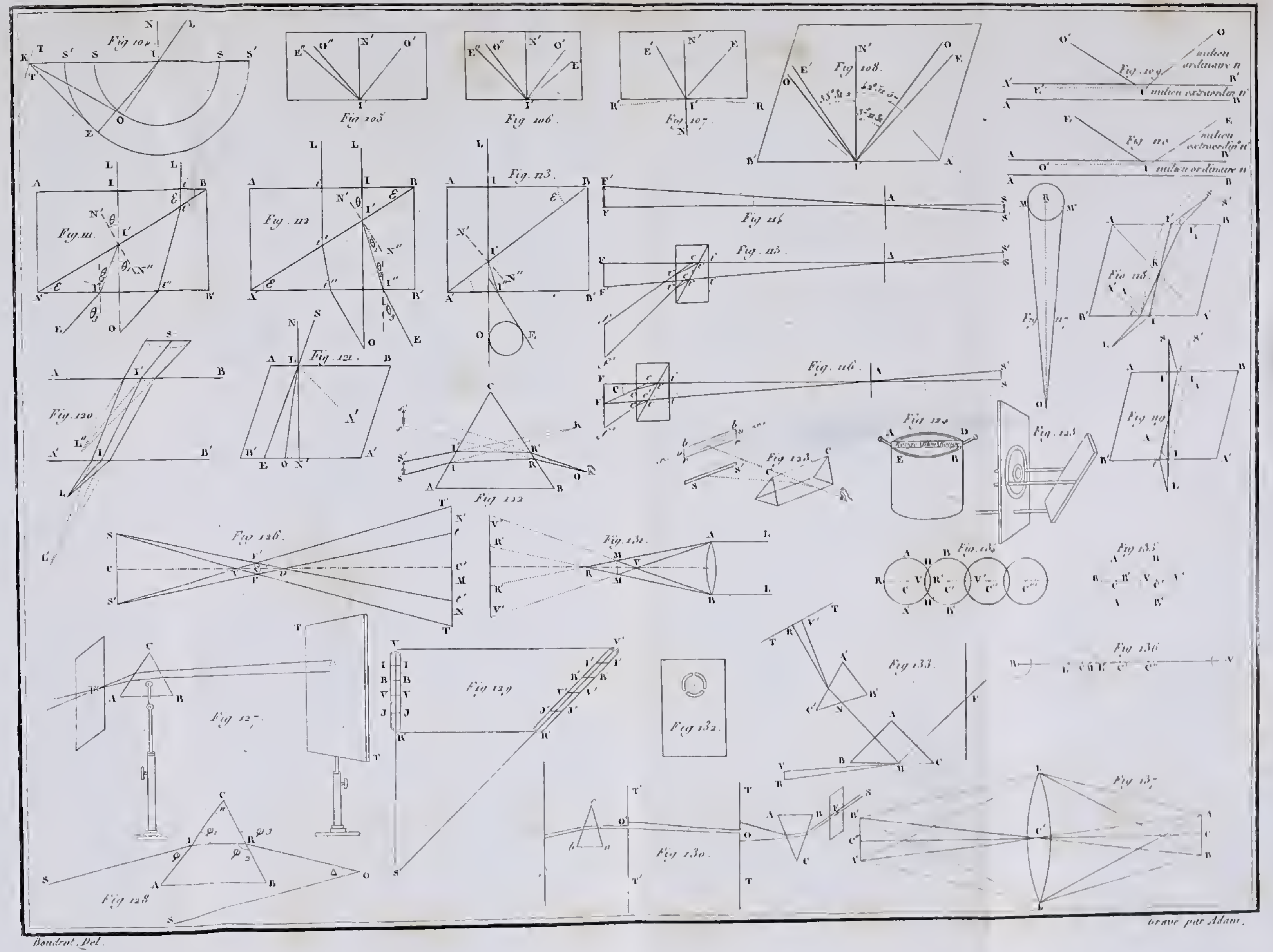
Gravé par Adam



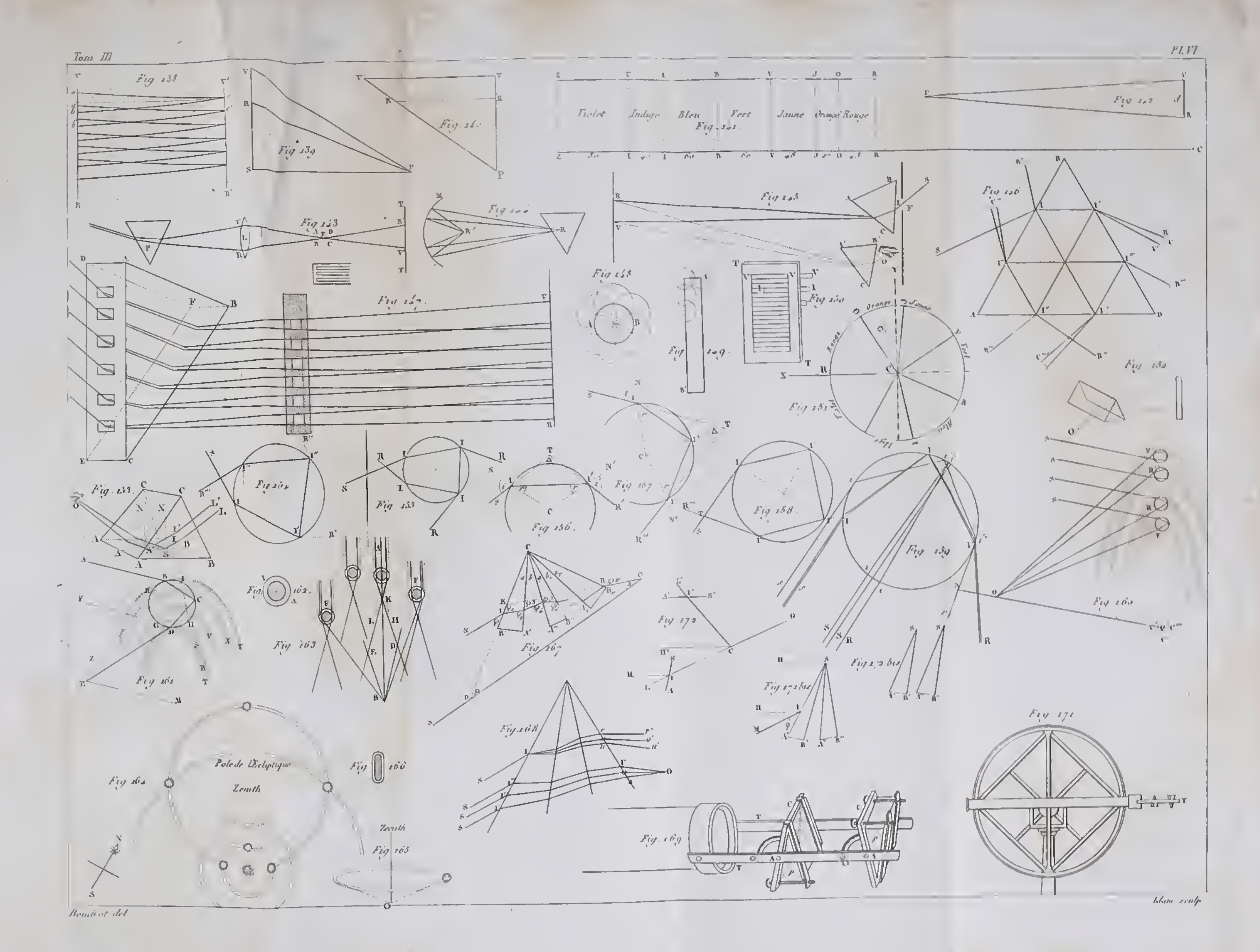
Boudrot Del.   Gravé par Adam



Ramond ad naturam Fecit Boudrot del.



Boudrot Del. Gravé par Adam.



Bouvet del. Blum sculp.

